Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 1 ноября 2007 года по адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» №4–2007» и номера задач, решения которых Вы посылаете, например «М2051» или «Ф2058». В графе «От кого» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем Вашим адресом и необходимый набор марок (в этом конверте Вы получите результаты проверки решений).

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с Вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «Задачник «Кванта», новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором Вы учитесь.

Задача М2054(а) предлагалась на LXX Московской математической олимпиаде, задача М2055 – на X Кубке памяти А.Н.Колмогорова.

Задачи М2051–М2055, Ф2058–Ф2062

М2051. Пусть a, b, $c > 0$; $(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b) = abc$. Докажите, что $a = b = c$.

В.Произволов

М2052. а) Рассмотрим окружность и ее хорду AB. Найдите множество точек M, находящихся от прямой AB на расстоянии, равном длине касательной, проведенной из точки M к рассматриваемой окружности.

Докажите следующие утверждения.

б) Для любых двух парабол, описанных около одной окружности и пересекающихся в четырех точках, диагонали «параболического четырехугольника» перпендикулярны (рис.1).

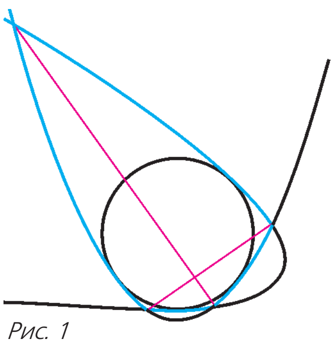


Рис. 1

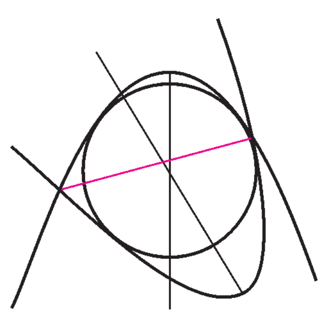


Рис. 12

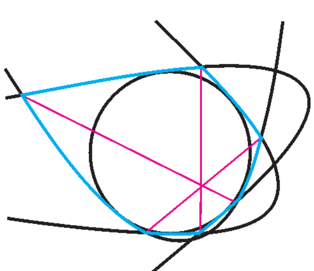


Рис. 3

в) Для любых двух парабол, описанных около одной окружности и пересекающихся в двух точках, оси парабол наклонены под одним и тем же углом к прямой, проходящей через точки пересечения этих парабол (рис.2).

г) Для любых трех парабол, описанных около одной окружности и таких, что любые две из них пересекаются в четырех точках, главные диагонали «параболического шестиугольника» пересекаются в одной точке (рис.3).

Ф.Нилов (ученик 10 класса)

М2053. Пусть $n > 3$. Докажите, что существуют целые отличные от нуля числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ такие, что

$$x_1x_2\ldots x_n = (x_2 + x_3 + \ldots + x_n)(x_1 + x_3 + \ldots + x_n) \times \ldots \\ \ldots \times (x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1}).$$

С.Токарев, В.Сендеров

М2054. Пусть $P(x) = x^2 + x + 1$. Существуют ли натуральные числа $x_1, \ldots, x_n$, $k_1, \ldots, k_n$ такие, что

$$P(x_1) = x_2^{k_2},\ P(x_2) = x_3^{k_3}, \ldots, P(x_n) = x_1^{k_1}\ ?$$

Решите задачу для случаев:

а) $n = 2$;

б) n – произвольное нечетное число;

в) $n = 4$.

В.Сендеров, Б.Френкин

М2055. Клетки бесконечной вправо клетчатой полоски последовательно занумерованы числами 0, 1, 2, … В некоторых клетках лежат камни. Если на i-й клетке ($i > 0$) лежит ровно i камней, то разрешается снять с нее и разложить по одному на клетки с номерами $i-1$, $i-2$, …, 0. Леша распределил 2006! камней по клеткам, начиная с первой, так, чтобы можно было собрать их в нуле, сделав несколько операций. Найдите минимальный номер клетки, на которой лежит камень.

Ф.Бахарев, И.Богданов

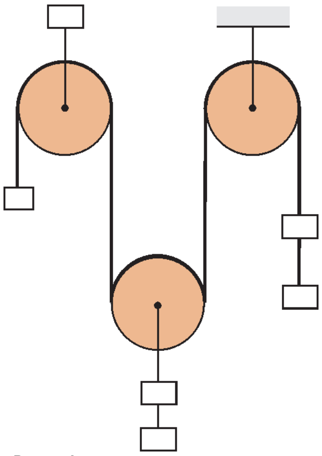


Рис. 4

Ф2058. В системе на рисунке 4 все грузы одинаковы. Вначале грузы удерживают, затем отпускают, и система приходит в движение без рывков. Найдите ускорения подвижных блоков.

