4. Черная дыра и космическое фоновое излучение

Пусть черная дыра поглощает космическое фоновое излучение. Такое излучение, соответствующее излучению черного тела с температурой $\theta_ф$, заполняет всю вселенную. Объект, площадь поверхности которого A, в единицу времени поглощает энергию, равную $\sigma\theta_ф^4 A$. Поэтому черная дыра теряет энергию в виде излучения Хокинга и получает энергию в виде космического фонового излучения.

4.1. Выразите скорость изменения массы черной дыры через массу черной дыры, температуру космического фонового излучения и фундаментальные постоянные. (0,8 б.)

4.2. При достижении черной дырой определенной массы m^* скорость изменения ее массы окажется равной нулю. Найдите m^* и выразите ее через $\theta_ф$ и фундаментальные постоянные. (0,4 б.)

4.3. Используйте предыдущий ответ, для того чтобы заменить $\theta_ф$ в вашем ответе в части 4.1, и выразите скорость изменения массы черной дыры через m, m^* и фундаментальные постоянные. (0,2 б.)

4.4. Найдите температуру Хокинга черной дыры, находящейся в состоянии термодинамического равновесия с космическим фоновым излучениям. (0,4 б.)

4.5. Является ли данное равновесие устойчивым или нет? Почему? (Обоснуйте свой ответ математически.) (0,2 б.)

Публикацию подготовили С.Козел, В.Слободянин

КОЛЛЕКЦИЯ ГОЛОВОЛОМОК

Браслет–головоломка

(Начало см. на 4-й с. обложки)

Известно, что женщины разгадывают некоторые типы головоломок, например техно-психологические, лучше, чем мужчины. Это правило распространяется и на изобретение головоломок, отличающихся практичностью. Так, американка Марти Райс придумала браслет, который одновременно служит украшением и содержит в себе задачу-головоломку.

Этот браслоет нетрудно изготовить своими руками. Он состоит из замкнутой в кольцо шляпной резинки и нанизанных на нее шести одинаковых элементов в форме октаэдров (восьмигранников). Головоломка заключается в том, чтобы превратить браслет в выпуклый многогранник так, чтобы резинка прочно удерживала многогранник в собранном состоянии.

Скажем сразу, что единственный выпуклый многогранник, в который удается сложить детали головоломки, называется «ромбододекаэдр». Его грани – ромбы, а граней – 12. В классификации многогранников он относится к так называемым каталановым телам.

Разобравшись с формой собранной головоломки, перейдем к ее деталям. Они представляют собой октаэдры. Каждый из них состоит из двух одинаковых пирамидок, склеенных основаниями. Пирамидки специфические – их высота равна половине стороны квадратного основания. На соотношении размеров пирамидок (и соответственно, октаэдров) «держится» не только вся конструкция необычного женского украшения, но и способ его изготовления в домашних условиях. Это станет понятно, когда вы начнете делать ее своими руками.

Детали головоломки можно вырезать из деревянного бруска квадратного сечения. В этом случае вам придется рассчитать и точно соблюсти углы и размеры граней. Есть другой способ – «математический». Он основан на том, что из шести равных пирамидок с квадратными основаниями можно сложить куб, если высота пирамидок равна половине стороны основания. Следовательно, взяв деревянный кубик и распилив его по диагоналям сторон, вы получите шесть пирамидок, из которых можно склеить три октаэдра, – половина головоломки готова.

Теоретически для одного браслета достаточно двух кубиков, но в процессе изготовления некоторые пирамидки окажутся распиленными на четыре части и их придется склеивать. Поэтому проще взять три кубика, разрезать каждый на четыре трехгранные призмы и уже из них выпилить пирамидки.

Головоломка достаточно трудна в решении, но вам помогут рисунки, представленные на четвертой странице обложки.

