Глава 8 Функции и графики

§ 1 Переменные и зависимости между ними

Движение является важнейшим примером процесса, в котором участвуют различные связанные между собой **переменные величины**, например, время, путь, скорость и т. д.

Переменные величины, или просто **переменные**, будут обозначаться буквами. Рассмотрим, например, движение автомобиля. Обозначим через t – время, прошедшее от начала движения, s – пройденный путь, v – его скорость. Ясно, что эти три переменные зависят друг от друга. Зависимость может быть выражена *уравнением*, т. е. равенством, связывающим значения этих величин.

При равномерном движении автомобиля, т. е. при движении с постоянной скоростью v, зависимость между переменными t и s очень простая: $s = vt$. В более сложных процессах число переменных может быть большим, и зависимости между ними могут быть сложными. Математика научилась следить одновременно за изменением большого числа переменных, однако в основе своей это умение основано на изучении зависимостей между *двумя* переменными.

Выберем две переменные, которые обозначим через x и y. Не будем заранее накладывать ограничения на то, какие числовые значения они могут принимать. Приведем примеры уравнений – зависимостей между переменными x и y.

1. $y = kx$.
2. $xy = k$, $k \neq 0$.
3. $x^2 + y^2 = R^2$, $R > 0$.
4. $ax + by + c = 0$, $a \neq 0$, $b \neq 0$.
5. $|x| + |y| = 1$.
6. $y^2 = kx$, $k \neq 0$.

Проверь себя

1. Что означает, что две величины прямо пропорциональны?
2. Как задается обратно пропорциональная зависимость?
3. Что является графиком прямо пропорциональной зависимости?
4. Какая кривая является графиком обратно пропорциональной зависимости?

Примеры и комментарии

1. Две величины x и y называются прямо пропорциональными, если их отношение постоянно, т. е. если $\frac{y}{x} = k$, где k – постоянное число, не меняющееся с изменением величин x и y. Коэффициент k называется коэффициентом пропорциональности. Соотношение прямой пропорциональности величин x и y можно записать так: $y = kx$ или $x = \frac{1}{k} y$.

2. Две величины x и y называются обратно пропорциональными, если их произведение постоянно, т. е. если $xy = k$, где k – постоянное число. Соотношение обратной пропорциональности величин x и y можно записать в виде $y = \frac{k}{x}$ или $x = \frac{k}{y}$.

3. Пусть газ находится в некотором резервуаре, объем которого V мы можем менять. Одновременно будут меняться другие переменные, связанные с состоянием газа, например, его температура T и производимое им давление p. Известен физический закон, по которому эти три переменные V, T и p связаны зависимостью $\frac{pV}{T} = k$, где k – некоторое постоянное число. Можно зафиксировать одну из переменных и изучать зависимость между двумя другими.

Так при постоянной температуре объем газа V и давление p окажутся связанными обратно пропорциональной зависимостью (закон Бойля–Мариотта), а при постоянном объеме давление будет прямо пропорционально температуре.

График зависимости

Зависимости между переменными x и y можно изобразить графически. Выберем на плоскости декартову систему координат и построим все точки $P(x; y)$, координаты которых x и y связаны данной зависимостью. Получится график зависимости. Построим графики зависимостей для приведенных нами примеров.

1. $y = 2x$

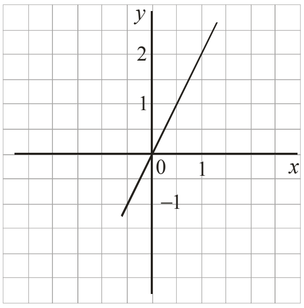


График зависимости – прямая, проходящая через начало координат с угловым коэффициентом $k = 2$.

2. $xy = 1$

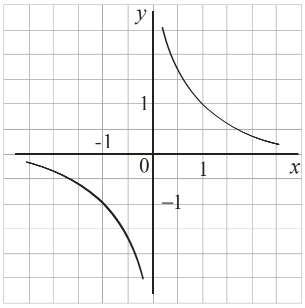


График зависимости называется равнобочной гиперболой.

3. $x^2 + y^2 = 4$

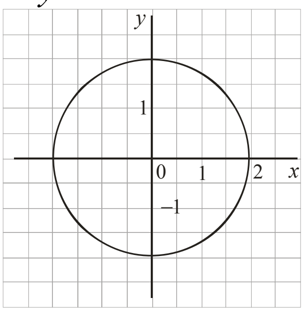


График зависимости – окружность с центром в точке 0 и радиусом $R = 2$.

4. $x + 2y - 3 = 0$

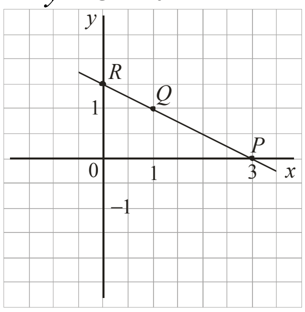


График зависимости – прямая, проходящая через точки $P(3; 0)$, $Q(1; 1)$, $R\left(0; \dfrac{3}{2}\right)$.

5. $|x| + |y| = 1$

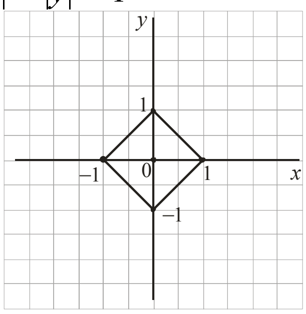


График зависимости – квадрат с вершинами в указанных точках.

6. $y^2 = 4x$

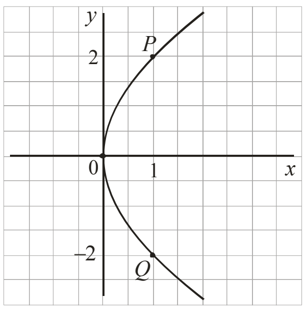


График этой зависимости называется параболой. Она проходит через точки $P(1; 2)$ и $Q(1; –2)$.

