

12. Во сколько раз увеличилась кинетическая энергия электрона в атоме водорода при переходе из одного стационарного состояния в другое, если угловая скорость вращения по орбите увеличилась в 27 раз?

Вариант 2

1. Камень, брошенный под углом к горизонту, достиг наибольшей высоты 5 м. Найдите полное время полета камня.

2. К невесомой нити длиной 1 м прикреплен шарик массой 200 г, который равномерно вращается в вертикальной плоскости. При какой минимальной угловой скорости вращения произойдет обрыв нити, если она выдерживает максимальную нагрузку 3,8 Н?

3. Из орудия массой 2 т вылетает в горизонтальном направлении снаряд массой 20 кг со скоростью 250 м/с. Какую скорость (по абсолютной величине) получит орудие при отдаче? Ответ дайте в см/с.

4. Два человека несут металлическую трубу, положив ее себе на плечи. Первый человек поддерживает трубу на расстоянии 1,5 м от ее конца, второй держит противоположный конец трубы. Во сколько раз нагрузка на первого человека больше, чем на второго, если длина трубы 3,5 м?

5. При какой температуре (в кельвинах) находился газ, если при его нагревании до 177 °С средняя квадратичная скорость его молекул увеличилась в 1,5 раза?

6. Два конденсатора, емкости которых 1 мкФ и 4 мкФ, соединены последовательно и подключены к источнику тока с ЭДС 75 В. Найдите разность потенциалов на обкладках конденсатора с меньшей емкостью.

7. Медная проволока обладает электрическим сопротивлением 10 Ом. Каким электрическим сопротивлением обладает медная проволока, у которой в 6 раз больше длина и в 4 раза больше площадь поперечного сечения?

8. Рассеивающая линза с фокусным расстоянием 5 см дает уменьшенное в 5 раз изображение предмета. Найдите расстояние от предмета до изображения (в см).

9. В шар массой 100 г попадает пуля массой 2 г, летящая со скоростью 100 м/с по линии, проходящей через центр шара. Считая, что сила сопротивления движению пули в материале шара постоянна и равна 149 Н, найдите конечную скорость шара. Диаметр шара 5 см.

10. В теплоизолированном цилиндре под невесомым поршнем находится идеальный одноатомный газ при температуре 300 К. Вначале поршень закреплен и соединен с дном цилиндра недеформированной пружиной. После того как поршень освободили и система пришла в равновесие, температура понизилась до 270 К. На сколько процентов увеличился объем газа? Над поршнем газа нет.

11. Протон влетает со скоростью 30 км/с в пространство с электрическим и магнитным полями, линии которых совпадают по направлению, перпендикулярно к этим линиям. Определите напряженность электрического поля (в кВ/м), если индукция магнитного поля 0,4 Тл, а ускорение протона, вызванное действием этих полей, равно $2 \cdot 10^{12}$ м/с². Отношение заряда протона к его массе принять равным 10^8 Кл/кг.

12. Заряженный конденсатор емкостью 0,4 мФ подключили к катушке с индуктивностью 0,1 мГн. Через какое время (в мкс) от момента подключения энергия электрического поля конденсатора станет в первый раз равна энергии магнитного поля катушки? (Считать $\pi = 3,14$.)

*Публикацию подготовили
Б.Писаревский, А.Черноуцан*

Санкт-Петербургский государственный
политехнический университет

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

(физико-механический факультет)

1. Упростите выражение $\frac{x^3 - 8}{x^2 + 2x + 4} - \frac{x^4 - 1}{x^3 + x^2 + x + 1}$.

2. Решите уравнение $x^2 - \frac{4}{x^2} = 3$.

3. Вычислите 3^z , где $z = \log_3^2 15 - \log_9^2 25$.

4. Найдите производную функции $y = \ln \frac{x-2}{x-4}$ в точке $x = 5$.

5. Найдите знаменатель геометрической прогрессии, для которой сумма второго и третьего членов составляет 264% от ее первого члена.