А.Калинин

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

КМШ

ЗАДАЧИ

(см. «Квант» №1)

1. Вначале разложим монеты на две кучки: 8 монет и 4 монеты. За первое взвешивание узнаем, сколько тяжелых монет в большей кучке. Второе взвешивание будет зависеть от ответа на этот вопрос. Рассмотрим возможные варианты.

1) В большей кучке 6 тяжелых монет (значит, в меньшей кучке все монеты легкие). Вторым взвешиванием определим, сколько тяжелых монет среди произвольных двух монет большей кучки. Если 0, то одна из этих двух монет и любая одна монета из оставшихся шести монет большей кучки – искомые, если 1, то эти две монеты – искомые, а если 2, то искомыми являются любая из этих двух монет и любая монета из меньшей кучки.

2) В большей кучке 5, 4 или 3 тяжелые монеты, соответственно, в меньшей кучке 1, 2 или 3 тяжелые монеты. Для второго взвешивания возьмем любые две монеты из меньшей кучки. Несложно определить, как по результатам второго взвешивания найти нужные две монеты из меньшей кучки.

3) В большей кучке 2 тяжелые монеты (соответственно, в меньшей кучке 4 тяжелые монеты). Для второго взвешивания возьмем 6 монет из большей кучки. Если среди них 0 тяжелых монет, то годится любая из них вместе с любой монетой из меньшей кучки, если 1, то подойдут оставшиеся две монеты из большей кучки, а если 2, то искомыми монетами являются любая монета из оставшихся двух монет большей кучки и любая монета из меньшей кучки.

2. Знак третьей разности отрицателен.

Пусть три числа x, y, z таковы, что $xy - (x + y) < 0$, $yz - (y + z) > 0$. Запишем исходные условия так:

XXXVIII Международная физическая олимпиада

337 участников из 76 стран прилетели в Иран, а именно в город Исфахан, на очередную Международную физическую олимпиаду школьников. Вместе с ними прибыли сопровождающие их руководители команд и наблюдатели – всего 185 человек.

В сборную России вошли:

Андрей Котов – Москва, Московская государственная Пятьдесят седьмая школа,

Дмитрий Мыльников – Москва, школа 27 с углубленным изучением отдельных предметов,

Ксения Соловьева – Москва, школа 146 с углубленным изучением физики, математики, информатики,

Сергей Ефимов – Бийск, Бийский лицей Алтайского края, 10 класс,

Ярослав Бельтюков – Санкт-Петербург, лицей «ФТШ» при ФТИ им. А.Ф.Иоффе.

Нашу команду возглавили профессор Московского физико-технического института С.М.Козел и доцент МФТИ В.П.Слободянин. В составе российской делегации был также доцент МФТИ Д.А.Александров, принимавший активное участие в подготовке команды к олимпиаде. Он прибыл на олимпиаду за счет поддержки спонсора – Русского фонда содействия образованию и науке.

Подготовка команды к олимпиаде началась более чем за год и проводилась на базе МФТИ.

Как и в прошлые годы, участникам олимпиады были предложены три теоретические задачи и одно экспериментальное задание. Каждая теоретическая задача оценивалась из 10 баллов, а экспериментальная – из 20 баллов. Таким образом, максимальное количество баллов, которое мог набрать каждый из участников олимпиады, равнялось 50.

По итогам выступления золотые медали получили 37 участников, серебряные – 46 и бронзовые – 51 участник олимпиады. Сравнительные результаты 20 лучших команд таковы:

№	Страна	Количество медалей			Сумма баллов
		золото	серебро	бронза	
1.	Китай	4	1		226,1
2.	Южная Корея	2	3		217,2
3.	Россия	3	1		216,1
4.	Япония	2	2	1	206,9
5.	США	2	3		204,4
6.	Индия	2	2		203,1
7–8.	Иран	2	2	1	202,4
7–8.	Франция	1	3	1	202,4
9.	Индонезия	1	3	1	200,9
10.	Венгрия	1	2	2	199,3
11.	Таиланд	1	2	2	198,5
12.	Вьетнам	2	2		197,5
13.	Германия		5		197,4
14.	Чешская Республика	2	1	2	197,1
15.	Сингапур	2	1	2	196,4
16.	Тайвань	1	2	2	194,8
17–18.	Украина	2		3	191,9
17–18.	Словакия	1	1	2	191,9
19.	Белоруссия	1	1	3	191,2
20.	Канада	2		2	190,3