Примеры и комментарии

1. Если зависимость между переменными x и y задана уравнением, то мы строим график этой зависимости, который представляет собой некоторую кривую. В наших примерах это были прямая, окружность, гипербола, парабола, граница квадрата. Приведем еще примеры.

1) $x^2 - y^2 = 1$

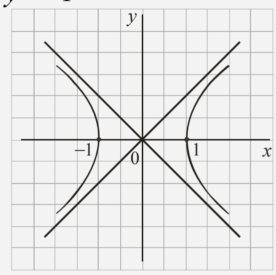


График этой зависимости является гиперболой. Его можно получить из графика зависимости $xy = \dfrac{1}{2}$ поворотом на угол 45° по часовой стрелке.

2) $y^2 = x^3$

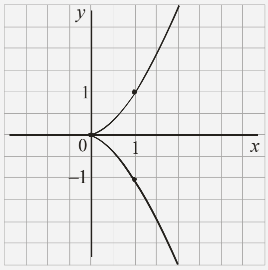


График этой зависимости называют полукубической параболой.

2. Любую кривую на координатной плоскости можно считать графиком зависимости между координатами точек этой кривой. Уравнение этой зависимости называется уравнением данной кривой.

Пример

Окружность радиуса 1 с центром в точке $P(1; 1)$ задается уравнением $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$.

§ 2 Функциональная зависимость

Примеры и комментарии

1. Задание функции формулой.

1) $y = 2x + 3$ – пример линейной функции;

2) $y = \dfrac{x-2}{x+1}$ – пример дробно-линейной функции;

3) $y = x^2 - 2x$ – пример квадратичной функции;

4) $y = \sqrt{x}$ – пример иррациональной функции.

Если функция задана формулой и нет дополнительных указаний, то ее областью определения считается множество всех чисел, для которых имеют смысл все действия в этой формуле.

Областью определения первой и третьей функций является множество всех вещественных чисел $\boldsymbol{R}$, во втором примере – множество всех чисел, кроме $x = -1$, в четвертом примере – множество неотрицательных чисел $x \geq 0$.

2. Из зависимости между двумя переменными часто можно выразить одну из них как функцию от другой.

Например, из соотношения $2x - 3y = 0$ можно y выразить как функцию от x: $3y = 2x \Leftrightarrow y = \dfrac{2}{3}x$.

Однако, если мы хотим считать независимой переменной y, то можно наоборот x выразить как функцию от y: $2x = 3y \Leftrightarrow x = \dfrac{3}{2}y$.

3. Не всегда из зависимости между двумя переменными любую из них можно выразить как функцию другой. Так, из уравнения окружности $x^2 + y^2 = 1$ мы можем выразить $y^2 = 1 - x^2$, но затем мы не можем однозначно найти y, так как, зная его квадрат, при извлечении квадратного корня из правой части мы не будем знать, какой знак взять у этого корня.

Из всех мыслимых зависимостей между переменными мы выделим *функциональные зависимости*, или **функции**. Такие зависимости описывают, как изменение одной переменной (ее называют независимой переменной, или аргументом) вызывает изменение другой, которая оказывается тем самым зависимой от первой.

Определение. Пусть даны две переменные, обозначенные буквами x и y. Переменная y называется функцией от переменной x, если задан способ, с помощью которого для каждого значения переменной x можно однозначно вычислить соответствующее значение переменной y.

Функциональную зависимость переменной y от переменной x записывают, используя букву f (первую букву латинского слова functio):

$$\boxed{y = f(x)}$$

Множество чисел D, для которых задано правило вычисления функции, называется областью определения функции.

Для того чтобы задать функцию, нужно:

1) указать правило вычисления ее значений;

2) описать ее область определения.

Правило вычисления значений функции может быть задано:

1) формулой; например, $y = x^2 + 2x$, $y = \dfrac{2x}{x-1}$;

2) словесным описанием; например, y равен наибольшему целому числу, не превосходящему x;

3) таблицей; многие экспериментально полученные зависимости имеют вид таблиц, в которых для значений аргумента указываются значения функции;

4) программой; ряд важных функций «запрограммирован» – в вычислительном устройстве (калькуляторе, компьютере) записана программа, позволяющая вычислить значение функции простым нажатием клавиши;

5) графиком; можно не только строить графики функции, но и определять, задавать функцию с помощью графика;

6) любым другим способом, позволяющим для каждого значения аргумента однозначно вычислить значение функции.

График функции

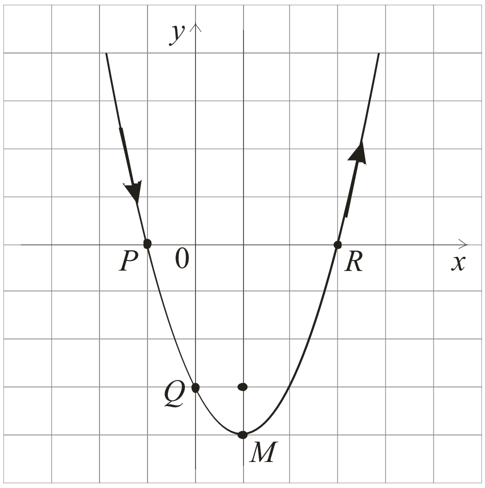
> *Определение*. Пусть дана функция $y = f(x)$ с областью определения D. Графиком функции f в системе координат xOy называется множество точек с координатами $(x; f(x))$, где x пробегает множество D.

Можно сказать, что точка P с координатами $(x; y)$ принадлежит графику функции f в том и только в том случае, когда ордината этой точки, то есть число y, равна значению функции f в точке x, то есть когда выполняется равенство $y = f(x)$. График функции – это совокупность *всех* таких точек.

