Решения задач М1916–М1920, Ф1928–Ф1937

М1916. *Равносторонний треугольник разрезан на 25 равносторонних треугольников, лишь один из которых имеет отличную от 1 площадь. Какую?*

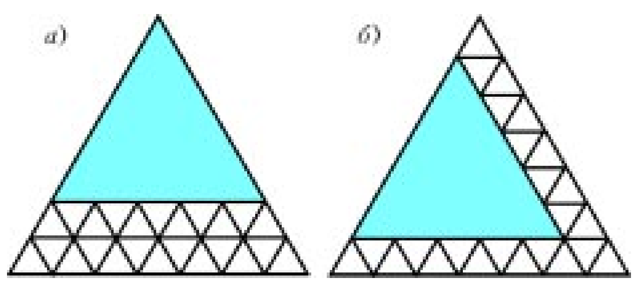
Ответ: 25.

Поменяем формулировку задачи на эквивалентную, но более удобную для изложения решения:

Исходный равносторонний треугольник Δ разрезан на 25 равносторонних треугольников, только у одного из которых – обозначим его Δ_1 – длина стороны $k \neq 1$. Требуется найти k.

Если длина стороны какого-либо равностороннего треугольника есть целое число a, то этот треугольник можно разрезать на a^2 равносторонних треугольников, у каждого из которых длина стороны 1.

Хотя бы к одной стороне треугольника Δ не примыкает треугольник Δ_1, а значит, примыкают только треугольники со сторонами 1, т.е. длина стороны Δ – целое



число n. Точно так же можно рассудить, что длина стороны треугольника Δ_1 – целое число k. После чего можно записать равенство $n^2 - k^2 = 24$. Это целочисленное уравнение, с учетом того, что $k \neq 1$, имеет только одно удовлетворяющее нас решение: $n = 7$, $k = 5$. У этого решения возможны два воплощения (см. рисунок). На вопрос «какую?» отвечаем: 25.

В.Произволов

М1917. *О натуральных числах a, p, q известно, что ap + 1 делится на q, aq + 1 делится на p. Докажите, что* $a > \dfrac{pq}{2(p+q)}$.

Очевидно, p и q взаимно просты (если d – их общий делитель, то он является также делителем числа $ap + 1$, а следовательно, и числа $ap + 1 - ap = 1$). Поэтому число $ap + aq + 1$, которое делится и на p, и на q, делится на их произведение pq. Значит, $a(p+q) \geq pq - 1$, откуда $2a(p+q) > pq$ (левая часть увеличилась на $a(p+q) > 1$), и $a > \dfrac{pq}{2(p+q)}$. Вот и все.

А.Голованов

М1918. *К двум окружностям проведены общие внешние касательные, одна из которых касается окружностей в точках A и B. Бильярдный шар, выпущенный из точки A, отразился от второй касательной и попал в точку B. Докажите, что хорды, высекаемые его траекторией на окружностях, равны.*

Для равных окружностей утверждение очевидно, поэтому будем считать, что касательные пересекаются в точке C. Пусть A', B' – точки, симметричные A, B относительно второй касательной; I_a, r_a – центр и радиус окружности, проходящей через A; I_b, r_b – центр и радиус окружности, проходящей через B'. Утверждение задачи эквивалентно равенству касательных, проведенных из точек A к окружности с центром I_b и радиусом r_b и из точки B' к окружности с центром I_a и радиусом r_a. Квадрат первой касательной равен

$$AI_b^2 - r_b^2 = AC^2 + CI_b^2 - r_b^2 - 2AC \cdot CI_b \cos\angle 3C/2 =$$

$$= AC^2 + B'C^2 - \frac{2AC \cdot B'C \cos\angle 3C/2}{\cos\angle C/2}.$$

Очевидно, то же выражение получится и для квадрата второй касательной.

А.Заславский

М1919. *Докажите, что число*

а) $2004^x + 1$,

б) $2004^x - 1$

не является второй или более высокой целой степенью натурального числа ни при каком натуральном x.

а) Предположим, что $2004^x + 1 = y^p$.

Пусть $p = 2$. Тогда $(y-1)(y+1) = 2004^x$, $a \geq 167^x$, $b \leq 12^x$, $2 = |a - b| \geq 167^x - 12^x \geq 155$.

Пусть $p \geq 3$. Тогда $1 + \ldots + y^{p-1}$ не делится на 2, $y - 1 \geq 4^x$, $y^n > 2048^x \geq 2004^x + 1$ при $n > 5$, следовательно, $p \leq 5$. Если $y - 1 \,\vdots\, 167$, то $1 + \ldots + y^{p-1} \equiv$ $\equiv p \pmod{167}$, следовательно, $y - 1 \geq 167^x$, $y^p > y^2 >$ $> 10000^x \geq 2004^x + 1$, следовательно, $y - 1 = 4^x \cdot 3^\alpha$. Далее, поскольку $y - 1 \,\vdots\, 3$, из $(y-1)^2 - (y^2 + y + 1) =$ $= -3y$ следует, что $y^2 + y + 1$ делится на 3 и не делится на 9.