Члены сборной команды России показали следующие результаты:

Участник	Теория	Эксперимент	Сумма баллов	Медаль
Мыльников Дмитрий	29,5	18,1	47,6	золото
Соловьева Ксения	29,0	17,7	46,7	золото
Котов Андрей	29,7	16,4	46,1	золото
Бельтюков Ярослав	29,3	13,7	43,0	серебро
Ефимов Сергей	26,2	6,5	32,7	грамота

Условия задач теоретического тура приведены ниже. Об экспериментальном туре скажем лишь, что целью задания было определение ширины запрещенной зоны тонкой полупроводниковой пленки, содержащей наночастицы окиси железа, и измерение толщины этой пленки. Для определения ширины запрещенной зоны нужно было исследовать оптический спектр пропускания и спектр поглощения пленки. Измерения выполнялись на гониометре – приборе, позволяющем с высокой точностью измерять углы отклонения пучков света при их прохождении сквозь дифракционную решетку.

ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ ТУР

Задача 1

Две звезды, вращающиеся вокруг их общего центра масс, образуют бинарную (двойную) звездную систему. Почти половина звезд нашей галактики – двойные звезды. С Земли нелегко распознать двойную природу большинства этих звездных систем, так как расстояние между звездами намного меньше расстояния от них до Земли, и, следовательно, телескоп не способен разрешить отдельные компоненты двойной звезды. Поэтому приходится использовать либо фотометрию, либо спектрометрию для наблюдения изменений в интенсивности или в спектре конкретной звезды, для того чтобы определить, является ли данная звезда двойной.

1. Фотометрия двойной звезды

Если бы мы находились в плоскости движения двух звезд, тогда одна из звезд в определенные моменты времени заслоняла бы другую (проходя впереди нее) и интенсивность всей системы изменялась бы со временем при наблюдении из нашей точки. Такие звезды называются эклиптическими двойными звездами.

Допустим, что две звезды движутся по круговым орбитам вокруг их общего центра масс с постоянной угловой скоростью ω и мы находимся точно в плоскости движения звезд. Предположим также, что температуры поверхностей звезд равны T_1 и T_2 ($T_1 > T_2$), а их радиусы составляют R_1 и R_2

соответственно ($R_1 > R_2$). Зависимость от времени суммарной относительной интенсивности света, измеренной на Земле, показана на рисунке 1. Тщательные измерения свидетельствуют о том, что минимальные интенсивности падающего от звезд света соответствуют 90% и 63% суммарной

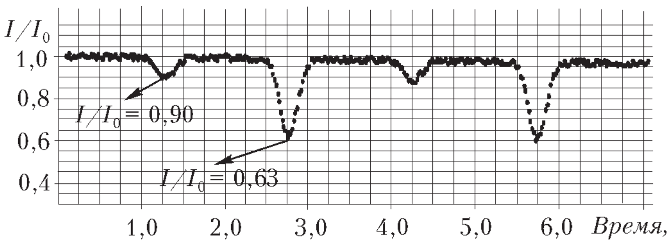

Рис. 1

интенсивности I_0, полученной от обеих звезд ($I_0 = 4{,}8 \cdot 10^{-9}$ Вт/м^2).

