XLVIII Международная математическая олимпиада

В период с 19 по 31 июля 2007 года в Ханое (Вьетнам) прошла XLVIII Международная математическая олимпиада (ММО), собравшая рекордное количество участников: 520 школьников из 93 стран. Ребятам из разных уголков мира представилась возможность пообщаться с юными математиками других стран, познакомиться с культурными традициями Вьетнама, полюбоваться удивительной красотой «залива тысячи островов» Калонг.

В состав команды России в этом году вошли одиннадцатиклассники *Сергей Дроздов* (Санкт-Петербург, лицей «ФТШ» при ФТИ им. А.Ф.Иоффе), *Алексей Есин* (Краснодарский край, станица Старонижестеблиевская, школа 55), *Мария Илюхина* (Москва, лицей «Вторая школа»), *Константин Матвеев* (Омск, лицей 66), *Иван Митрофанов* (Коломна, гимназия 2), а также десятиклассник *Владислав Волков* (Санкт-Петербург, ФМЛ 239).

Команда России блестяще выступила на ММО-2007, завоевав 5 золотых и 1 серебряную медаль и став лучшей в неофициальном командном зачете. Золотыми медалями награждены С.Дроздов, А.Есин, М.Илюхина, К.Матвеев, И.Митрофанов, серебряной – В.Волков. Вот результаты выступления нашей команды:

	Баллы за задачи						Сумма баллов
	1	2	3	4	5	6	
К.Матвеев	7	7	2	7	7	7	37
М.Илюхина	7	7	5	7	7	1	34
А.Есин	7	7	2	7	7	1	31
С.Дроздов	7	7	1	7	7	0	29
И.Митрофанов	7	7	1	7	7	0	29
В.Волков	7	7	1	7	2	0	24

По традиции, олимпиада прошла в два тура, в каждом из которых участникам предлагалось по 3 задачи. Заключительные задания каждого дня олимпиады оказались как никогда сложными: задачу 6 смогли полностью решить лишь пять участников олимпиады, а задачу 3 – всего два. В результате лучший результат на олимпиаде составил 37 баллов из 42 возможных, и его добился член нашей команды – Константин Матвеев, ставший абсолютным победителем олимпиады. (Удивительно, что ровно 15 лет назад в составе команды СНГ на Международной олимпиаде также выступил участник Константин Матвеев, набравший точно такие же баллы по каждой задаче!) Шестое место среди всех участников ММО-2007 заняла Мария Илюхина, двенадцатое – Алексей Есин. Всем троим золотые медали лично вручил президент Вьетнама, награждавший самых лучших участников олимпиады.

Команда России впервые стала единоличным победителем Международной математической олимпиады в неофициальном командном зачете, обойдя на 3 балла традиционно лучшую на ММО команду Китая. Вот результаты первых двадцати команд:

№ Страна	Общее число баллов	Количество медалей: золото	серебро	бронза
1. Россия	184	5	1	0
2. Китай	181	4	2	0
3. Вьетнам	168	3	3	0
4. Ю.Корея	168	2	4	0
5. США	155	2	3	1
6. Украина	154	3	1	2
7. Япония	154	2	4	0
8. КНДР	151	1	4	0
9. Болгария	149	2	3	1
10. Тайвань	149	2	3	1
11. Румыния	146	1	4	1
12. Иран	143	1	3	2
13. Гонконг	143	0	5	1
14. Таиланд	133	1	3	2
15. Германия	132	1	3	1
16. Венгрия	129	0	5	0
17. Турция	124	1	2	2
18. Польша	122	1	2	2
19. Белоруссия	119	1	1	4
20. Молдова	118	0	3	2

Руководство команды выражает благодарность всем педагогам-наставникам, воспитавшим ребят, а также тренерскому совету национальной сборной 2007 года, прекрасно подготовившему команду к олимпиаде. На сборах, проходивших в период с 26 июня по 16 июля в пансионате «Лисицкий бор» Тверской области, с командой работали: профессор Ярославского государственного университета В.Л.Дольников, педагог ФМЛ 239 (Санкт-Петербург) М.Я.Пратусевич, программист Г.Р.Челноков (Москва), а также победители и призеры Международных математических олимпиад прошлых лет: В.В.Астахов – студент мехмата МГУ, А.И.Бадзян – студент МФТИ, С.Л.Берлов – педагог ФМЛ 239 (Санкт-Петербург), А.А.Глазырин – аспирант мехмата МГУ, М.И.Исаев – студент МФТИ, Д.В.Карпов – научный сотрудник Петербургского отделения Математического института РАН и преподаватель СПбГУ, П.А.Кожевников – старший преподаватель МФТИ, Д.Г.Фон-Дер-Флаасс – научный сотрудник Сибирского отделения Математического института РАН.