Пусть $p = 3$. Тогда $y - 1 = 4^x \cdot 3^{x-1}$, $y^2 + y + 1 = 3 \cdot 167^x$; $3(y-1) = 12^x$, $9(y-1)^2 > y^2 + y + 1$, т.е. $144^x >$ $> 3 \cdot 167^x$. (Вот еще одно доказательство – основанное не на оценках с помощью неравенств, а на сравнениях по модулю. При $x \geq 4$ левая часть равенства

$$\left(4^x \cdot 3^{x-1} + 1\right)^2 + 4^x \cdot 3^{x-1} + 2 = 3 \cdot 167^x$$

имеет вид $27m + 3$. Но $167^x = (9k - 4)^x = 9l \pm 4$ либо $9l \pm 2$ (так как x не делится на 3), следовательно, $3 \cdot 167^x \neq 27m + 3$.)

Пусть $p > 3$. Тогда $y - 1 = 12^x$, $y > 12^x$, $y^p > \left(10^5\right)^x \geq$ $\geq 2004^x + 1$.

б) $p \neq 2$, поскольку $y^2 + 1$ не делится ни на 3, ни на 4. Далее – подобно а).

Заметим еще, что ни число вида $y^2 + y + 1$, ни число вида $y^4 + \ldots + 1$, где $y \in \mathbf{Z}$, не может делиться на 167. Всякий простой делитель числа $y^2 + y + 1$, отличный от 3, имеет вид $6n + 1$, а всякий простой делитель числа $y^4 + \ldots + 1$, отличный от 5, – вид $10n + 1$, где $n \in \mathbf{N}$. Это доказано в статье В.Сендерова и А.Спивака «Малая теорема Ферма» («Квант» №3 за 2000 г.).

А.Васильев, В.Сендеров

М1920. *Существуют ли такие действительные x, что числа $\operatorname{ctg} x$ и $\operatorname{ctg} 2004x$ оба целые?*

Докажем, что таких x не существует.

Лемма 1. *Пусть $\operatorname{ctg} x$ рационален, n – натуральное число. Тогда либо $nx = \pi k$, где k – целое число, либо $\operatorname{ctg} nx$ рационален.*

Доказательство. При $x = \frac{\pi}{2} l$, где l – целое, утверждение очевидно. Пусть $x \neq \frac{\pi}{2} l$. Заметим, что в этом случае $\operatorname{ctg} 2x$ определен, и, кроме того, для любого натурального n определено хотя бы одно из чисел $\operatorname{ctg} nx$ и $\operatorname{ctg}(n+1)x$. В самом деле, в противном случае число $x = (n+1)x - nx$ было бы кратно π, и $\operatorname{ctg} x$ не был бы определен. Далее, обозначив $a = \operatorname{ctg} x$, видим, что число $\operatorname{ctg} 2x = \frac{a^2-1}{2a}$ рационально.

Докажем теперь лемму по индукции. База: $n = 1, 2$. Индукционный переход. Пусть $n \geq 3$ и для всех $k < n$ утверждение справедливо. Значит, либо $\operatorname{ctg}(n-2)x$, либо $\operatorname{ctg}(n-1)x$ – рациональное число. Если $\operatorname{ctg} nx$ определен, то в первом случае подставим в равенство

$$\operatorname{ctg}(y+z) = \frac{\operatorname{ctg} y \operatorname{ctg} z - 1}{\operatorname{ctg} y + \operatorname{ctg} z}$$

числа $y = (n-2)x$, $z = 2x$, во втором случае – числа $y = (n-1)x$, $z = x$. В обоих случаях получим справа рациональное число. Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть $\operatorname{ctg} x$ – рациональное число, $\operatorname{ctg} 2x$ – целое. Тогда $\operatorname{ctg} 2x = 0$.*

Доказательство. Обозначив $r = \operatorname{ctg} x$, $c = \operatorname{ctg} 2x$, получим $c = \frac{r^2-1}{2r}$, или $r = c \pm \sqrt{c^2+1}$. Отсюда легко получить, что $c^2 + 1 = d^2$, где d – целое, а значит, $c = 0$.

Теперь решим задачу. Поскольку $\operatorname{ctg} 2004x$ определен, то определены и числа $\operatorname{ctg} 1002x$ и $\operatorname{ctg} 501x$. Вследствие леммы 1, $\operatorname{ctg} 1002x$ и $\operatorname{ctg} 501x$ рациональны. Из рациональности $\operatorname{ctg} 1002x$ по лемме 2 следует, что $\operatorname{ctg} 2004x = 0$, т.е. $2004x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, k – целое. Значит, $\operatorname{ctg} 1002x = \pm 1$. Вследствие леммы 2 это противоречит рациональности $\operatorname{ctg} 501x$.

Замечания

1. С помощью формулы Муавра легко доказать следующие равенства:

$$\frac{\cos n\varphi}{\sin^n \varphi} = \operatorname{ctg}^n \varphi - C_n^2 \operatorname{ctg}^{n-2} \varphi + C_n^4 \operatorname{ctg}^{n-4} \varphi - \ldots + A,$$

где

$$A = (-1)^{\frac{n}{2}} \text{ при } n \text{ четном,}$$

$$A = (-1)^{\frac{n+3}{2}} n \operatorname{ctg} \varphi \text{ при } n \text{ нечетном,}$$

$$\frac{\sin n\varphi}{\sin^n \varphi} = C_n^1 \operatorname{ctg}^{n-1} \varphi - C_n^3 \operatorname{ctg}^{n-3} \varphi + C_n^5 \operatorname{ctg}^{n-5} \varphi - \ldots + B,$$

где

$$B = (-1)^{\frac{n+2}{2}} n \operatorname{ctg} \varphi \text{ при } n \text{ четном,}$$

$$B = (-1)^{\frac{n+3}{2}} \text{ при } n \text{ нечетном.}$$

Отсюда при $x \neq \frac{\pi k}{n}$, где $k \in \mathbf{Z}$, легко выразить $\operatorname{ctg} nx$ через $\operatorname{ctg} x$.