1.1. Найдите период орбитального движения звезд. Ответ выразите в секундах и округлите до двух значащих цифр. Найдите также угловую скорость вращения системы в рад/с. (0,8 балла)

Достаточно хорошим приближением для излучения, принимаемого от звезды, может служить излучение абсолютно черного тела в виде диска, радиус которого равен радиусу звезды. Поэтому мощность, принятая от звезды, пропорциональна AT^4, где A – площадь диска, T – поверхностная температура звезды.

1.2. С помощью графика, приведенного на рисунке 1, найдите отношения T_1/T_2 и R_1/R_2. (1,6 б.)

2. Спектрометрия двойной системы

В этой части вам предлагается вычислить астрономические свойства двойной звезды, используя ее экспериментальные спектрометрические данные.

Атомы поглощают и излучают свет определенных длин волн, характерных для данного атома. Поэтому наблюдаемый спектр звезды содержит линии поглощения, возникающие благодаря атомам, содержащимся в атмосфере звезды.

В спектре натрия имеется характерная желтая линия (D_1) с длиной волны 5895,9 Å (10 Å = 1 нм). Рассмотрим спектр поглощения атомарного натрия на этой длине волны для двойной звезды, о которой шла речь в предыдущей части. Из-за движения обеих звезд данной бинарной системы относительно наблюдателя частота (или длина волны) принимаемого нами излучения приобретает доплеровский сдвиг. Каждая из этих звезд имеет свою скорость и, соответственно, свой доплеровский сдвиг.

Требуются высоко точные измерения длины волны для наблюдения доплеровского сдвига, поскольку скорости звезд гораздо меньше, чем скорость света. Скорость центра масс бинарной системы, рассматриваемой в данном вопросе, гораздо меньше орбитальных скоростей звезд, поэтому все доплеровские сдвиги относятся к орбитальным скоростям звезд.

В таблице приведена зависимость от времени длин волн линий в спектре поглощения звезд двойной системы для линии D_1 натрия:

t (день)	0,3	0,6	0,9	1,2	1,5	1,8
λ_1 (Å)	5897,5	5897,7	5897,2	5896,2	5895,1	5894,3
λ_2 (Å)	5893,1	5892,8	5893,7	5896,2	5897,3	5898,7

t (день)	2,1	2,4	2,7	3,0	3,3	3,6
λ_1 (Å)	5894,1	5894,6	5895,6	5896,7	5897,3	5897,7
λ_2 (Å)	5899,0	5898,1	5896,4	5894,5	5893,1	5892,8

t (день)	3,9	4,2	4,5	4,8
λ_1 (Å)	5897,2	5896,2	5895,0	5894,3
λ_2 (Å)	5893,7	5896,2	5897,4	5898,7

Используя таблицу, ответьте на следующие вопросы.

2.1. Найдите орбитальную скорость каждой из звезд v_1 и v_2 (скорость света $c = 3{,}0 \cdot 10^8$ м/с). Релятивистские эффекты не учитывайте. (1,8 б.)

2.2. Найдите отношение масс звезд m_1/m_2. (0,7 б.)

2.3. Найдите расстояния r_1 и r_2 каждой из звезд бинарной системы от их общего центра масс. (0,8 б.)

2.4. Найдите расстояние r между звездами. (0,2 б.)

Учитывая, что гравитационная сила является единственной силой, действующей между звездами, дайте ответ на такой вопрос.

2.5. Найдите массу каждой звезды с точностью до одной значащей цифры. Гравитационная постоянная $G = 6{,}7 \cdot 10^{-11}$ м$^3 \cdot$ кг$^{-1} \cdot$ с$^{-2}$. (0,2 б.)

3. Общая характеристика звезд

Для большинства звезд механизм генерации излучаемой энергии одинаков. Поэтому существует эмпирическое соотношение между массой звезды M и ее светимостью L, которая равна общей мощности излучения звезды. Это соотношение можно записать в виде $L/L_C = (M/M_C)^\alpha$, где $M_C = 2{,}0 \cdot 10^{30}$ кг – масса Солнца, $L_C = 3{,}9 \cdot 10^{26}$ Вт – светимость Солнца. Эта закономерность проиллюстрирована на рисунке 2 в двойном логарифмическом масштабе (звездочкой отмечено Солнце).