Руководителями команды России в 2007 году были Н.Х.Агаханов – доцент МФТИ и А.И.Гарбер – аспирант Математического института РАН.

Руководство команды выражает огромную благодарность Дмитрию Юрьевичу Дойхену за постоянную поддержку подготовки национальной команды России по математике и ее участия в международных математических соревнованиях.

ЗАДАЧИ ОЛИМПИАДЫ

1. Даны действительные числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Для каждого i ($1 \le i \le n$) положим

$$d_i = \max\left\{a_j : 1 \le j \le i\right\} - \min\left\{a_j : i \le j \le n\right\}.$$

Пусть

$$d = \max\left\{d_i : 1 \le i \le n\right\}.$$

а) Докажите, что для любых действительных чисел $x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_n$ справедливо неравенство

$$\max\left\{\left|x_i - a_i\right| : 1 \le i \le n\right\} \ge \frac{d}{2}. \qquad (*)$$

б) Покажите, что существуют такие действительные числа $x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_n$, что неравенство $(*)$ обращается в равенство.

(Новая Зеландия)

2. Даны пять точек A, B, C, D, E такие, что $ABCD$ – параллелограмм, а около четырехугольника $BCED$ можно описать окружность. Прямая l проходит через точку A, пересекает отрезок DC в его внутренней точке F, а прямую BC – в точке G. Предположим, что $EF = EG = EC$. Докажите, что прямая l является биссектрисой угла DAB.

(Люксембург)

3. См. задачу М2085 «Задачника «Кванта».

(Россия)

4. Биссектриса угла BCA треугольника ABC пересекает его описанную окружность вторично в точке R и пересекает серединные перпендикуляры к сторонам AC и BC в точках P и Q соответственно. Точки K и L – середины отрезков AC и BC соответственно. Докажите, что площади треугольников RPK и RQL равны.

(Чехия)

5. Положительные целые числа a и b таковы, что число $\left(4a^2-1\right)^2$ делится на $4ab-1$. Докажите, что $a = b$.

(Великобритания)

6. Пусть n – целое положительное число. Рассмотрим множество

$$S = \{(x;y;z) : x, y, z \in \{0,1,\ldots,n\}, x+y+z>0\},$$

состоящее из $(n+1)^3-1$ точек трехмерного пространства. Найдите наименьшее возможное количество плоскостей, объединение которых содержит все точки из S, но не содержат точку $(0;\ 0;\ 0)$.

(Голландия)

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

1 (А.Есин). а) Пусть d совпадает с числом d_l $(1 \le l \le n)$. Найдем такие $k \in \{1,\ldots,l\}$, $m \in \{l+1,\ldots,n\}$, что $a_k = \max\{a_1,\ldots,a_l\}$, $a_m = \min\{a_l,\ldots,a_n\}$; тогда $d = a_k - a_m$. Предположим, что $|x_k - a_k| < \frac{d}{2}$ и $|x_m - a_m| < \frac{d}{2}$; тогда $(x_m - a_m) - (x_k - a_k) < d$. Но, с другой стороны, $(x_m - a_m) - (x_k - a_k) = (a_k - a_m) + (x_m - x_k) = d + (x_m - x_k)$, что не меньше d, так как $m \ge k$. Полученное противоречие показывает, что $\max\{|x_k - a_k|, |x_m - a_m|\} \ge d$.

б) Положим $x_i = \max\{a_1,\ldots,a_i\} - \frac{d}{2}$; легко видеть, что $x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_n$. Докажем, что $|x_i - a_i| \le \frac{d}{2}$ для любого $i \in \{1,2,\ldots,n\}$. Из пункта а) тогда будет следовать, что $\max\{|x_i - a_i| : 1 \le i \le n\} = \frac{d}{2}$. Предположим противное: пусть для какого-то l выполнено $|x_l - a_l| > \frac{d}{2}$.