2. Справедлива следующая теорема.

Теорема. *Пусть $\operatorname{ctg} x \in \mathbf{Z}$, $\operatorname{ctg} nx \in \mathbf{Z}$, где $n > 1$. Тогда $\operatorname{ctg} x \in \{-1, 0, 1\}$.*

Решение задачи является, по существу, доказательством этой теоремы для случая $n = 4k$ ($k \in \mathbf{N}$). Похожими рассуждениями нетрудно доказать ее и для случая произвольного четного n, опираясь при этом на следующее важное утверждение.

Предложение. *Пусть $\cos x$ – рациональное число, отличное от $0, \pm\frac{1}{2}, \pm 1$. Тогда $x \neq \frac{k}{l}\pi$ при $k, l \in \mathbf{Z}$.*

Это предложение допускает различные доказательства, в том числе опирающееся лишь на индукцию. Вследствие равенства $\operatorname{ctg}^2 x = \frac{1+\cos 2x}{1-\cos 2x}$ из этого предложения сразу следует, что при $x = \frac{l}{m}\pi$ ($l, m \in \mathbf{Z}$), $x \neq \frac{\pi k}{6}, \frac{\pi k}{4}$ ($k \in \mathbf{Z}$) число $\operatorname{ctg}^2 x$ (а значит, и число $\operatorname{ctg} x$) иррационально.

Для случая нечетного n полученное авторами доказательство теоремы неэлементарно по средствам и довольно сложно.

3. Утверждение теоремы остается справедливым при замене в ее формулировке котангенсов тангенсами. Это можно доказать аналогично. Кроме того, в самом сложном случае (нечетного n) наши утверждения о тангенсах и котангенсах получаются друг из друга с помощью замены $y = \frac{\pi}{2} - x$.

И.Богданов, В.Сендеров

Ф1928. *Проволока изогнута в форме окружности и зафиксирована (рис.1). Вдоль нее может двигаться маленькая бусинка, на которую действуют силы только со стороны проволоки. Вдоль прямой проволоки бусинка движется равномерно, а при движении по криволинейному участку возникает сила трения скольжения с коэффициентом $\mu = 0{,}05$. В начальный момент бусинка находилась в точке A и имела скорость $v_0 = 1$ м/с. Найдите, какой будет скорость бусинки, когда она в первый раз снова окажется в исходной точке A.*

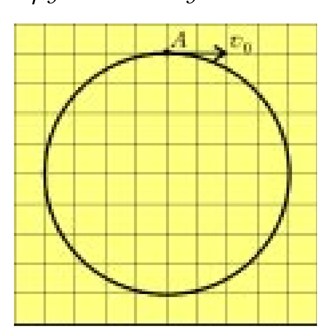


Рис. 1

Пусть теперь проволока имеет форму плоской замк-

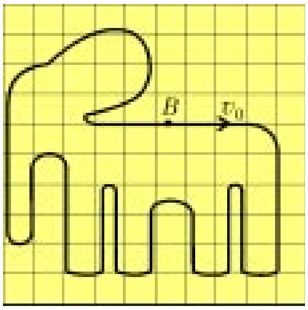


Рис. 2

нутой кривой (рис.2). Найдите в этом случае скорость бусинки, когда она в первый раз снова окажется в исходной точке B.

Запишем второй закон Ньютона для торможения бусинки на малом участке проволоки с радиусом кривизны R:

$$m\frac{dv}{dt} = -\mu m\frac{v^2}{R}.$$

Пусть φ – угловой путь бусинки, тогда его малое приращение составляет

$$d\varphi = |\omega|\,dt = \frac{v}{R}dt,$$

где ω – угловая скорость бусинки. Отметим, что знак модуля соответствует определению углового пути (а не перемещения). Исключая R из приведенных уравнений, получим

$$\frac{dv}{v} = -\mu d\varphi,$$

откуда

$$v = v_0 e^{-\mu\varphi}.$$

При вычислении углового пути φ следует складывать все угловые отклонения вектора скорости бусинки без учета направления отклонения. По заданным рисункам находим, что вектор скорости бусинки пройдет, соответственно, угловые пути $\varphi_1 = 2\pi$ и $\varphi_2 = 13\pi$, прежде чем бусинка снова окажется в исходной точке. Отсюда находим

$$v_1 = v_0 e^{-\mu\varphi_1} = 0{,}73 \text{ м/с}, \quad v_2 = v_0 e^{-\mu\varphi_2} = 0{,}13 \text{ м/с}.$$

А.Чудновский

Ф1929. *На горизонтально расположенный отрезок практически нерастяжимой нити длиной L нанизаны N одинаковых бусинок, которые могут скользить по нему без трения, упруго ударяясь друг о друга и о места закрепления концов нити. Полная кинетическая энергия бусинок равна E. Найдите силу натяжения нити. Концы нити прикреплены к двум упругим массивным телам, взаимодействия этих тел друг с другом и с другими телами пренебрежимо мало. Сила тяжести отсутствует.*

