

Задачи LXX Московской математической олимпиады

6 класс

1. По двум телевизионным каналам одновременно начали показывать один и тот же фильм. На первом канале фильм разбили на части по 20 минут каждая и вставили между ними двухминутные рекламные паузы. А на втором канале фильм разбили на части по 10 минут каждая и вставили между ними минутные рекламные паузы. На каком канале фильм закончится раньше?

И.Раскина, Т.Караваева

2. В конце четверти Вовочка выписал подряд в строчку свои текущие отметки по пению и поставил между некоторыми из них знак умножения. Произведение получившихся чисел оказалось равным 2007. Какая отметка выходит у Вовочки в четверти по пению? («Колов» учительница пения не ставит.)

А.Хачатурян

3. Волк с тремя поросятами написали детектив «Три поросенка-2», а потом вместе с Красной Шапочкой и ее бабушкой – кулинарную книгу «Красная Шапочка-2». В издательстве выдали гонорар за обе книжки поросенку Наф-Нафу. Он забрал свою долю и передал оставшиеся 2100 золотых монет Волку. Гонорар за каждую книгу делится поровну между ее авторами. Сколько денег Волк должен взять себе?

А.Блинков

4. В Совершенном городе шесть площадей. Каждая площадь соединена прямыми улицами ровно с тремя другими площадями. Никакие две улицы в городе не пересекаются. Из трех улиц, отходящих от каждой площади, одна проходит внутри угла, образованного двумя другими. Начертите возможный план такого города.

Г.Панина

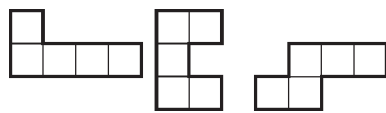


Рис. 1

5. Нарисуйте, как из данных трех фигурок (рис. 1), используя каждую ровно один раз, сложить фигуру, имеющую ось симметрии.

С.Маркелов

6. Кощей Бессмертный похитил у царя трех дочерей. Отправился Иван-царевич их выручать. Приходит он к Кощею, а тот ему и говорит:

«Завтра поутру увидишь пять заколдованных девушек. Три из них – царевы дочери, а еще две – мои. Для тебя они будут неотличимы, а сами друг дружку различать смогут. Я подойду к одной из них и стану у нее спрашивать про каждую из пятерых: «Это царевна»?». Она может отвечать и правду, и неправду, но ей дозволено назвать царевнами ровно двоих (себя тоже можно называть). Потом я так же опрошу каждую из остальных девушек, и они тоже должны будут назвать царевнами ровно двоих. Если после этого угадаешь, кто из них и вправду царевны, отпущу тебя восвояси невредимым. А если еще и догадаешься, которая царевна старшая, которая средняя, а которая младшая, то и их забирай с собой».

Иван может передать царевнам записку, чтобы научить их, кого назвать царевнами. Может ли он независимо от ответов Кошечьих дочерей: а) вернуться живым; б) увезти царевен с собой?

И.Раскина

7 класс

1. Даша и Таня живут в одном подъезде. Даша живет на 6 этаже. Выходя от Даши, Таня пошла не вниз, как ей было нужно, а вверх. Дойдя до последнего этажа, Таня поняла свою ошибку и пошла вниз на свой этаж. Оказалось, что Таня прошла в полтора раза больше, чем если бы она сразу пошла вниз. Сколько этажей в доме?

Т.Голенищева-Кутузова, И.Яценко

2. У Алены есть мобильный телефон, заряда аккумулятора которого хватает на 6 часов разговора или на 210 часов ожидания. Когда Алена садилась в поезд, телефон был полностью заряжен, а когда она выходила из поезда, телефон разрядился. Сколько времени она ехала на поезде, если известно, что Алена говорила по телефону ровно половину времени поездки?

А.Хачатурян

3. На клетчатой бумаге отмечены четыре узла сетки, образующие квадрат 4×4 . Отметьте еще два узла и соедините их замкнутой ломаной так, чтобы получился шестиугольник (не обязательно выпуклый) площадью 6 клеток.