Что означает выражение: *построить график функции*?

Если функция f задана на числовом промежутке D, то построить график, исходя из его определения, невозможно, так как нельзя перебрать все точки x из множества D – их бесконечно много. Однако некоторого конечного количества точек будет достаточно, чтобы наглядно представить форму графика. При этом чем больше точек мы построим, тем точнее будем представлять себе график функции.

На рисунке изображен график некоторой функции $y = f(x)$.



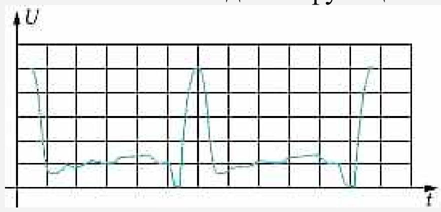
Можно указать несколько важнейших свойств этого графика, знания которых обычно достаточно, чтобы построить примерный его эскиз.

1) Точки пересечения с осями: $P(-1; 0)$, $Q(0; -3)$, $R(3; 0)$.
2) Ось симметрии $x = 1$.
3) Самая нижняя точка графика $M(1; -4)$.
4) Характер движения по графику: убывание до $x = 1$ и возрастание после этой точки.

Такого рода свойства вместе составляют **схему исследования функции**, которая позволяет приближенно построить ее график. Этой схеме будет посвящен отдельный параграф.

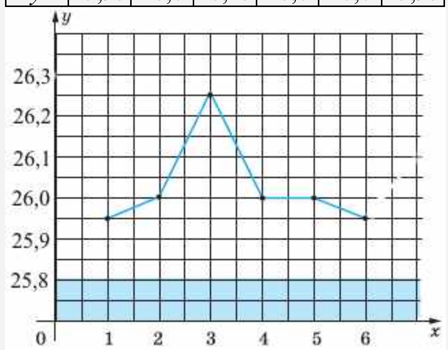
Примеры и комментарии

1. График сам по себе может служить способом задания функции.



2. Часто на практике функция задается не формулой, а таблицей значений. Например, в таблице приведены значения курса доллара в рублях за 6 первых дней месяца. Независимой переменной x является номер дня (от 1 до 6), а функцией y – число, показывающее курс доллара в день с номером x. Так мы построим функцию $y = f(x)$, заданную для *конечного* множества значений x. Графиком такой функции будет конечный набор их 6 точек. Для наглядности эти точки соединяют отрезками и ломаную считают графиком курса доллара.

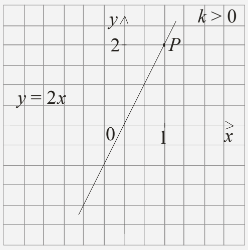
x	1	2	3	4	5	6
y	25,95	26,0	26,25	26,0	26,0	25,95

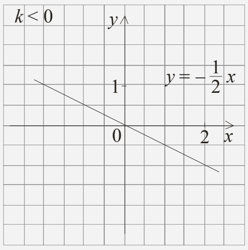


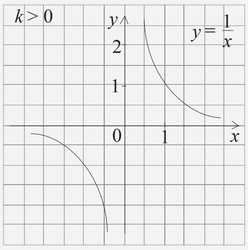
Обратите внимание, что по оси y отложены значения от 25,8 до 26,3. Разумеется, начало оси y тем самым находится не в точке O, а гораздо ниже. Аналогично и по оси x откладывают номера дня так, чтобы первый из них приходился на O (наш график сдвинут вправо на 1). Заметьте, что масштабы по осям x и y выбраны так, чтобы было удобно наносить точки.

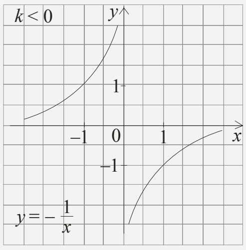
§ 3 Стандартные функции

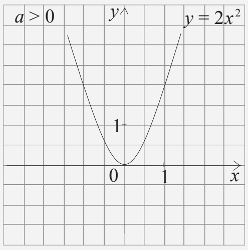
Примеры и комментарии

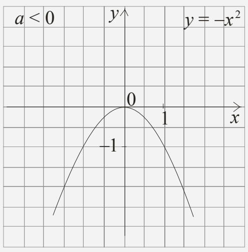
1. 



2. 



3. 



К стандартным, наиболее часто встречающимся функциям мы отнесем функции следующих трех видов: $y = kx$, $y = \dfrac{k}{x}$, $y = ax^2$. Первые две происходят от прямой и обратно пропорциональной зависимостей, третья описывает простейшую квадратичную зависимость.

1. $y = kx$, $k \neq 0$.

Функция определена при всех значениях x. Она имеет такой смысл: переменная y прямо пропорциональна переменной x с коэффициентом пропорциональности k.

Графиком функции $y = kx$ является прямая, проходящая через начало координат. Коэффициент k определит ее наклон к оси x. Часть этой прямой, находящаяся в верхней полуплоскости, составляет при $k > 0$ острый угол с положительным направлением оси абсцисс и тупой угол при $k < 0$. Для построения прямой достаточно построить еще одну точку, кроме начала координат, например, $P(1; k)$.

2. $y = \dfrac{k}{x}$, $k \neq 0$.

Функция определена при всех $x \neq 0$. Она имеет такой смысл: переменная y обратно пропорциональна переменной x с коэффициентом пропорциональности k.

Графиком функции $y = \dfrac{k}{x}$ будет кривая, называемая гиперболой. Она расположена в первой и третьей четвертях при $k > 0$ и во второй и четвертой четвертях при $k < 0$.

3. $y = ax^2$, $a \neq 0$.