При лобовом ударе одинаковых упругих шаров они обмениваются скоростями. Поэтому можно считать, что бусинки просто «проскакивают» друг сквозь друга, как будто каждая бусинка летает от одного конца нити до другого, не меняя скорости, а других бусинок нет вовсе. Если бусинка имеет скорость v, она при ударе о массивное тело передает ему импульс $2mv$. За большой интервал времени T выбранная бусинка пролетит расстояние vT, произведя $vT/(2L)$ ударов об одно массивное тело. Таким образом, массивное тело за время T получит от одной бусинки импульс

$$2mv\frac{vT}{2L} = mv^2\frac{T}{L}.$$

Суммируя импульсы, передаваемые всеми бусинками, и разделив на длительность интервала времени, найдем силу, действующую на массивное тело:

$$F = \frac{\sum m_i v_i^2 \cdot T/L}{T} = \frac{2E}{L}.$$

С такой по величине силой и будет натянута нить.
В ответ не попала масса бусинки и число бусинок – важна только их полная кинетическая энергия.

З.Рафаилов

Ф1930. *Вырезанный из листа фанеры прямоугольный треугольник с меньшим острым углом α расположен на горизонтальной поверхности (рис.1). Чтобы повернуть треугольник относительно закрепленной вертикальной оси, проходящей через вершину A, к треугольнику необходимо приложить минимальную горизонтальную силу F_A, а чтобы повернуть его относительно закрепленной вертикальной оси, проходящей через вершину B, потребуется минимальная горизонтальная сила F_B. Какую минимальную горизонтальную силу необходимо приложить к треугольнику, чтобы повернуть его относительно закрепленной вертикальной оси, проходящей через вершину прямого угла C? Считайте, что треугольник прижимается к горизонтальной поверхности равномерно по всей площади.*

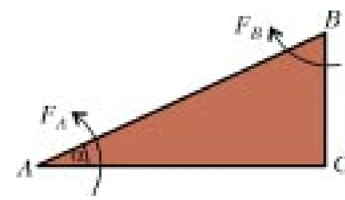


Рис. 1

Очевидно, что между треугольником и поверхностью есть трение, поскольку в противном случае для поворота треугольника требовалась бы бесконечно малая горизонтальная сила. Треугольник можно повернуть вокруг вертикальной оси, проходящей через вершину A, если момент поворачивающей силы будет больше, чем момент силы трения относительно этой оси. При этом поворачивающая сила будет минимальной, если она имеет максимальное плечо, т.е. приложена к вершине другого острого угла и направлена перпендикулярно гипотенузе (рис.2). Поэтому для минимальной горизонтальной силы, которая может повернуть треугольник вокруг вершины A, справедливо соотношение

$$F_A l = M_{\text{тр}\,A},$$

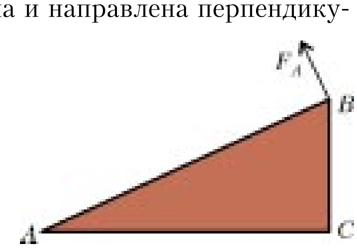


Рис. 2

где l – длина гипотенузы, $M_{\text{тр}\,A}$ – действующий на треугольник ABC момент силы трения относительно оси, проходящей через вершину A. Аналогичные соотношения можно написать для силы F_B:

$$F_B l = M_{\text{тр}\,B}$$

и для искомой силы F_C:

$$F_C l\cos\alpha = M_{\text{тр}\,C}$$

(в последнем равенстве использовано то обстоятельство, что плечо силы F_C должно равняться длине катета AC). Так как силы F_A и F_B даны в условии, то моменты $M_{\text{тр}\,A}$ и $M_{\text{тр}\,B}$ нам известны, и, следовательно, для нахождения силы F_C необходимо связать момент силы трения относительно вершины C с моментами сил трения относительно вершин A и B.

Эту связь в принципе можно установить «честно», вычисляя моменты сил трения. Для этого необходимо разбить треугольник на малые элементы и просуммировать моменты сил трения, которые действуют на каждый элемент. При этом, поскольку сила трения, действующая на каждый элемент массой Δm и равная $\mu\Delta mg$, направлена по касательной к окружности, по которой этот элемент поворачивается, то силы трения, действующие на разные элементы треугольника, имеют разные направления, и суммарный момент сил трения не сводится к произведению $\mu mgl_{\text{цт}}$, где $l_{\text{цт}}$ – расстояние от оси вращения до центра тяжести. Таким образом, вычисление моментов сил трения представляет собой достаточно сложную математическую задачу.

Попробуем связать моменты сил трения относительно разных осей, используя соображения подобия. Так как момент силы трения пропорционален силе трения и ее плечу, а сила трения пропорциональна массе (и, следовательно, площади) треугольника, то момент силы трения пропорционален кубу линейного размера треугольника, например – кубу длины гипотенузы:

$$M = Kl^3,$$

где коэффициент пропорциональности K зависит от коэффициента трения, толщины и плотности материала треугольника, а также от угла при той вершине, относительно которой вычисляется момент. Используя две первые формулы, можно записать

$$K(\alpha) = \frac{F_A}{l^2}, \quad K\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{F_B}{l^2},$$

где $K(\alpha)$ и $K(\pi/2 - \alpha)$ – коэффициенты пропорциональности для моментов сил трения относительно осей, проходящих через вершины A и B.