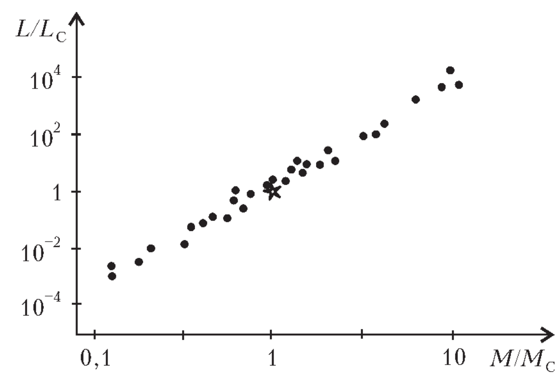

Рис. 2

3.1. Найдите показатель степени α с точностью до одной значащей цифры. (0,6 б.)

3.2. Пусть L_1 и L_2 – светимости звезд двойной системы, изучавшейся в предыдущей части. Найдите L_1 и L_2. (0,6 б.)

3.3. Определите расстояние d от нас до звездной системы в световых годах. Для определения этого расстояния вы можете использовать диаграмму, приведенную на рисунке 1. Один световой год равен расстоянию, которое свет проходит за один год. (0,9 б.)

3.4. Каково максимальное угловое расстояние θ между звездами при наблюдении с Земли? (0,9 б.)

3.5. Каким наименьшим диаметром D должен обладать объектив оптического телескопа, для того чтобы разрешить эти две звезды? (0,9 б.)

Задача 2

В данной задаче рассматривается упрощенная модель акселерометра (измерителя ускорения), который разработан для активирования воздушных подушек безопасности автомобиля во время столкновения. Для этого предлагается электромеханическая система, которая рассчитана таким образом, что когда ускорение превышает некоторое предельное значение, то один из электрических параметров системы – напряжение на одном из элементов цепи – достигает порогового значения, в результате чего надуваются (активируются) воздушные подушки. *Замечание:* действием силы тяжести в данной задаче следует пренебречь.

1. Рассмотрим конденсатор, состоящий из двух параллельных вертикальных пластин. Площадь каждой пластины A, расстояние между ними d (это расстояние значительно меньше размеров пластин). Одна из пластин прикреплена к стенке с помощью пружины жесткостью k, вторая пластина закреплена неподвижно. Считайте, что диэлектрическая проницаемость воздуха равна 1. Когда расстояние между пластинами равно d, пружина не деформирована. В этом состоянии электроемкость конденсатора равна $C_0 = \varepsilon_0 A/d$, где ε_0 – электрическая постоянная. Пластинам сообщают электрические заряды $+Q$ и $-Q$, после чего система переходит в состояние механического равновесия.

1.1. Найдите электрическую силу F, действующую на каждую пластину. (0,8 б.)

1.2. Обозначим через x смещение пластины, прикрепленной к пружине. Определите x. (0,6 б.)

1.3. Чему равна разность потенциалов U между пластинами в этом состоянии? Ответ выразите через параметры Q, A, d и k. (0,4 б.)

1.4. Пусть C – электроемкость конденсатора, равная по определению отношению заряда пластины к разности потенциалов между пластинами. Определите величину C/C_0 как функцию Q,A, d и k. (0,3 б.)

1.5. Чему равна полная энергия W, запасенная системой? Ответ выразите через Q, A, d и k. (0,6 б.)

На рисунке 3 приведена схема акселерометра. Тело массой M, соединенное с легкой проводящей подвижной пластиной, прикреплено к двум одинаковым пружинам жесткостью k.