Функция определена при всех значениях x. Она имеет такой смысл: переменная y квадратично зависит от переменной x, т. е. y пропорциональна квадрату переменной x с коэффициентом пропорциональности a.

Графиком функции $y = ax^2$ является кривая, называемая параболой. Она расположена в верхней полуплоскости при $a > 0$ и в нижней при $a < 0$.

Свойства стандартных функций

1. $y = kx$, $k \neq 0$

Эти функции определены на всей числовой оси. Сравним графики функций $y = 2x$ и $y = -\frac{1}{2}x$. Первая из этих функций возрастает: это означает, что *большему* значению аргумента соответствует *большее* значение функции: $x_1 < x_2 \Rightarrow 2x_1 < 2x_2$, т. е. $y_1 < y_2$.

Наоборот, вторая из них убывает, т. е. *большему* значению аргумента соответствует *меньшее* значение функции: $x_1 < x_2 \Rightarrow -\frac{1}{2}x_1 > -\frac{1}{2}x_2$, т. е. $y_1 > y_2$.

Два этих свойства функции объединяют одним термином – *монотонность*. Можно сказать, что функции $y = kx$ *монотонны* на всей числовой оси. Однако характер монотонности – возрастание или убывание – будет зависеть от знака коэффициента k: если $k > 0$, то функция $y = kx$ возрастает, если $k < 0$, то убывает.

Если мы поменяем знак у аргумента, то значение функции поменяет свой знак: $k(-x) = -kx$. Это означает, что график этой функции симметричен относительно начала координат. Для прямой, проходящей через начало координат, это, конечно, и так очевидно. В дальнейшем мы будем проверять, выполняется ли это свойство для любой функции $y = f(x)$.

Функция, для которой выполняется условие $f(-x) = -f(x)$, называется нечетной. Разумеется, что при этом функция определена одновременно как для x, так и для $-x$. Можно сказать, что функция $y = kx$ является нечетной.

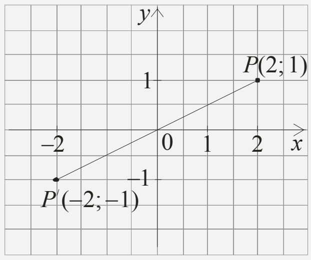
2. $y = \frac{k}{x}$, $k \neq 0$

Область определения этих функция разбивается на два промежутка: $x < 0$ и $x > 0$, т. е. $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$.

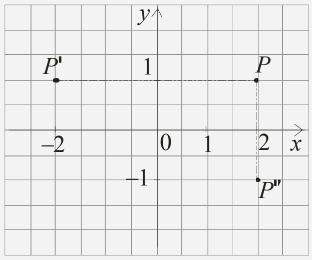
На каждом из этих промежутков эти функции монотонны. Характер монотонности зависит от знака k и наглядно виден на графике. Эти функции нечетны, так как $\frac{1}{-x} = -\frac{1}{x}$. Их графики симметричны относительно начала координат.

Примеры и комментарии

1. Точки $P(2; 1)$ и $P'(-2; -1)$ симметричны относительно начала координат.



2. Точка $P'(-2; 1)$ симметрична точке $P(2; 1)$ относительно оси ординат. Точка $P''(2; -1)$ симметрична ей относительно оси абсцисс.



3. Построим график функции $y = \frac{1}{x}$. Для построения графика полезно составить таблицу значений для нескольких значений аргумента. Приведем такую таблицу для $k = 1$.

x	0,1	0,5	1	2	10
$y = \frac{1}{x}$	10	2	1	0,5	0,1

Из таблицы видно, что у точек с близкими к нулю абсциссами ординаты быстро растут (скажем, если $x = 0{,}001$, то $y = 1000$) и наоборот (если $x = 1000$, то $y = 0{,}001$).

Строим график, плавно соединяя построенные точки, а затем строим вторую часть графика, симметричную первой относительно начала координат. График функции $y = \frac{k}{x}$ при $k < 0$ симметричен графику функции $y = \frac{-k}{x}$ относительно оси ординат.

§ 4 Линейная функция

Определение. *Линейной* функцией называется функция, значения которой могут быть вычислены по формуле $y = kx + b$.

Область определения. Линейная функция, заданная формулой $y = kx + b$, имеет областью определения множество $\boldsymbol{R}$ всех действительных чисел.

Обращение в нуль. Линейная функция при $k \neq 0$ имеет единственный нуль: $x = -\dfrac{b}{k}$.

Промежутки постоянного знака. Линейная функция $y = kx + b$, $k \neq 0$ сохраняет постоянный знак на каждом из промежутков $\left(-\infty; -\dfrac{b}{k}\right)$ и $\left(-\dfrac{b}{k}; +\infty\right)$. Этот знак зависит от коэффициента k. Возможные случаи сведены в таблицу.

Таблица знаков линейной функции
$y = kx + b$

Интервал / k	$\left(-\infty; -\dfrac{b}{k}\right)$	$\left(-\dfrac{b}{k}; +\infty\right)$
$k > 0$	–	+
$k < 0$	+	–

Монотонность. Линейная функция $y = kx + b$ возрастает на всей числовой оси, если $k > 0$, и убывает на всей числовой оси, если $k < 0$.

Пример. Рассмотрим функцию $y = 4 - x$.

Запишем ее в стандартном виде: $y = -x + 4$. $y = 0 \Leftrightarrow x = 4$.

$y > 0$ при $x < 4$,

$y < 0$ при $x > 4$.

Так как угловой коэффициент $k = -1 < 0$, то функция убывает на всей числовой оси.

Примеры и комментарии

1. Мы будем считать, что коэффициент k в задании линейной функции формулой $y = kx + b$ отличен от нуля. Если $k = 0$, то функция $y = b$ постоянна.