Случай 1: пусть $x_l - a_l > \frac{d}{2}$. Тогда

$$\max\{a_1,\ldots,a_l\} - \frac{d}{2} - a_l > \frac{d}{2} \Rightarrow d < \max\{a_1,\ldots,a_l\} - a_l \le$$

$$\le \max\{a_1,\ldots,a_l\} - \min\{a_l,\ldots,a_n\} = d_l.$$

Противоречие.

Случай 2: пусть $x_l - a_l < -\frac{d}{2}$. Тогда

$$\max\{a_1,\ldots,a_l\} - \frac{d}{2} - a_l < -\frac{d}{2} \Rightarrow \max\{a_1,\ldots,a_l\} < a_l.$$

Противоречие.

2 (В. Волков). Введем обозначения: $\angle CDE = \angle CBE = \varphi$ (четырехугольник $BCED$ – вписанный), $EG = EC = EF = x$ (радиусы окружности с центром E), $\angle CGE = \angle GCE = \alpha$, $\angle FCE = \angle CFE = \beta$ (рис.1). Заметим, что $\Delta AFD \sim \Delta GFC$, так как $AD \parallel GC$, поэтому $\frac{AD}{GC} = \frac{FD}{FC} \Rightarrow \frac{BC}{GC} = \frac{FD}{FC}$. Далее, $\angle CEB = \alpha - \varphi > 0$ ($\angle GCE$ – внешний для треугольника CEB), поэтому по теореме синусов для треугольника CEB: $BC = \frac{x}{\sin\varphi}\sin(\alpha - \varphi)$. А из равнобедренного треугольника CEG: $CG = 2x\cos\alpha$. Аналогично, из треугольника DEF: $FD = \frac{x}{\sin\varphi}\sin(\beta - \varphi)$, а из треугольника CEF: $CF = 2x\cos\beta$. Значит,

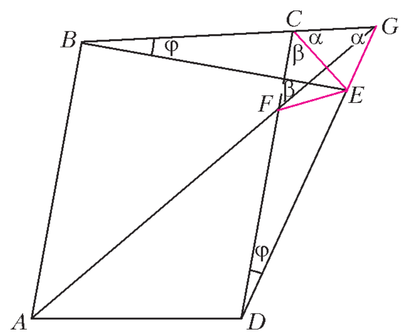

Рис. 1

$$\frac{BC}{GC} = \frac{\sin(\alpha - \varphi)}{2\cos\alpha\sin\varphi}, \quad \frac{FD}{FC} = \frac{\sin(\beta - \varphi)}{2\cos\beta\sin\varphi},$$

откуда

$$\frac{\sin(\alpha - \varphi)}{\cos\alpha} = \frac{\sin(\beta - \varphi)}{\cos\beta}.$$

Но $0 < \alpha,\ \beta < \frac{\pi}{2}$, поэтому $0 < \alpha - \varphi,\ \beta - \varphi < \frac{\pi}{2}$. Если предположить, что $\alpha > \beta$, то $\cos\alpha < \cos\beta$ и $\sin(\alpha - \varphi) > \sin(\beta - \varphi)$, откуда $\frac{\sin(\alpha - \varphi)}{\cos\alpha} > \frac{\sin(\beta - \varphi)}{\cos\beta}$. Аналогично, предположение о том, что $\alpha < \beta$, сводится к противоречию. Значит, $\alpha = \beta$. Тогда треугольники CEG и CEF равны $\Rightarrow CF = CG \Rightarrow \Delta CFG$ – равнобедренный. Отсюда $\angle BAG = \angle CFG = \angle CGF = \angle DAG$, т.е. AG – биссектриса угла BAD.

4. Если $P = Q$, то P – точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам AC и BC, поэтому биссектриса CR является серединным перпендикуляром к AB. Тогда равенство $S_{PRK} = S_{QRL}$ следует из симметрии относительно CR.