Т.Голенищева-Кутузова, И.Яценко

4. Буратино ходит по улицам города, на одном из перекрестков которого зарыт клад. На каждом перекрестке ему по радио сообщают, приблизился он к кладу или удалился (по сравнению с предыдущим перекрестком). Радио либо всегда говорит правду, либо всегда лжет (но Буратино не знает, лжет оно или нет). Сможет ли Буратино точно узнать, где закопан клад, если план города имеет вид, показанный на рисунке 2?

(Перекрестки отмечены точками.)

Т.Голенищева-Кутузова

8 класс

1. За первый год население некоторой деревни возросло на n человек, а за второй – на 300 человек. При этом за первый год население увеличилось на 300%, а за второй – на $n\%$. Сколько жителей стало в деревне?

Б.Френкин

2. Дано натуральное число N . Для того чтобы найти целое число, ближайшее к \sqrt{N} , воспользуемся следующим способом: найдем среди квадратов натуральных чисел число a^2 , ближайшее к числу N ; тогда a и будет искомым числом. Обязательно ли этот способ даст правильный ответ?

А.Хачатурян

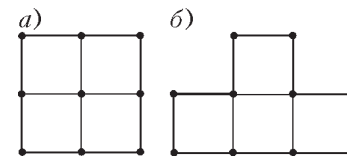


Рис. 2

3. В футбольном чемпионате участвовали 16 команд. Каждая команда сыграла с каждой по одному разу, за победу давалось 3 очка, за ничью 1 очко, за поражение 0. Назовем команду успешной, если она набрала хотя бы половину от наибольшего возможного количества очков. Какое наибольшее количество успешных команд могло быть в турнире?

А.Блинков

4. В треугольник ABC с прямым углом C вписана окружность, касающаяся сторон AC , BC и AB в точках M , K и N соответственно. Через точку K провели прямую, перпендикулярную отрезку MN . Она пересекла катет AC в точке X . Докажите, что $CK = AX$.

М.Волчкевич

5. Капитан Врунгель в своей каюте разложил перетасованную колоду из 52 карт по кругу, оставив одно место свободным. Матрос Фукс с палубы, не отходя от штурвала и не зная начальной раскладки, называет карту. Если эта карта лежит рядом со свободным местом, Врунгель ее туда передвигает, не сообщая Фуксу. Иначе – ничего не происходит. Потом Фукс называет еще одну карту, и так сколько угодно раз, пока сам не скажет «стоп». Может ли Фукс добиться того, чтобы после «стопа» каждая карта наверняка оказалась не там, где была вначале?

Л.Медников, А.Шаповалов

6. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ стороны AB , BC и CD равны, M – середина стороны AD . Известно, что угол BMC равен 90° . Найдите угол между диагоналями четырехугольника $ABCD$.

М.Волчкевич

9 класс

1. Номер нынешней олимпиады (70) образован последними цифрами года ее проведения, записанными в обратном порядке. Сколько еще раз повторится такая ситуация в этом тысячелетии?

А.Заславский

2. На параболе $y = x^2$ выбраны четыре точки A , B , C , D так, что прямые AB и CD пересекаются на оси ординат. Найдите абсциссу точки D , если абсциссы точек A , B и C равны a , b и c соответственно.

Н.Андреев, А.Блинков

3. Найдите все возрастающие конечные арифметические прогрессии, которые состоят из простых чисел и у которых количество членов больше, чем разность прогрессии.

Б.Френкин

4. Выпуклая фигура F обладает следующим свойством: любой правильный треугольник со стороной 1 можно параллельно перенести так, что все его вершины попадут на границу F . Обязательно ли F – круг? (Фигура называется выпуклой, если отрезок, соединяющий любые две ее точки, целиком принадлежит фигуре.)

С.Маркелов

5. В однокруговом футбольном турнире играли $n > 4$ команд. За победу давалось 3 очка, за ничью 1, за проигрыш 0. Оказалось, что все команды набрали поровну очков. а) Докажите, что найдутся 4 команды, имеющие поровну побед, поровну ничьих и поровну поражений. б) При каком наименьшем n могут не найтись 5 таких команд?

А.Заславский

10 класс

1. На сторонах единичного квадрата отметили точки K , L , M и N так, что прямая KM параллельна двум сторонам

квадрата, а прямая LN – двум другим сторонам квадрата. Отрезок KL отсекает от квадрата треугольник периметра 1. Треугольник какой площади отсекает от квадрата отрезок MN ?