2. Функции $y = 3x$, $y = -2x + 3$ являются линейными. Функция $y = (x + 1)^2 - x^2$ также является линейной, хотя указанный способ вычисления ее значений не таков, который предусматривается определением. Однако, сделав преобразования $(x + 1)^2 - x^2 = x^2 + 2x + 1 - x^2 = 2x + 1$, мы убеждаемся в том, что эта же функция может быть задана формулой $y = 2x + 1$, что уже соответствует определению линейной функции.

3. *Обращение в нуль*. Мы предположили, что $k \neq 0$. Нули функции $y = f(x)$ находятся решением уравнения $f(x) = 0$. Решение линейного уравнения $kx + b = 0$ нам хорошо известно.

4. *Промежутки постоянного знака*. Нахождение промежутков постоянного знака для функции $y = f(x)$ соответствует решению неравенств $f(x) > 0$ и $f(x) < 0$. Решение линейных неравенств $kx + b > 0$ и $kx + b < 0$ нам также известно.

5. Характер монотонности функции $y = kx + b$ и функции $y = kx$ одинаков и зависит от знака коэффициента k.

Прямые – графики функций $y = kx$ и $y = kx + b$ параллельны. Коэффициент b определяет сдвиг прямой $y = kx$ вверх или вниз вдоль оси y.

График линейной функции

График функции. Графиком линейной функции $y = kx + b$ является прямая. Коэффициент k является угловым коэффициентом этой прямой. Если $k > 0$, то прямая образует острый угол с положительным направлением оси Ox («смотрит вверх»), если $k < 0$, то тупой («смотрит вниз»).

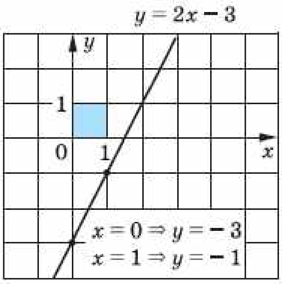
Построить прямую, являющуюся графиком линейной функции, можно разными способами.

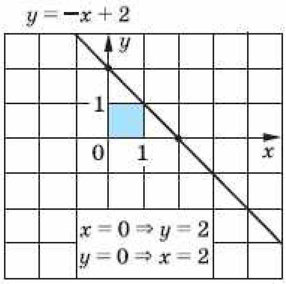
1) Можно вычислить значения функции при двух значениях x и провести прямую через две точки.

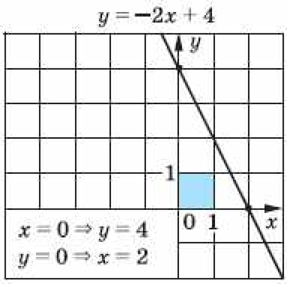
2) Можно вычислить значение функции при одном значении x и построить прямую, проходящую через полученную точку, с углом наклона к оси x, который задается угловым коэффициентом k. (Это означает, что график функции параллелен прямой $y = kx$.)

3) Можно найти точки пересечения с осями координат и провести через них прямую (это, конечно, частный, но важный случай первого способа):

$$x = 0,\ y = b;\ y = 0,\ x = -\frac{b}{k}.$$







По традиции построение графика завершает исследование функции. Однако в тех случаях, когда вид графика известен заранее (как он хорошо известен для линейной функции), исследование можно начинать с построения графика. Тогда все остальные его пункты становятся более очевидными.

Проверь себя

1. Каковы промежутки постоянного знака функции $y = 2x - 4$?
2. Как определить характер монотонности функции $y = kx + b$?
3. В каких точках график функции $y = -\frac{x}{3} + 1$ пересекает оси координат?
4. Какие вы знаете способы построения графика линейной функции?

Примеры и комментарии

1. Доказательство монотонности линейной функции

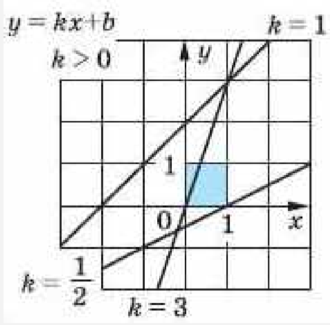
Рассмотрим случай $k > 0$. Второй случай рассматривается аналогично.

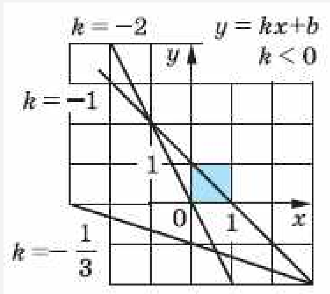
Возьмем два числа x_1 и x_2 таких, что $x_1 < x_2$. Умножим это неравенство на положительное число k: $x_1 < x_2 \Rightarrow kx_1 < kx_2$. Теперь прибавим к двум частям неравенства число b: $kx_1 < kx_2 \Rightarrow kx_1 + b < kx_2 + b$. Мы получили, что значение функции в точке x_1 меньше значения функции в точке x_2. Утверждение доказано.

2. *Область значений*. Областью значений функции $y = kx + b$, $k \neq 0$ является множество $\boldsymbol{R}$ всех действительных чисел.

Доказательство. Возьмем произвольное число a и решим уравнение $kx + b = a$. Оно имеет корень $x = \frac{a-b}{k}$. При этом значении x выражение $kx + b$ равно a. Это и означает, что функция $y = kx + b$ принимает любое, наперед заданное, значение a.

3. Примеры графиков





§ 5 Модуль

Примеры и комментарии

1. Запишем модули некоторых чисел: $|5| = 5$; $|0| = 0$; $\left|-\sqrt{2}\right| = \sqrt{2}$; $\left|2-\sqrt{5}\right| = \sqrt{5}-2$; $|3{,}14-\pi| = \pi - 3{,}14$.