Пусть $P \ne Q$. Прямые PK и LQ пересекаются в центре O описанной окружности треугольника ABC (рис.2). Из подобных прямоугольных треугольников CLQ и CKP:

$$PK \cdot CQ = QL \cdot CP, \quad \angle CQL = \angle CPK.$$

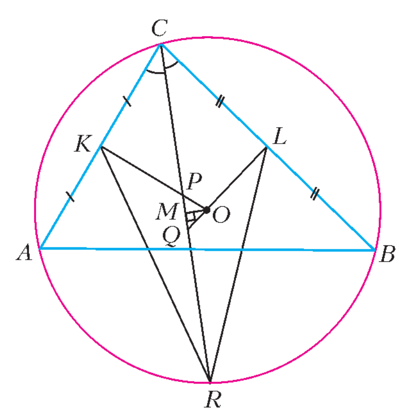

Рис. 2

Далее, треугольник OPQ равнобедренный, поэтому P и Q симметричны относительно точки M, являющейся основанием перпендикуляра, опущенного из O на CR. Точка M – середина CR, поэтому $CP = QR$, $CQ = PR$.

Отношение искомых площадей равно

$$\frac{S_{PRK}}{S_{QRL}} = \frac{PK \cdot PR \cdot \sin \angle RPK}{QL \cdot QR \cdot \sin \angle RQL} = \frac{PK \cdot CQ \cdot \sin \angle CPK}{QL \cdot CP \cdot \sin \angle CQL} = 1 .$$

5 (И.Митрофанов). Если $\left(4a^2-1\right)^2$ делится на $4ab-1$, то

$$\left(4a^2-1\right)^2 - 2\left(4a^2-1\right)(4ab-1) + (4ab-1)^2 = \\ = \left(\left(4a^2-1\right)-(4ab-1)\right)^2 = (4a)^2(a-b)^2$$

делится на $4ab - 1$. Поскольку $4ab - 1$ и $4a$ взаимно просты, получаем, что $(a-b)^2$ делится на $4ab - 1$, т.е.

$$(a-b)^2 = k(4ab-1) \qquad (1)$$

для некоторого целого k. При $k = 0$ получаем $a = b$. Докажем, что при фиксированном $k > 0$ условие (1) неразрешимо в натуральных a, b. Пусть это не так. Тогда рассмотрим все пары натуральных чисел (a,b), для которых выполнено (1) (очевидно, для таких пар $a \neq b$), и выберем из них пару (a_0,b_0) с наименьшим $b = b_0$; в силу симметрии равенства (1), для пары (b_0,a_0) оно также выполнено, поэтому $b_0 < a_0 = tb_0$ для некоторого действительного $t > 1$. Перепишем (1) для $a = a_0$, $b = b_0$ в виде

$$a_0^2 - (2+4k)a_0b_0 + \left(b_0^2 + k\right) = 0 . \qquad (2)$$

Мы видим, что квадратное уравнение $x^2 - (2+4k)b_0x + \left(b_0^2+k\right) = 0$ имеет целый корень $x_1 = a_0$, значит, оно имеет и второй целый корень, который в силу теоремы Виета равен $x_2 = \frac{b_0^2+k}{a_0} > 0$. Пара (b_0,x_2) удовлетворяет равенству (1), поэтому $x_2 > b_0$ в силу выбора b_0. Получаем $\frac{b_0^2+k}{a_0} > b_0$, откуда $k > b_0(a_0-b_0) = b_0^2(t-1)$.

Подставляя $a = tb_0$, $b = b_0$ в равенство (1), имеем

$$b_0^2(t-1)^2 = k\left(4tb_0^2-1\right) > b_0^2(t-1)\left(4tb_0^2-1\right) \Rightarrow \\ \Rightarrow t-1 > 4tb_0^2 - 1 \Rightarrow 1 > 4b_0^2 .$$

Противоречие.

6 (К.Матвеев). *Ответ*: $3n$.

Примером $3n$ соответствующих плоскостей, объединение которых содержит данное множество S, могут служить плоскости, задаваемые уравнениями вида $x = 1$, $x = 2$, … …, $x = n$, $y = 1$, $y = 2$, …, $y = n$, $z = 1$, $z = 2$, …, $z = n$. Очевидно, что каждая точка из S попадет хотя бы в одну из этих плоскостей, ибо имеет хотя бы одну ненулевую координату.

Теперь осталось показать, что объединением плоскостей, количество которых меньше $3n$, множество S покрыто быть не может.

Проведем доказательство от противного. Пусть множество S может быть покрыто объединением менее чем $3n$ плоскостей. Запишем уравнения этих плоскостей:

$$a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 ,$$
$$a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 ,$$
$$\ldots$$
$$a_kx + b_ky + c_kz + d_k = 0 .$$

Здесь, во-первых, $k < 3n$ и, во-вторых, ни одно из чисел d_1, d_2, …, d_k не равно 0, иначе соответствующая плоскость проходила бы через точку $(0;0;0)$.