С.Дориченко, Р.Женодаров, С.Токарев

2. Можно ли покрасить 15 отрезков, изображенных на рисунке 3, в 3 цвета так, чтобы никакие 2 отрезка одного цвета не имели общего конца?

И.Пушкарев

3. Треугольник ABC вписан в окружность с центром в O . Точка X – произвольная точка внутри треугольника ABC , такая, что $\angle XAB = \angle XBC = \varphi$, а P – такая точка, что $PX \perp OX$, $\angle XOP = \varphi$, причем углы XOP и XAB одинаково ориентированы. Докажите, что все такие точки P лежат на одной прямой.

А.Заславский

4. С ненулевым числом разрешается проделывать следующие операции: $x \mapsto \frac{1+x}{x}$, $x \mapsto \frac{1-x}{x}$. Верно ли, что из каждого ненулевого рационального числа можно получить каждое рациональное число с помощью конечного числа таких операций?

А.Петухов

11 класс

1. Круглая мишень разбита на 20 секторов, которые нумеруются по кругу в каком-либо порядке числами 1, 2, ..., 20. Если секторы занумерованы, например (как при игре в дартс), в следующем порядке: 1, 20, 5, 12, 9, 14, 11, 8, 16, 7, 19, 3, 17, 2, 15, 10, 6, 13, 4, 18, то наименьшая из разностей между номерами соседних (по кругу) секторов равна $12 - 9 = 3$ (из большего числа вычитается меньшее). Может ли указанная величина при нумерации в другом порядке быть больше 3? Каково наибольшее возможное значение этой величины?

И.Сергеев

2. Значение a подобрано так, что число корней первого из уравнений

$$4^x - 4^{-x} = 2 \cos ax, \quad 4^x + 4^{-x} = 2 \cos ax + 4$$

равно 2007. Сколько корней при том же a имеет второе уравнение?

В.Алексеев

3. Каким может быть произведение нескольких различных простых чисел, если оно кратно каждому из них, уменьшенному на 1? Найдите все возможные значения этого произведения.

А.Бегуниц

4. В основании $A_1A_2 \dots A_n$ пирамиды $SA_1A_2 \dots A_n$ лежит точка O , причем $SA_1 = SA_2 = \dots = SA_n$ и $\angle SA_1O = \angle SA_2O = \dots = \angle SA_nO$. При каком наименьшем значении n отсюда следует, что SO – высота пирамиды?

И.Сергеев

5. Квадрат состоит из $n \times n$ клеток: две противоположные угловые клетки – черные, а остальные – белые. Какое наименьшее количество белых клеток достаточно перекрасить в черный цвет, чтобы после этого с помощью преобра-

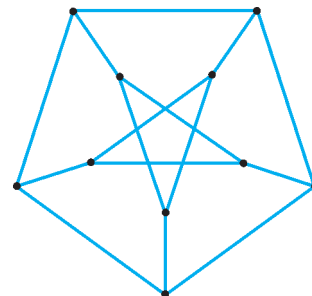


Рис. 3

зований, состоящих в перекрашивании всех клеток какого-либо столбца или какой-либо строки в противоположный цвет, можно было сделать черными все клетки этого квадрата?

В.Алексеев

6. Точки A', B' и C' – середины сторон BC , CA и AB треугольника ABC соответственно, а BH – его высота. Докажите, что если описанные около треугольников AHC' и CHA' окружности проходят через точку M , отличную от H , то $\angle ABM = \angle CBV'$.

В.Филимонов

7. Миша мысленно расположил внутри данного круга единичного радиуса выпуклый многоугольник, содержащий центр круга, а Коля пытается угадать его периметр. За один шаг Коля указывает Мише какую-либо прямую и узнает от него, пересекает ли она многоугольник. Имеет ли Коля возможность наверняка угадать периметр многоугольника через 3 шага с точностью до 0,3?

О.Косухин

Публикацию подготовил Б.Френкин

Избранные задачи Московской физической олимпиады

Первый теоретический тур

7 класс

1. Марс удобнее всего изучать во время противостояния, когда Земля находится между Марсом и Солнцем. Определите, через какой промежуток времени повторяются противостояния Земли и Марса. Марс совершает оборот вокруг Солнца за 687 земных дней, а Земля – за 365 дней.