2. Раскроем модули некоторых выражений:

1) $|x+1| =$

$$= \begin{cases} x+1, \text{ если } x \in [-1; +\infty), \\ -(x+1), \text{ если } x \in (-\infty; -1). \end{cases}$$

Заметим, что точку $x = -1$ можно присоединять к любому промежутку.

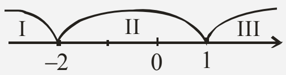
2) $|3-2x| = |2x-3| = \left|2\left(x-\dfrac{3}{2}\right)\right| =$

$$= 2\left|x-\frac{3}{2}\right| =$$

$$= \begin{cases} 2\left(x-\dfrac{3}{2}\right) = 2x-3, \text{ если } x \ge \dfrac{3}{2}, \\ 3-2x, \text{ если } x < \dfrac{3}{2}. \end{cases}$$

3) $|x+2| + |x-1|$

Наносим корни выражений, стоящих под модулями, на числовую ось и разбиваем ее на три промежутка:



$|x+2| + |x-1| =$

$= -x-2-x+1 = -2x-1$, если x лежит в первом промежутке, т. е. если $x \in (-\infty; -2)$

$= x+2-x+1 = 3$, если x лежит во втором промежутке, т. е. если $x \in [-2; 1]$

$= x+2+x-1 = 2x+1$, если x лежит в третьем промежутке, т. е. если $x \in (1; +\infty)$

Заметим, что крайнюю точку (т. е. $x = -2$ и $x = 1$) можно присоединять как к левому, так и к правому от нее промежутку. Полезно проверить совпадение в этой точке значений получившихся выражений.

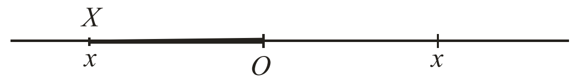
При $x = -2$: $-2\,(-2) - 1 = 4 - 1 = 3$, $3 = 3$.

При $x = 1$: $3 = 3$; $2 \cdot (1) + 1 = 3$.

Модуль числа x может быть определен аналитически:

$$\boxed{|x| = \begin{cases} x, \text{ если } x \ge 0 \\ -x, \text{ если } x < 0 \end{cases}}$$

или геометрически как расстояние между точками $X(x)$ и $O(0)$ на числовой оси:



$|x| = |OX|$

Напомним, что из определения модуля вытекают его основные свойства:

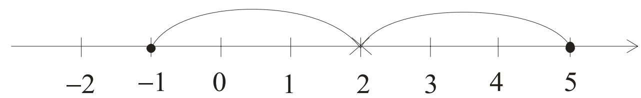
1. $|x| \ge 0$, причем $|x| = 0$ тогда и только тогда, когда $x = 0$.
2. $|xy| = |x| \cdot |y|$. В частности, $|-x| = |x|$.
3. $|x+y| \le |x| + |y|$, причем $|x+y| = |x| + |y|$ тогда и только тогда, когда числа x и y одного знака (или хотя бы одно из них равно нулю).
4. $|x-a|$ – это расстояние между точками X и A числовой оси с координатами x и a соответственно.
5. $\sqrt{x^2} = |x|$.

С помощью свойства 4, которое показывает геометрический смысл модуля разности двух чисел как расстояния между соответствующими точками, можно решать линейные уравнения и неравенства с модулем.

Примеры

1. $|x-2| = 3$

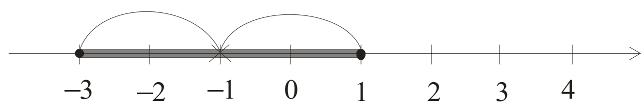
Это уравнение записывает условие: расстояние между точками x и 2 равно 3. Точки x находятся геометрически:



Ответ: –1; 5.

2. $|x+1| \le 2$

Это неравенство записывает условие: расстояние между точками x и –1 ($x + 1 = x - (-1)$) не превосходит 2. Снова обращаемся к числовой оси:



Ответ: $-3 \le x \le 1$.

Функция $y = |x|$

Функция «модуль x» задается формулой $y = |x|$.

Область определения: x – любое число, т. е. областью определения является множество $\boldsymbol{R}$ всех действительных чисел.

Обращение в нуль: $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Промежутки постоянного знака: $|x| \geq 0$ при всех x.

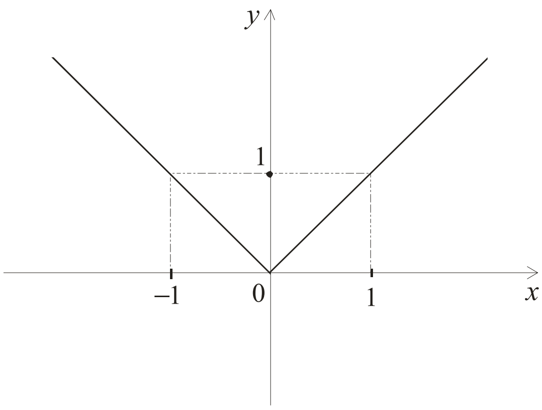
Промежутки монотонности: точка $x = 0$ делит ось x на два промежутка, на каждом из которых функция $y = |x|$ монотонна. При $x < 0$ имеем $|x| = -x$ – функция убывает; при $x \geq 0$ имеем $|x| = x$ – функция возрастает.

При $x = 0$ функция принимает наименьшее значение, равное 0.

Область значений: промежуток $[0; +\infty)$.