Перемножив левые части уравнений этих плоскостей, получим многочлен $Q(x;y;z)$ от трех переменных, обращающийся в 0 при подстановке вместо $(x;y;z)$ координат любой точки множества S. Отметим, что $Q(0;0;0) = d_1d_2 \cdot \ldots \cdot d_k \neq 0$, а степень многочлена $Q(x;y;z)$ меньше $3n$.

Рассмотрим теперь многочлены

$$g_1(x) = x(x-1)\cdot\ldots\cdot(x-n) ,$$
$$g_2(y) = y(y-1)\cdot\ldots\cdot(y-n) ,$$
$$g_3(z) = z(z-1)\cdot\ldots\cdot(z-n) .$$

Каждый из них обращается в 0 во всех точках множества S (эти многочлены можно рассматривать как многочлены трех переменных, степени вхождения двух из которых только нулевые, и в этом качестве подставлять в них координаты точек множества S).

Разделим с остатком многочлен $Q(x;y;z)$, рассмотренный как многочлен от x, на $g_1(x)$. Получим равенство $Q(x;y;z) = g_1(x)\cdot A_1(x;y;z) + Q_1(x;y;z)$. При этом, во-первых, степень вхождения переменной x в многочлен $Q_1(x;y;z)$ будет на больше n, во-вторых, $Q_1(x;y;z)$ обращается в 0 во всех точках множества S (поскольку во всех точках множества S обращаются в 0 многочлены $Q(x;y;z)$ и $g_1(x)$) и, в-третьих, $Q_1(x;y;z)$ не обращается в 0 при $x = y = z = 0$ (поскольку $Q(0;0;0) = Q_1(0;0;0)$).

Аналогично получим равенство $Q_1(x;y;z) = g_2(y) \times \times A_2(x;y;z) + Q_2(x;y;z)$, где многочлен $Q_2(x;y;z)$ обращается в 0 во всех точках множества S, причем степень вхождения каждой из переменных x и y в $Q_2(x;y;z)$ не превосходит n и $Q_2(0;0;0) \neq 0$.

Наконец, получаем равенство $Q_2(x;y;z) = g_3(z) \times \times A_3(x;y;z) + T(x;y;z)$, где многочлен $T(x;y;z)$ обращается в 0 во всех точках множества S и степень вхождения в $T(x;y;z)$ каждой из переменных x, y и z не превосходит n, причем $T(0;0;0) \neq 0$. Тем самым, $T(x;y;z)$ не является тождественно нулевым многочленом.

Рассмотрим теперь одночлен $ax^sy^tz^u$ ($a \neq 0$) наибольшей степени $s + t + u$ в многочлене $T(x;y;z)$. Одно из чисел s, t, u должно быть строго меньше n, так как степень многочлена $T(x;y;z)$ не превосходит степени многочлена $Q(x;y;z)$, которая, в свою очередь, меньше $3n$. Не умаляя общности, пусть $s < n$.

Имеет место следующая теорема (см., например, книгу «Задачи Санкт-Петербургской олимпиады школьников по математике 2005 года»):

Пусть $P(x;y;z)$ – ненулевой многочлен от трех переменных с вещественными коэффициентами, одночлен наибольшей степени которого имеет вид $ax^sy^tz^u$ ($a \neq 0$). Пусть A, B, C – конечные множества вещественных чисел, причем в A содержится не менее $s + 1$ элементов, в B – не менее $t + 1$ элементов, в C – не менее $u + 1$ элементов. Тогда существуют числа $x_0 \in A$, $y_0 \in B$, $z_0 \in C$ такие, что $P(x_0;y_0;z_0) \neq 0$.

Применив эту теорему к многочлену $T(x;y;z)$ и множествам $A = \{1;2;\ldots;n\}$, $B = \{0;1;\ldots;n\}$, $C = \{0;1;\ldots;n\}$, приходим к противоречию, поскольку в силу построения многочлена $T(x;y;z)$ он обращается в 0, если одновременно $x \in A$, $y \in B$ и $z \in C$.

Публикацию подготовили Н.Агаханов, П.Кожевников, М.Пратусевич, Д.Фон-Дер-Флаасс