Найдем теперь момент силы трения относительно вершины C. Для этого опустим перпендикуляр CD из вершины C на гипотенузу (рис.3). Этот перпендикуляр делит треугольник ABC на два прямоугольных треугольника ADC и BDC. Поэтому действующий на треугольник ABC момент силы трения относительно вершины прямого угла складывается из моментов сил трения, действующих на треугольники ADC и BDC, относительно вершины C:

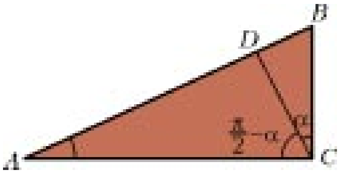


Рис. 3

$$M_C = M_{1C} + M_{2C}.$$

Так как треугольник ADC подобен треугольнику ABC и $\angle ACD = \pi/2 - \alpha$, то действующий на треугольник ADC момент силы трения относительно вершины C можно записать в виде

$$M_{1C} = K(\pi/2 - \alpha) \cdot AC^3 = K(\pi/2 - \alpha) l^3 \cos^3\alpha.$$

Аналогично найдем действующий на треугольник BDC момент силы трения относительно вершины C:

$$M_{2C} = K(\alpha) \cdot BC^3 = K(\alpha) l^3 \sin^3\alpha.$$

Таким образом, момент силы трения относительно вершины C равен

$$M_C = F_A l \sin^3\alpha + F_B l \cos^3\alpha.$$

Теперь можно найти силу F_C:

$$F_C l \cos\alpha = F_A l \sin^3\alpha + F_B l \cos^3\alpha,$$

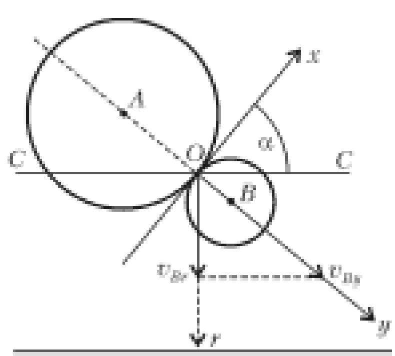
или

$$F_C = F_A \sin^2\alpha \operatorname{tg}\alpha + F_B \cos^2\alpha.$$

С.Муравьев

Ф1931. *Атомы сорта A летят вдоль оси CC цилиндрического канала радиусом R и сталкиваются с практически неподвижными атомами сорта B. Кинетическая энергия атомов A равна пороговой, так что при центральном ударе образуется молекула AB, которая далее движется со скоростью v. При нецентральном ударе реакция не идет, т.е. атомы сталкиваются упруго. За какое минимальное время после столкновения атомы сорта B смогут от оси цилиндра попасть на стенку канала?*

Рассмотрим нецентральный удар атомов (см. рисунок). Проведем через центры атомов A и B ось Oy, а перпендикулярно ей через точку касания атомов – ось Ox. Пусть α – угол между осями CC и Ox. В системе координат Oxy проекция импульса атома A на ось Ox после столкновения не изменится, поэтому достаточно рассмотреть центральный удар атома A, движущегося вдоль оси Oy, с неподвижным атомом B.



Центр масс сталкивающихся атомов движется вдоль оси Oy со скоростью $v_y = v\sin\alpha$. В системе центра масс атом B до столкновения перемещается против оси Oy со скоростью $-v\sin\alpha$, а после столкновения движется со скоростью $v\sin\alpha$. Вернемся в систему отсчета Oxy. В ней атом B имеет скорость $v_{By} = 2v\sin\alpha$. Проекция этой скорости на радиальное направление Or равна

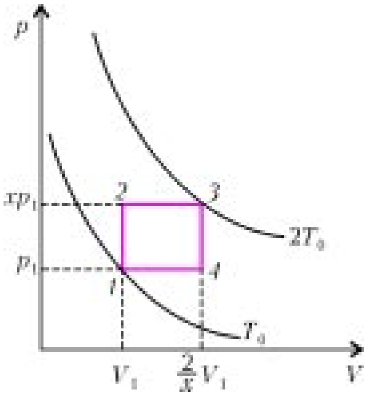
$$v_{Br} = v_{By}\cos\alpha = 2v\sin\alpha\cos\alpha = v\sin 2\alpha.$$

Понятно, что максимальное значение этой проекции равно v. Следовательно, искомое время составляет

$$t = \frac{R}{v}.$$

В.Слободянин

Ф1932. *Термодинамический цикл, состоящий из двух изобар и двух изохор, проводят с порцией гелия.*



Каким может быть максимальное значение КПД этого цикла, если максимальная температура в цикле составляет $2T_0$, а минимальная равна T_0?