6. Какое число больше: $a = \sqrt[3]{25} + \sqrt[3]{31}$ или $b = 2\sqrt[3]{3} + 2\sqrt[3]{4}$?

7. Решите уравнение $\sqrt{\sqrt{3} \sin x - \cos^2 x} = -\sqrt{5} \cos x$.

8. Вычислите $\sin(4 \arctg 2)$.

9. Решите неравенство $\sqrt{x^2 + 2x - 3} \leq x + 3$.

10. При каких целых n число $\sqrt[4]{n^2 - 88}$ является целым?

11. Найдите область определения функции $y = \arcsin \sqrt{\frac{x-1}{x-5}}$.

12. Найдите множество значений функции $y = \frac{9 \cos^2 x - 9 \sin x - 15}{3 \sin x + 2}$.

13. Найдите сумму всех двузначных чисел, которые делятся хотя бы на одно из чисел 3 или 5.

14. Какой должна быть абсцисса точки, лежащей на прямой с уравнением $y = 5x - 9$, чтобы через нее не проходила ни одна касательная к графику функции $y = \frac{x+3}{x-2}$?

15. Покажите, что число $\sin 40^\circ \cos 70^\circ + \sin^2 10^\circ$ является рациональным числом.

16. При каком значении α вектор $(1 + \alpha; 3 - \alpha)$ имеет наименьшую длину?

17. Решите систему уравнений $\begin{cases} x^2 + 2xy + 4 = 0, \\ |x + y| = 4 - y^2. \end{cases}$

18. В правильном шестиугольнике $ABCDEF$ точки M и N – середины сторон AB и CD соответственно. Найдите радиус окружности, описанной около шестиугольника, если периметр трапеции $BCNM$ равен 14.

19. Правильная треугольная пирамида $SABC$ со стороной основания $AB = 3\sqrt{7}$ вписана в шар радиуса $2\sqrt{7}$. Найдите радиус шара, описанного около пирамиды $TABC$, где T – середина бокового ребра AS пирамиды.

20. При каких a уравнение

$$(x+a)^2 - 3x - a = 3 + 3 \frac{x}{|x|}$$

имеет единственное решение?

Вариант 2

(физико-технический факультет)

1. Упростите выражение $\frac{a^3 - 1}{a^2 - a} + \frac{a^2 - 1}{a^2 + a}$.

2. Определите, сколько двузначных натуральных чисел делится на 4, но не делится на 3.

3. Найдите рациональное число, которое является значением выражения $\frac{\sqrt[4]{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt[4]{3+1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3+1}}$.

4. Сколько процентов составляет произведение корней уравнения $x^2 - 5x + 1 = 0$ от их суммы?

5. Решите уравнение $\sqrt{1-x^2} + x = -1$.

6. Решите неравенство $|x^2 - 6x + 8| \leq (x-2)^2$.

7. Решите уравнение $\cos 2x + 3 \cos x = 1$.

8. Решите уравнение $\operatorname{arctg}^2 x + \operatorname{arcctg}^2 x = \frac{5\pi^2}{36}$.

9. Найдите область определения функции

$$y = \arcsin \sqrt{\log_{1/2}(x-1)}.$$

10. Найдите множество значений функции $y = \frac{4x-1}{4x^2}$.

11. Найдите целое число, которое является значением выражения $5^{\log_3 a}$, если $a = 2^{\log_3 3}$.

12. Решите уравнение $3^{x^2-1} = 2^{x+1}$.

13. Решите неравенство $\lg(3+2x-x^2) \leq \lg(1+x)$.

14. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y^2 = 4x - 3, \\ x^2 = 4y - 3. \end{cases}$$

15. Найдите все целые значения, которые может принимать разность арифметической прогрессии, если ее элементами являются числа 1; 13; 9.