М.Ромашка

2. На земле лежит слой снега толщиной $h = 70$ см. Давление снега на землю (без учета атмосферного давления) $p = 630$ Па. Погода морозная, и снег состоит из воздуха и льда. Определите, сколько процентов объема снега занимает лед, а сколько – воздух. Плотность льда $\rho_{\text{л}} = 0,9$ г/см³. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с².

М.Ромашка

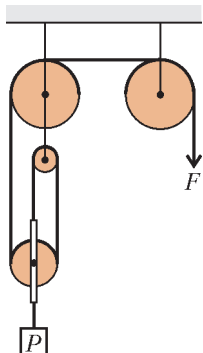


Рис. 1

3. На заводе для подъема тяжелых заготовок используется система из четырех блоков и одного троса, закрепленных на потолке, как показано на рисунке 1. С какой силой F надо тянуть вниз за конец троса, чтобы удерживать или медленно и равномерно поднимать заготовку, вес которой равен P ? Участки троса, не лежащие на блоках, горизонтальны или вертикальны, весом блоков, троса и трением можно пренебречь.

М.Семенов

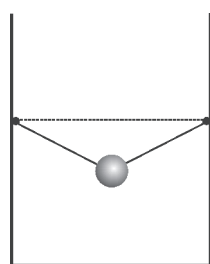


Рис. 2

4. Сплошной шарик подвешен в сосуде на двух легких нитях, как показано на рисунке 2. Свободные концы нитей закреплены на одной высоте. После того как сосуд заполнили водой и шарик оказался полностью погруженным в воду, натяжение нитей не изменилось. Определите плотность ρ материала, из которого изготовлен шарик. Плотность воды $\rho_{\text{в}} = 1000$ кг/м³.

И.Горбатый

8 класс

1. В широкий сосуд с водой медленно опускают на нити цилиндрический брусок так, что ось цилиндра все время остается вертикальной. График зависимости силы натяжения нити F от глубины погружения h нижнего основания цилиндра является отрезком прямой линии, как показано на рисунке 3. Найдите площадь основания цилиндра и его массу. Плотность воды $\rho_0 = 1$ г/см³, ускорение свободного падения $g = 10$ м/с².

М.Ромашка

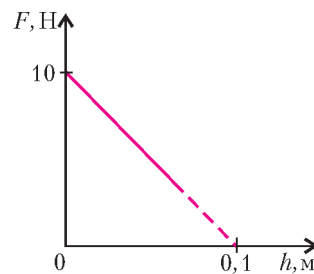


Рис. 3

2. В сосуде находился лед при температуре $t_{\text{л}} = 0^\circ\text{C}$. Туда влили воду массой $m_{\text{в}} = 0,4$ кг, взятую при температуре $t_{\text{в}} = 60^\circ\text{C}$. Какая температура установилась в сосуде, если конечный объем его содержимого $V = 1$ л? Чему равна масса содержимого сосуда? Плотности воды и льда $\rho_{\text{в}} = 1000$ кг/м³ и $\rho_{\text{л}} = 900$ кг/м³, их удельные теплоемкости $c_{\text{в}} = 4200$ Дж/(кг·°C) и $c_{\text{л}} = 2100$ Дж/(кг·°C), удельная теплота плавления льда $\lambda = 335$ кДж/кг. Теплоемкостью сосуда и потерями тепла пренебречь.

М.Ромашка

3. В одном из двух одинаково длинных «черных ящиков» находится постоянный магнит, а в другом – длинная катушка из медной проволоки, подключенная к источнику постоянного тока. Как, используя только эти «черные ящики», определить, в каком из них находится постоянный магнит? Нельзя заглядывать внутрь ящиков, разбирать ящики и разрушать их.

И.Горбатый

9 класс

1. «Черный ящик» представляет собой систему, изоб-

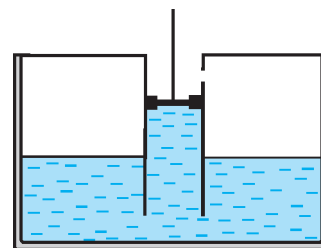


Рис. 4