Выберем произвольную точку на изотерме T_0 и обозначим давление и объем газа в этой точке p_1 и V_1 соответственно (см. рисунок). Пусть максимальное значение давления в цикле составит xp_1. (Ясно, что $1 \le x \le 2$.) Тогда максимальный объем будет равен $\frac{2}{x}V_1$. Рассчитаем работу газа в этом цикле:

$$A = \left(xp_1 - p_1\right)\left(\frac{2}{x}V_1 - V_1\right)$$

и получаемое количество теплоты (гелий – одноатомный газ):

$$Q = A_{13} + \Delta U_{13} = xp_1\left(\frac{2}{x}V_1 - V_1\right) + \frac{3}{2}\nu R\left(2T_0 - T_0\right).$$

Учтем еще, что

$$p_1V_1 = \nu RT_0.$$

Тогда КПД цикла будет равен

$$\eta = \frac{A}{Q} = \frac{(x-1)\left(\frac{2}{x}-1\right)}{x\left(\frac{2}{x}-1\right)+\frac{3}{2}}.$$

Мы видим, что значение КПД не зависит от выбора начальной точки цикла, а зависит только от отношения $x = \frac{p_{\max}}{p_{\min}}$. Поэтому нам достаточно исследовать функцию $\eta(x)$ на максимум.

Возьмем производную от этой функции по x и приравняем ее нулю. После простых преобразований получим уравнение

$$x^2 + 8x - 14 = 0.$$

Подходящее решение этого уравнения: $x = \sqrt{30} - 4$. Понятно, что при $x \approx 1$ и при $x \approx 2$ КПД будет очень мал. Значит, мы нашли именно максимум. При указанном значении x КПД примерно равен $\frac{1}{12}$.

Разумеется, при анализе функции $\eta(x)$ на максимум можно обойтись и без производной. Попробуйте сделать это самостоятельно.

А.Циклов

Ф1933. *Дирижабль завис над гористой местностью. Из-за естественной ионизации у воздуха имеется некоторая проводимость. В результате электрический заряд дирижабля уменьшается в два раза за каждые $\tau = 10$ мин. Найдите удельное сопротивление воздуха.*

Заряд дирижабля зависит от времени следующим образом:

$$q = q_0 \cdot 2^{-t/\tau},$$

где q_0 – начальный заряд. Дирижабль разряжается током

$$I = -\frac{dq}{dt} = \frac{\ln 2}{\tau}q.$$

Можно показать, что в произвольной точке проводящей среды справедлива следующая связь между плотностью тока j, напряженностью электрического поля E и удельным сопротивлением среды ρ:

$$j = \frac{E}{\rho}.$$

Действительно, возьмем маленький цилиндр длиной L и площадью основания S, расположенный вдоль силовой линии поля. Напряжение между торцами цилиндра $U = EL$, его сопротивление $R = \rho L/S$. Поэтому

$$j = \frac{I}{S} = \frac{U}{RS} = \frac{EL}{(\rho L/S)S} = \frac{E}{\rho}.$$

Окружим мысленно дирижабль замкнутой поверхностью, расположенной вблизи дирижабля. Через малый элемент ΔS_k этой поверхности идет ток

$$\Delta I_k = j_k\Delta S_k = \frac{E_k}{\rho}\Delta S_k,$$

где E_k – напряженность электрического поля, перпендикулярная этому элементу. Суммирование по всем элементам дает

$$\sum \Delta I_k = \frac{1}{\rho}\sum E_k\Delta S_k.$$

Поскольку $\sum \Delta I_k = I$, а по теореме Гаусса $\sum E\Delta S_k = \frac{q}{\varepsilon_0}$, то

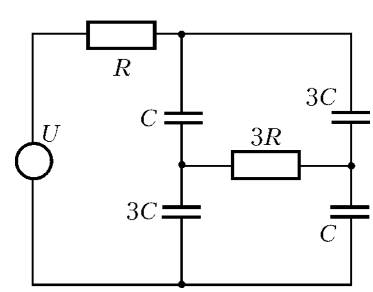
$$I = \frac{q}{\varepsilon_0\rho}.$$

Сравнив это выражение с полученным ранее выражением для I, найдем искомое удельное сопротивление:

$$\rho = \frac{\tau}{\varepsilon_0 \ln 2} \approx 10^{14}\ \text{Ом}\cdot\text{м}.$$

А.Чудновский

Ф1934. *В схеме на рисунке емкости конденсаторов равны $C = 10$ мкФ и $3C$, сопротивления резисторов равны $R = 1$ кОм и $3R$. Напряжение источника U равномерно увеличивается от нуля до $U_0 = 100$ В за время $\tau = 1$ ч. Найдите количество теплоты, выделившееся за это время в каждом из резисторов.*



Напряжение источника возрастает очень медленно – настолько медленно, что токи через резисторы получаются очень малыми; малыми будут и напряжения между выводами каждого из резисторов. Иными словами, напряжения конденсаторов успевают выравниваться (характерное время перераспределения зарядов в цепи, состоящей из резистора сопротивлением R и конденсатора емкостью C, составляет приблизительно несколько раз по произведению $RC = 10^3 \cdot 10^{-5}$ с $= 0{,}01$ с), а ток через резистор сопротивлением R получается таким же, как если бы оба резистора оказались замкнутыми (т.е. их сопротивления для расчетов токов в цепи можно считать нулевыми). Заряды конденсаторов увеличиваются со временем по линейному закону; значит, токи получаются постоянными. Ток через источник, а значит, и через резистор сопротивлением R, можно определить так:

$$I = \frac{2CU_0}{\tau} = \frac{2 \cdot 10^{-5} \cdot 100}{3600}\text{ А} = \frac{5}{9}\text{ мкА}.$$