А.Блоков

Ф2059. Новые настенные часы с маятником идут очень точно. Маятник представляет собой очень легкий длинный стержень, подвешенный за один из концов, к другому концу стержня прикреплен массивный диск, радиус которого в 10 раз меньше длины стержня (рис.5). Диск может свободно вращаться вокруг своей оси. Со временем, из-за трения в оси диска, он перестал поворачиваться вокруг этой оси. Будут ли часы спешить или они теперь начнут отставать? Оцените неточность хода часов за сутки.

Рис. 5

З.Рафаилов

Ф2060. Моль гелия медленно расширяется от объема 10 л до объема 10,1 л, при этом давление газа плавно уменьшается от 1 атм до 0,985 атм. Найдите теплоемкость гелия в этом процессе.

А.Простов

Ф2061. Тонкостенную непроводящую сферу радиусом R зарядили равномерно по поверхности полным зарядом Q, а затем разрезали пополам – по «экватору». Одну половину сферы убрали, а вторую оставили – для изучения. Найдите потенциал электрического поля, создаваемого зарядами полусферы в точке «экваториальной» плоскости, находящейся на расстоянии $R/2$ от центра сферы.

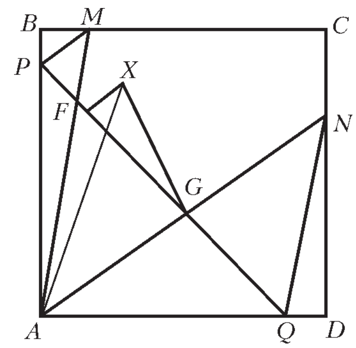
Б.Сложнов

Ф2062. На тороидальный ферромагнитный сердечник, сделанный из материала с большой магнитной проницаемостью, намотана катушка, содержащая большое количество витков. Катушку подключили к сети 220 В, ток через катушку при этом составил 10 мА (действующее значение). Вольтметр, имеющий сопротивление 10 кОм, подключают между одним из концов катушки и отводом, сделанным от середины катушки (половина витков). Какое напряжение покажет вольтметр? Какой ток теперь течет через источник?

А.Зильберман

Решения задач М2026 – М2035, Ф2043–Ф2047

М2026. *На сторонах AB, BC, CD и DA квадрата ABCD выбраны соответственно точки P, M, N, Q так, что* $\angle MAN = 45^\circ$, $PM \parallel AN$, $AM \parallel NQ$. *Отрезок PQ пересекает AM и AN в точках F и G соответственно. Докажите, что площадь треугольника AFG равна сумме площадей треугольников FMP и GNQ.*



Прежде всего отметим, что $\angle PMA = \angle MAN = \angle ANQ$, и значит, треугольники AFG, MFP и NQG подобны (см. рисунок). Поэтому утверждение задачи равносильно равенству $GF^2 = PF^2 + GQ^2$.
Далее, треугольники NQD и MPB подобны треугольникам AMB и AND соответственно, следовательно,

$$\frac{QD}{ND} = \frac{BM}{AB}, \ \frac{ND}{AD} = \frac{BP}{BM}.$$

Перемножив эти равенства, получим, что $BP = DQ$, или $AP = AQ$. Пусть X – точка, симметричная P относительно AM. Тогда $AX = AP = AQ$ и $\angle XAN = 45^\circ - \angle MAP = \angle NAD$, т.е. X также симметрична Q относительно AN. Таким образом, $XF = FP$, $XG = GQ$ и

$$\angle XFG + \angle XGF = 360^\circ - 2\angle PFM - 2\angle QGN = 90^\circ.$$

Применив к прямоугольному треугольнику XFG теорему Пифагора, получим искомое равенство.

В.Произволов

М2027. *На доске написаны три натуральных числа x, y, z. Петя записывает на листке произведение каких-нибудь двух из этих чисел, а на доске уменьшает третье число на 1. С новыми тремя числами на доске он снова проделывает ту же операцию и т.д. до тех пор, пока одно из чисел на доске не станет равным нулю. Чему будет в этот момент равна сумма чисел на листке?*

Ответ: xyz.
Первое решение. Заметим, что произведение трех чисел, записанных на доске, с каждой операцией уменьшается ровно на то число, которое Петя записывает на бумажку. Когда одно из чисел становится нулем, произведение всех чисел на доске тоже равно нулю, откуда сумма всех чисел, выписанных Петей, равна начальному произведению трех чисел на доске, т.е. xyz.
Второе решение. Рассмотрим параллелепипед со сторонами x, y, z. На каждом шаге мы отрезаем от него параллелепипед толщины 1, записывая его объем на бумажку, и продолжаем действовать так с оставшимся параллелепипедом. Процесс закончится, когда отрежем все. Значит, на бумажке будет записан объем исходного параллелепипеда, т.е. xyz.

Е.Горский, С.Дориченко

М2028. *Известно, что вруны всегда врут, правдивые всегда говорят правду, а хитрецы могут и врать, и говорить правду. Вы можете задавать вопросы, на которые есть ответ «да» или «нет» (например: «Верно ли, что этот человек – хитрец?»).*