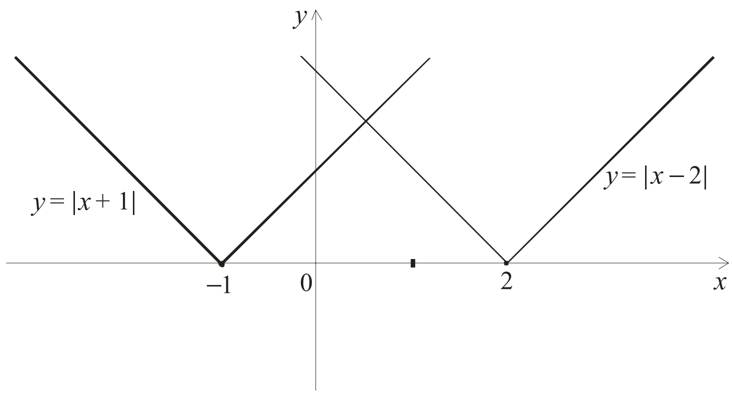
График функции $y = |x|$

Для построения графика разбиваем плоскость на две полуплоскости: $x < 0$ и $x \geq 0$. В первой из них строим график $y = -x$, во второй $y = x$:



Так как $|-x| = |x|$, то график функции $y = |x|$ симметричен относительно оси ординат.

Графики функций вида $y = |x - a|$ строятся сдвигом графика функции $y = |x|$ вдоль оси x.

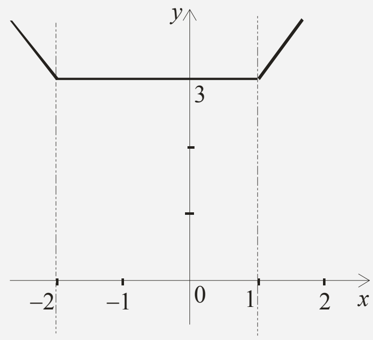


Примеры и комментарии

Выражения, полученные сложением модулей линейных функций, задают так называемые *кусочно-линейные функции*, т. е. функции, графики которых разбиваются на «куски» различных линейных функций. Для построения графиков надо найти точки, в которых линейные функции, стоящие под знаком модуля, меняют знак и разбить плоскость на полосы вертикальными прямыми.

1. $y = |x + 2| + |x - 1| =$

$$= \begin{cases} -2x - 1, x \in (-\infty; -2), \\ 3, x \in [-2; 1], \\ 2x + 1, x \in (1; +\infty). \end{cases}$$



2. $y = |2x + 1| - |x - 2|$.

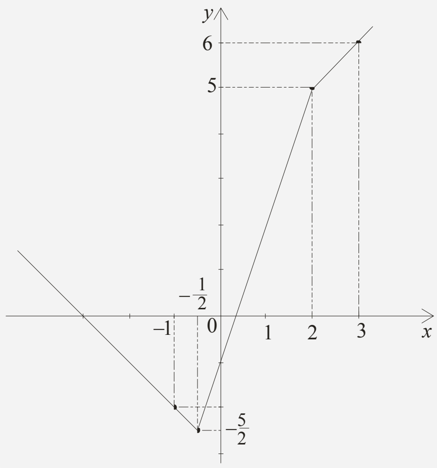
Зная, что графиком будет ломаная линия, достаточно построить несколько точек графика:

$x = -\frac{1}{2}, y = -\frac{5}{2}$

$x = -1, y = 1 - 3 = -2$

$x = 2, y = 5$

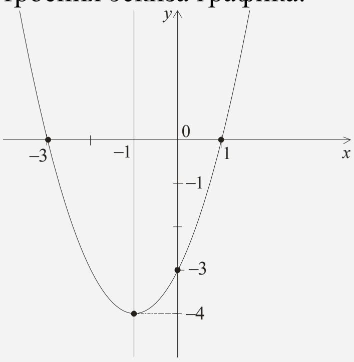
$x = 3, y = 7 - 1 = 6$



§ 6 Квадратичная функция

Примеры и комментарии

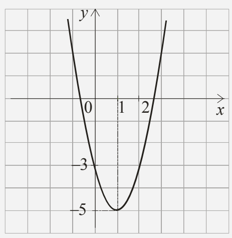
1. Рассмотрим функцию
$y = x^2 + 2x - 3$.
Нули функции: $x_1 = -3$; $x_2 = 1$.
Значение при $x = 0$: $y(0) = -3$.
Абсцисса вершины: $x_0 = -1$;
заметим, что $x_0 = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$;
ордината вершины:
$y_0 = 1 - 2 - 3 = -4$.
Этих сведений достаточно для построения эскиза графика.



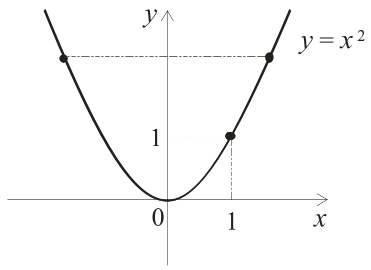
По графику видно, что
$y < 0$ при $-3 < x < 1$;
$y > 0$ при $x < -3$ и $x > 1$.
y убывает при $x \in (-\infty; -1]$,
y возрастает при $x \in [-1; +\infty)$.
Множество значений функции:
$[-4; +\infty)$.

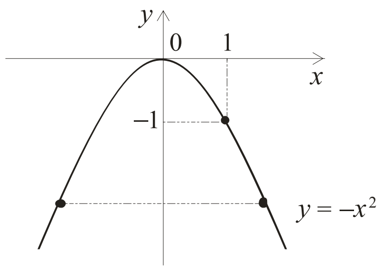
2. Рассмотрим в качестве примера функцию $y = 2x^2 - 4x - 3$.
Найдем координаты вершины ее графика: $x_0 = -\dfrac{b}{2a} = 1$; $y = y(x_0) = {}$ $= 2 \cdot 1 - 4 \cdot 1 - 3 = -5$. Функцию можно записать в виде $y = {}$ $= 2(x - 1)^2 - 5$. Для построения графика надо нанести точку $A(1; -5)$, вершину параболы, провести вертикальную прямую $x = 1$, найти точки пересечения графика с осями координат: $x = 0$, $y = 2 - 5 = -3$; $y = 0$, $x = 1 \pm \sqrt{\dfrac{5}{2}} \approx 1 \pm 1{,}6$.