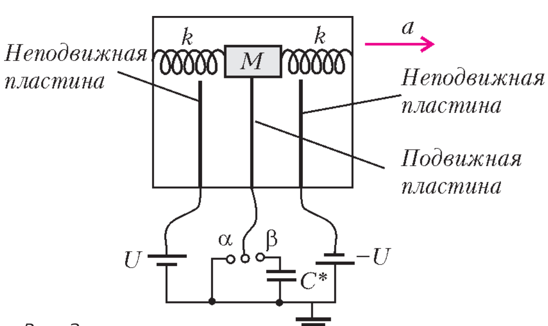

Рис. 3

Подвижная пластина может перемещаться между двумя неподвижными пластинами. Все три пластины одинаковы и их площади равны A. Таким образом, три пластины образуют два конденсатора. Как показано на рисунке , на неподвижных пластинах поддерживаются постоянные потенциалы U и $-U$ соответственно. Средняя пластина с помощью двухполюсного переключателя заземляется. Соединительные провода не препятствуют движению пластины, и в процессе движения все пластины остаются параллельными друг другу. Если система не ускоряется, то расстояния между подвижной и неподвижными пластинами равны d, причем это расстояние значительно меньше размеров пластин. Толщиной подвижной пластины можно пренебречь.

Переключатель может находиться в одном из двух положений α или β. Предположим, что рассматриваемое устройство движется вместе с автомобилем с постоянным ускорением. Будем считать, что в течение равноускоренного движения автомобиля пружины не колеблются и все компоненты системы находятся в равновесном положении, т.е. не движутся относительно друг друга и автомобиля.

Из-за наличия ускорения подвижная пластина смещается на определенное расстояние x от среднего положения между неподвижными пластинами.

2. Рассмотрите случай, когда переключатель находится в положении α , т.е. когда подвижная пластина соединена с землей проводом.

2.1. Найдите заряд каждого конденсатора как функцию величины x. (0,4 б.)

2.2. Найдите результирующую электрическую силу F, действующую на подвижную пластину, как функцию величины x. (0,4 б.)

2.3. Положим, что $d \gg x$, так что величинами порядка x^2 можно пренебречь по сравнению с d^2 . Упростите предыдущий ответ, используя это приближение. (0,2 б.)

2.4. Запишите выражение для суммарной силы F_c , действующей на подвижную пластину (сумма электрических и упругих сил), в виде $-k_{эф}x$ и приведите формулу для величины $k_{эф}$. (0,7 б.)

2.5. Выразите величину постоянного ускорения a как функцию x. (0,4 б.)

3. Теперь будем считать, что переключатель находится в положении β , т.е. подвижная пластина соединена с землей через конденсатор емкостью C^* (который также изначально не был заряжен). Пусть подвижная пластина сместилась на расстояние x от своего центрального положения.

3.1. Найдите напряжение U^* на конденсаторе C^* как функцию смещения x. (1,5 б.)

3.2. Опять будем считать, что $d \gg x$, так что можно пренебречь величинами порядка x^2 по сравнению с d^2 . Упростите ваш ответ в предыдущей части. (0,2 б.)

4. Необходимо подобрать параметры акселератора таким образом, чтобы воздушные подушки не активировались при нормальном торможении и активировались при столкновении для предотвращения удара головы водителя о лобовое стекло или руль.

Как следует из части 2, суммарная сила, действующая на подвижную пластину со стороны пружин и электрических полей, может быть представлена как сила упругости одной пружины с эффективной жесткостью $k_{эф}$. Таким образом, устройство эквивалентно пружинному маятнику с телом массой M и пружиной жесткостью $k_{эф}$, находящемуся в автомобиле, движущемся с постоянным ускорением a. Трением в системе можно пренебречь, значения параметров системы таковы: $d = 1{,}0$ см, $A = 2{,}5 \cdot 10^{-2}$ м^2 , $k = 4{,}2 \cdot 10^3$ Н/м , $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Кл$^2/(\text{Н} \cdot \text{м}^2)$, $U = 12$ В, $M = 0{,}15$ кг.