16. Сумма всех элементов с нечетными номерами бесконечно убывающей геометрической прогрессии $\{b_n\}$ равна 243, а сумма элементов с четными номерами равна 162. Найдите четвертый элемент прогрессии b_4 .

17. На гиперболе с уравнением $xy = -1$ найдите точку, ближайшую к прямой с уравнением $y = 4x + 1$.

18. Две окружности касаются внешним образом. Прямая, соединяющая их центры, и общая касательная образуют угол, синус которого равен $3/5$. Найдите отношение радиуса меньшей окружности к радиусу большей.

19. У треугольной пирамиды $SABC$ грани ABC и SAB – равносторонние треугольники с общей стороной AB фиксированной длины, а точка D – середина этой стороны. Найдите значение синуса угла SDC , при котором боковая поверхность пирамиды имеет наибольшую площадь.

20. Определите, при каких значениях параметра a уравнения $\cos x + |\cos x| = 2a$ и $\cos x = a$ равносильны.

*Публикацию подготовили А.Басов, А.Моисеев,
С.Преображенский*

Санкт-Петербургский государственный
университет

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

(математико-механический факультет)

1. Найдите все значения параметра a , при которых уравнение $\log_{x-a}(a^2 + (a+1)x - x^2) = 2$ имеет единственное решение.

2. Решите уравнение

$$\sqrt{\frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 2x}} = 1 + x.$$

3. Решите неравенство $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg}(3-2x) > \frac{\pi}{4}$.

4. К окружности проведены три различные касательные AB , BC и AC . Расстояние от точки A до прямой BC равно 1, расстояние от точки касания прямой BC с окружностью до проекции точки A на эту прямую равно $\sqrt{5}$, $BC = \frac{4\sqrt{2}}{3}$. Найдите радиус окружности.

5. В прямую треугольную призму $ABCA_1B_1C_1$ вписана сфера. Известно, что $AB = 15$, $BC = 7$, $AC = 20$. Найдите радиус сечения сферы плоскостью A_1BC .

Вариант 2

(факультет психологии)

1. В конечной арифметической прогрессии сумма положительных членов равна $\frac{3}{2}$, и их на четыре меньше, чем отрицательных членов. Первый член прогрессии равен -1 . Найдите ее последний член.

2. Решите уравнение $\sin 2x - \cos 2x = \frac{1}{2} \operatorname{tg} x - \frac{1}{2}$.

3. Решите неравенство $\log_{\frac{1}{4}} \frac{7x-12-x^2}{x^2+x-6} \geq \log_{x^2} \frac{1}{x}$.

4. Точки M и N лежат на гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC . Найдите площадь треугольника CMN , если известно, что $AM = BN = 3$, $AN = 7$, $CM = 6$.

5. Найдите все значения параметра a , при которых уравнение $4\sqrt{2a-2^x} = a^2 - 2^x$ имеет единственное решение.

Вариант 3

(филологический факультет)

1. По двум взаимно перпендикулярным дорогам в сторону перекрестка выехали два велосипедиста. Расстояние между ними в этот момент было 13 км. Затем в течение получаса расстояние между велосипедистами уменьшалось, а потом стало увеличиваться. Скорость одного из велосипедистов равна 18 км/ч. Найдите скорость другого, если известно, что в момент старта он находился на расстоянии 12 км от перекрестка.

2. Решите неравенство

$$\log_{3x} \log_{4x^2} 8x \geq 0.$$

3. Решите уравнение

$$(2 \cos x - 1) \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}} = \sin 2x.$$

4. Прямая l является внешней касательной к двум окружностям. Радиус одной из них равен 3. Расстояние между точками касания равно 6, а расстояние между центрами окружностей равно $3\sqrt{13}$. Найдите радиус окружности, касающейся прямой l и каждой из двух данных окружностей.

5. Изобразите на плоскости Oxy множество точек, координаты которых удовлетворяют равенству

$$y^2 - x + 1 = |x^2 - x + 2y|.$$

Публикацию подготовили А.Громов, Ю.Чурин