Затем надо построить параболу, плавно соединив полученные точки.



Определение. Функция $y = f(x)$ называется *квадратичной*, если ее значения могут быть вычислены с помощью формулы $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$.
Рассмотрим свойства стандартной квадратичной функции $y = ax^2$.
Эта функция определена при всех значениях x.
Она обращается в нуль при $x = 0$.
При всех $x \neq 0$ ее значения сохраняют постоянный знак, совпадающий со знаком коэффициента a:
$a > 0 \Rightarrow ax^2 > 0$; $a < 0 \Rightarrow ax^2 < 0$.
На каждом из промежутков $x \leq 0$ и $x \geq 0$, т. е. $(-\infty; 0]$ и $[0; +\infty)$ функция $y = ax^2$ монотонна.
Характер монотонности. Если $a < 0$, то слева от нуля функция возрастает, а справа убывает. Если $a > 0$, характер монотонности меняется. Это легче всего представить себе по графику.





Так как $a(-x)^2 = ax^2$, то при смене знака аргумента значение функции не меняется. Это означает, что график симметричен относительно оси y. Аналогичное свойство произвольной функции называется ее четностью.
Функция $y = f(x)$ называется четной, если $f(-x) = f(x)$ (считается, что она одновременно определена как при x, так и при $-x$). Можно сказать, что функция $y = ax^2$ является четной.
Множество значений функции $y = ax^2$ зависит от знака коэффициента a: если $a > 0$, то это промежуток $[0; +\infty)$, если $a < 0$, то промежуток $(-\infty; 0]$. Действительно, уравнение $ax^2 = b$ имеет решение при любом b таком, что $\dfrac{b}{a} \geq 0$, например, $x = \sqrt{\dfrac{b}{a}}$. При этом в точке $x = 0$ функция $y = ax^2$ принимает *наибольшее* (при $a < 0$) или *наименьшее* (при $a > 0$) значение.
Свойства произвольной квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$ аналогичны свойствам стандартной функции $y = ax^2$ и будут рассмотрены по графику.

График квадратичной функции

Нам известен график стандартной квадратичной функции $y = ax^2$, который мы назвали параболой.

График квадратичной функции общего вида получается параллельным переносом (сдвигом) этой параболы.

Преобразуем выражение $ax^2 + bx + c$, задающее значения квадратичной функции.

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + 2\cdot\frac{b}{2a} + \frac{b^2}{4a^2}\right) + c - \frac{b^2}{4a} =$$

$$= a\left(x - \left(-\frac{b}{2a}\right)\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}.$$

Выражение $D = b^2 - 4ac$ называется *дискриминантом* квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$.

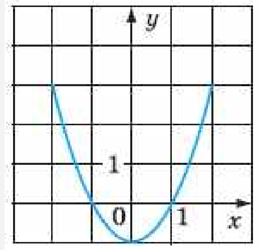
Обозначим число $-\dfrac{b}{2a}$ через x_0, а значение функции при $x = x_0$, т. е. число $-\dfrac{D}{4a}$ через y_0. Из записи $y = a(x - x_0)^2 + y_0$, или $y - y_0 = a(x - x_0)^2$ видно, что искомый график получается из графика функции $y = ax^2$ параллельным переносом (сдвигом) на вектор $\boldsymbol{r}_0$ с координатами $\bar{r}_0\left(-\dfrac{b}{2a}; -\dfrac{b^2 - 4ac}{4a}\right)$. При этом сдвиге начало координат перейдет в точку $A\left(-\dfrac{b}{2a}; -\dfrac{D}{4a}\right)$. Эта точка называется *вершиной* параболы, графика функции y. Прямая $x = 0$, которая была осью симметрии графика функции $y = ax^2$, перейдет в прямую $x = -\dfrac{b}{2a}$ – ось симметрии графика функции $y = ax^2 + bx + c$.

По графику можно проследить все свойства квадратичной функции. По нему видно, что *областью значений* функции $y = ax^2 + bx + c$ будет при $a > 0$ промежуток $\left[-\dfrac{D}{4a}; +\infty\right)$. При этом в точке $x = -\dfrac{b}{2a}$ функция принимает *наименьшее значение*. При $a < 0$ областью значений будет промежуток $\left(-\infty; -\dfrac{D}{4a}\right]$, причем значение $y_0 = -\dfrac{D}{4a}$, принимаемое функцией при $x = -\dfrac{b}{2a}$, будет *наибольшим*.

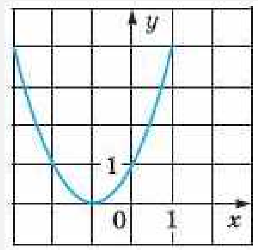
Примеры и комментарии

Расположение графика квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$ в зависимости от a и $D = b^2 - 4ac$.

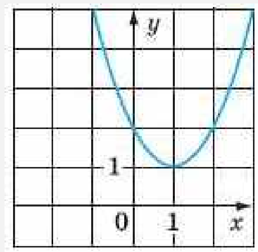
$a > 0$, $D > 0$



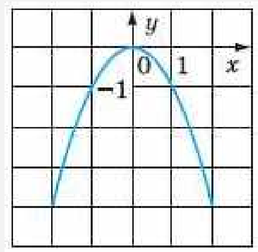
$a > 0$, $D = 0$



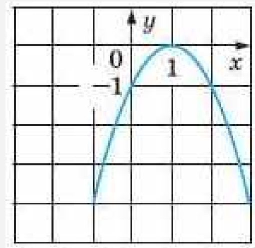
$a > 0$, $D < 0$



$a < 0$, $D > 0$



$a < 0$, $D = 0$



$a < 0$, $D < 0$