Легко видеть, что при перераспределении зарядов конденсаторов емкостями C и $3C$ ток через резистор сопротивлением $3R$ равен половине тока I (ток источника разветвляется между этими конденсаторами в отношении 1:3 – конденсаторы соединены параллельно, так как резисторы мы заменили перемычками и ток через «нижний» конденсатор емкостью C такой же, как и через «верхний» аналогичный конденсатор). Теперь можно найти количество теплоты, выделившееся в резисторе сопротивлением R:

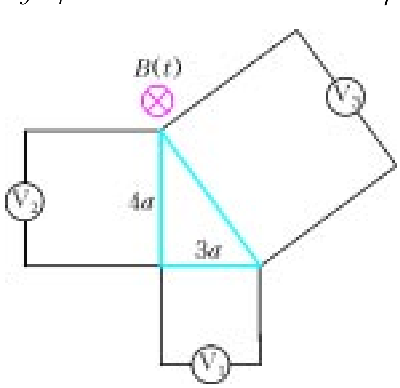
$$Q_1 = I^2 R\tau = \frac{10}{9}\text{ мкДж}.$$

Мощность в резисторе сопротивлением $3R$ составляет 0,75 от мощности в резисторе сопротивлением R, поэтому в нем выделится количество теплоты

$$Q_2 = (0{,}5I)^2 \cdot 3R\tau = \frac{3}{4} I^2 R\tau = \frac{5}{6}\text{ мкДж}.$$

Р.Александров

Ф1935. *Из одного куска нихромовой проволоки спаяли прямоугольный треугольник с катетами 3а и 4а. К трем сторонам этого треугольника подсоединили небольшие по размерам вольтметры так, что соединительные провода и стороны треугольника образуют квадраты (см. рисунок). Вся конструкция находится в одной плоскости, перпендикулярно которой направлено однородное магнитное поле. Индукция поля изменятся со скоростью $\Delta B/\Delta t = k > 0$. Сопротивления вольтметров намного больше сопротивлений сторон треугольника. Найдите показания вольтметров.*



ЭДС индукции в проволочном треугольном контуре «направлена» против часовой стрелки и равна $\mathcal{E} = 6ka^2$. Пусть сопротивления сторон треугольника равны $3R$, $4R$ и $5R$. Тогда ток в треугольнике равен

$$I = \frac{\mathcal{E}}{3R + 4R + 5R} = \frac{ka^2}{2R}$$

и направлен против часовой стрелки. Токи через вольтметры намного меньше I. ЭДС индукции в контуре в виде квадрата со стороной $3a$ равна $\mathcal{E}_1 = 9ka^2$ и «направлена» против часовой стрелки. По второму правилу Кирхгофа для этого контура,

$$\mathcal{E}_1 = U_1 - 3RI.$$

С учетом выражений для $\mathcal{E}_1$ и I находим показания вольтметра V_1:

$$U_1 = \mathcal{E}_1 + 3RI = \frac{21}{2} ka^2.$$

Аналогично находим показания вольтметров V_2 и V_3:

$$U_2 = 18ka^2, \; U_3 = \frac{55}{2} ka^2.$$

В.Чивилёв

Ф1936. *В цепи на рисунке 1 катушки индуктивности одинаковы, и их можно считать идеальными. Сопротивления вольтметров одинаковы, и их можно считать чисто активными («омическими»). Амплитуда гармонического напряжения источника составляет U_0, а частоту этого напряжения можно менять в широких пределах. Какими могут быть максимальные показания каждого из вольтметров? Что при этом будет показывать другой вольтметр?*

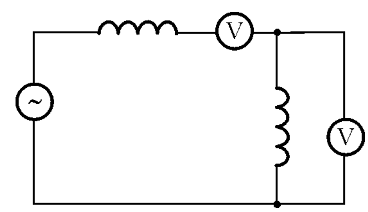


Рис. 1

Построим векторную диаграмму, начиная с вектора, изображающего напряжение U_1 правого вольтметра (рис.2). Ток через последовательную цепочку, содержащую этот вольтметр и правую катушку индуктивности, равен

$$I_{общ} = \sqrt{\left(\frac{U_1}{R}\right)^2 + \left(\frac{U_1}{X_L}\right)^2}.$$

Обозначив α угол между векторами, изображающими напряжения U_1 и U_2 соответствующих вольтметров, найдем сумму трех векторов:

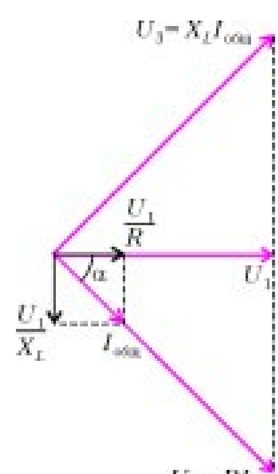


Рис. 2

$$U_0^2 = U_{общ}^2 = (3U_1)^2 + (U_2 \sin\alpha - U_3 \cos\alpha)^2.$$

Отсюда

$$U_1 = \frac{U_0}{\sqrt{9 + \left(\frac{1}{\cos\alpha} - \frac{1}{\sin\alpha}\right)^2}}.$$

Максимальное значение U_1 получится в случае, когда минимален знаменатель. Это будет, когда выражение в скобках обратится в ноль:

$$\frac{1}{\cos\alpha} = \frac{1}{\sin\alpha}, \ \alpha = 45°, \ U_{1\max} = \frac{U_0}{3}.$$

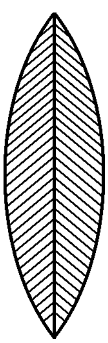
В этом случае верхний вольтметр покажет

$$U_2 = U_1\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{3}U_0.$$

Максимальное показание верхнего вольтметра получается на очень низких частотах и составляет U_0. Показание нижнего вольтметра при этом близко к нулю.