Замечание: в данной части задачи нельзя считать, что тело и пружины находятся в состоянии равновесия.

4.1. Используя эти данные, определите отношение электрической силы, найденной в разделе 2, к силе упругости пружин и покажите, что электрическими силами можно пренебречь по сравнению с силами упругости. (0,6 б.)

Несмотря на то, что вы не вычисляли электрические силы в случае, когда переключатель находится в положении β , можно показать, что и в этом случае электрические силы также являются малыми и ими можно пренебречь.

4.2. Пусть автомобиль, движущийся с постоянной скоростью, внезапно начинает тормозить с постоянным ускорением a. Чему равно в этом случае максимальное смещение подвижной пластины? Ответ дайте в виде формулы. (0,6 б.)

Переключатель находится в положении β , и устройство сконструировано так, что воздушные подушки активируются, когда напряжение на конденсаторе емкостью C^* достигает величины U^* . Нам необходимо, чтобы подушки не активировались, когда ускорение автомобиля не превышает ускорения свободного падения $g = 9{,}8$ м/с^2, но активировались при превышении этой величины.

4.3. Какой должна быть емкость конденсатора C^* для выполнения этих условий? (0,6 б.)

Будем считать, что воздушные подушки надуваются очень быстро, чтобы предотвратить удар головы водителя о лобовое стекло или руль. Предположим, что в результате столкновения автомобиль тормозит с постоянным ускорением, равным g, а голова водителя продолжает двигаться с постоянной скоростью.

4.4. Найдите время t_1 после начала торможения, через которое голова водителя ударится о руль. Расстояние до руля оцените самостоятельно. (0,8 б.)

4.5. Найдите время t_2 после начала торможения, через которое воздушные подушки активируются. Считайте, что они надуваются мгновенно. Сравните t_2 с t_1. Смогут ли воздушные подушки активироваться вовремя? (0,9 б.)

Задача 3

В физике соотношения между физическими величинами выражаются в виде равенств, левая и правая части которых должны быть однотипными, т.е. иметь одинаковые размерности. Скажем, нельзя, чтобы правая часть соотношения имела размерность длины, а левая часть – размерность времени. Используя этот факт, иногда возможно вывести искомое физическое соотношение, не решая задачу аналитически. Например, для того чтобы найти время, в течение которого объект падает с высоты h с постоянным ускорением g, необходимо, используя параметры задачи h и g, построить величину, имеющую размерность времени. Легко убедиться, что это можно сделать единственным образом: $T = a\sqrt{h/g}$. Заметим, что в это решение входит неопределенный безразмерный коэффициент a, который рассматриваемым методом определить нельзя. Этот коэффициент может быть равным 1, $1/2$, $\sqrt{3}$, π или любому другому вещественному числу. Такой метод получения физических соотношений называется методом анализа размерностей.

В методе анализа размерностей безразмерные коэффициенты не имеют важного значения. К счастью, в большинстве физических задач эти коэффициенты порядка 1, и их исключение не меняет порядок физической величины. Таким образом, анализ размерностей при решении поставленной выше задачи дает следующий ответ: $T = \sqrt{h/g}$.

Обычно размерность физической величины выражают через размерности четырех основных физических величин – M (масса), L (длина), T (время), и K (температура). Размерность произвольной величины x записывается в виде $[x]$. Например, размерности скорости v, кинетической энергии E_k и теплоемкости C_V выражаются так:

$$[v] = LT^{-1},\ [E_k] = ML^2T^{-2} \text{ и } [C_V] = ML^2T^{-2}K^{-1}.$$

1. Фундаментальные константы и анализ размерностей

1.1. Выразите размерности фундаментальных констант: постоянной Планка h, скорости света c, гравитационной постоянной G и постоянной Больцмана $k_Б$ через размерности длины, массы, времени и температуры. (0,8 б.)

Согласно закону Стефана–Больцмана, мощность излучения черного тела, которая определяется как суммарная энергия, излучаемая с единицы поверхности черного тела в единицу времени, равна $\sigma\theta^4$, где σ есть постоянная Стефана–Больцмана и θ – абсолютная температура черного тела.

1.2. Выразите размерность постоянной Стефана–Больцмана через размерности длины, массы, времени и температуры. (0,5 б.)

Постоянная Стефана–Больцмана не является фундаментальной физической постоянной, но ее можно выразить через фундаментальные физические постоянные h, c, G и $k_Б$, т.е. можно записать $\sigma = ah^\alpha c^\beta G^\gamma k_Б^\delta$. В этом соотношении a – безразмерная величина порядка единицы.

1.3. Найдите α, β, γ и δ, используя метод анализа размерностей. (1,0 б.)

2. Физика черных дыр

В этой части задачи попробуйте определить некоторые свойства черных дыр, используя метод анализа размерностей. В соответствии с теоремой Хокинга, «черные дыры не имеют волос», т.е. все физические характеристики черной дыры, которые рассматриваются в этой части, определяются только ее массой. Одной из важнейших физических характеристик черной дыры является площадь поверхности ее «горизонта событий». (Горизонт событий определяет границу черной дыры. Внутри области, определяемой горизонтом событий, гравитационное поле столь велико, что даже свет не может выйти за пределы данной области.)

Вам предлагается найти соотношение между массой m черной дыры и площадью A ее горизонта событий. Эта площадь зависит от массы черной дыры, скорости света и гравитационной постоянной. Как и в пункте 1.3, эта зависимость может быть представлена в виде $A = G^\alpha c^\beta m^\gamma$.

2.1. Используйте метод анализа размерностей для определения α, β, и γ. (0,8 б.)

Из сказанного следует, что площадь горизонта событий черной дыры увеличивается с ростом ее массы. С классической точки зрения, ничто не может покинуть пределы горизонта событий черной дыры, и поэтому во всех физических процессах площадь горизонта событий черной дыры может только увеличиваться. По аналогии со вторым законом термодинамики, Бекенштейн предложил считать, что энтропия S черной дыры пропорциональна площади ее горизонта событий, т.е. $S = \eta A$. Гипотезу можно сделать более правдоподобной, используя другой подход.

2.2. Используя термодинамическое определение энтропии $dS = dQ/\theta$, определите размерность энтропии. (Здесь dQ – количество теплоты, получаемое системой в результате теплообмена, θ – абсолютная температура системы.) (0,6 б.)

2.3. Выразите размерную постоянную η как функцию фундаментальных констант h, c, G и $k_Б$. (1,1 б.)

3. Излучение Хокинга

С помощью полуклассического приближения Хокинг показал, что, в отличие от классической точки зрения, черная дыра может излучать подобно черному телу, находящемуся при температуре, называемой температурой Хокинга.

3.1. Используя законы термодинамики и формулу $E = mc^2$, в которой энергия черной дыры выражается через ее массу, выразите температуру Хокинга θ_X черной дыры через ее массу и фундаментальные постоянные. Считайте, что черная дыра не совершает работы над окружающей средой. (0,8 б.)

3.2. Масса изолированной черной дыры изменяется вследствие излучения Хокинга. Используйте закон Стефана–Больцмана, чтобы найти зависимость скорости изменения массы от температуры Хокинга черной дыры, и выразите эту скорость через ее массу и фундаментальные постоянные. (0,7 б.)

3.3. Найдите время t^*, в течение которого изолированная черная дыра с массой m полностью испарится, т.е. потеряет всю свою массу. (1,1 б.)

С точки зрения термодинамики, черные дыры проявляют некоторые экзотические свойства. Например, теплоемкость черной дыры отрицательна.

3.4. Найдите теплоемкость черной дыры массой m. (0,6 б.)