А.Зильберман

Ф1937. *Оптическая система, состоящая из двух тонких двояковыпуклых линз с одинаковыми радиусами кривизны поверхностей, изменяет диаметр падающего на систему пучка параллельных лучей в γ раз, оставляя пучок параллельным после прохождения системы. Если переместить линзы из воздуха в глицерин, то обе линзы останутся собирающими, но их фокусные расстояния увеличатся в α и β раз. Каждая из линз составлена из двух одинаковых плосковыпуклых линз. Их разняли и половинки разных линз соединили вместе (см. рисунок). Во сколько раз увеличится фокусное расстояние такой композитной линзы, если ее переместить из воздуха в глицерин?*



Пусть D_1 и D_2 – оптические силы двух исходных линз, D – оптическая сила композитной линзы. Фокусные расстояния линз связаны с их оптическими силами обратно пропорциональной зависимостью:

$$F_1 = \frac{1}{D_1}, \ F_2 = \frac{1}{D_2}, \ F = \frac{1}{D}.$$

Из условий $F_1' = \alpha F_1$ и $F_2' = \beta F_1$ выразим оптические силы линз в жидкости:

$$D_1' = \frac{D_1}{\alpha}, \ D_2' = \frac{D_2}{\beta}.$$

Диаметр проходящего через оптическую систему из двух линз пучка параллельных лучей изменится в γ раз, если линзы имеют общую точку фокуса (телескопическая система) и их оптические силы отличаются в γ раз. Поэтому запишем

$$\frac{D_1}{D_2} = \gamma \text{ или } \frac{D_2}{D_1} = \gamma.$$

У линзы с меньшей оптической силой при помещении в оптически более плотную среду оптическая сила изменяется в большее число раз, поэтому из условия $\beta > \alpha$ следует $D_2 < D_1$, т.е.

$$\frac{D_1}{D_2} = \gamma > 1.$$

Если линзы приложены одна к другой, то их оптические силы складываются. В качестве линз можно рассматривать половинки исходных линз, следовательно,

$$D = \frac{D_1 + D_2}{2}, \ D' = \frac{D_1' + D_2'}{2}.$$

Подставляя выражения для D_1' и D_2' и используя соотношение между D_1 и D_2, находим

$$\frac{F'}{F} = \frac{D}{D'} = \frac{D_1 + D_2}{D_1' + D_2'} = \frac{\alpha\beta(\gamma+1)}{\alpha + \beta\gamma}.$$

А.Чудновский

Новый прием на заочное отделение Малого мехмата

Более 25 лет при механико-математическом факультете Московского государственного университета им. М.В.Ломоносова работает Малый механико-математический факультет (МММФ). За годы своего существования заочное отделение Малого мехмата выпустило свыше 10000 учащихся, многие из которых стали студентами мехмата и других факультетов МГУ.

Основные задачи Малого мехмата – приобщение школьников к математике, углубление их знаний в рамках школьной программы и расширение математического кругозора..

В 2005 году *заочное отделение* Малого мехмата объявляет прием учащихся в 8 и 9 классы на 2005/06 учебный год. На заочное отделение принимаются учащиеся из России (в том числе и проживающие в Москве), стран СНГ и Прибалтики.

Существует возможность обучения нескольких учеников из одной школы по форме «Коллективный ученик». Группа работает под руководством преподавателя и может включать в себя не более 15 учащихся. Как правило, материалы методических разработок изучаются такими группами во время факультативных (кружковых) занятий. Группа «Коллективный ученик» обучается как один учащийся, т.е. оформляет по каждому заданию *одну* работу и оплачивает обучение всей группы как обучение *одного* учащегося.

Зачисление в 8 и 9 классы (как для индивидуальных, так и для коллективных учеников) производится на конкурсной основе *по результатам выполнения приведенной ниже вступительной работы*.

Обучение на заочном отделении платное. Информация об условиях оплаты будет выслана учащимся, зачисленным на заочное отделение, осенью 2005 года, после проверки вступительных работ. Сейчас стоимость проверки одного задания составляет (в зависимости от класса) 100–120 руб., однако в 2005/06 учебном году она может быть немного повышена (за год учащийся выполняет 6–8 заданий). Школьники, успешно закончившие обучение на заочном отделении, получают свидетельства об окончании Малого мехмата.

Желающие поступить на заочное отделение Малого мехмата (как в 8, так и в 9 класс) должны *не позднее 30 мая 2005 года* (для групп «Коллективный ученик – *не позднее 20 сентября 2005 года*) выслать в наш адрес *простым письмом* решения задач вступительной работы (при этом не обязательно должны быть решены все задачи). Вступительную работу необходимо выполнить в *школьной тетради в клетку*. Записывать решения в тетрадь следует в том порядке, в котором задачи идут во вступительной работе. На обложку тетради наклейте лист бумаги со следующими данными:

(Продолжение см. на с. 34)