Решения задач М1946–М1950, Ф1958–Ф1967

М1946. *Пусть ABC – равнобедренный треугольник ($AC = CB$), AH и CL – высоты, I – центр вписанного круга. Докажите, что проекция CH стороны AC на сторону BC равна стороне AB в точности если $IH \parallel AB$.*

Пусть $CH = AB$. Тогда из $\frac{AB}{HB} = \frac{AC}{AL}$ следует $\frac{CH}{HB} = \frac{AC}{AL}$. Отсюда по свойству биссектрисы $\frac{CH}{HB} = \frac{IC}{IL}$, а значит, $IH \parallel AB$. Эти же выкладки, проведенные в обратном порядке, доказывают и обратное утверждение.

А.Полянский, В.Сендеров

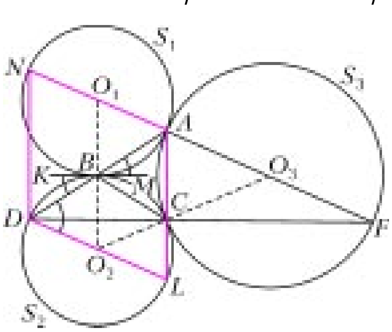
М1947. *Квадрат натурального числа оканчивается на 3 одинаковые ненулевые цифры. Докажите, что предшествующая им цифра нечетна.*

Если число x^2 оканчивается на $\overline{cc}$, где c – ненулевая цифра, то $c = 4$. В самом деле, в любом другом случае либо $x^2 \equiv 3 \pmod 4$, либо $x^2 \equiv 2 \pmod 4$; однако ни первое, ни второе невозможно.

Пусть $x^2 = A \cdot 10^4 + \overline{a4} \cdot 10^2 + 44$, где A, a – неотрицательные целые числа. Если a четно, то $\overline{a4}$ делится на 4. Отсюда $\left(\frac{x}{2}\right)^2 = \overline{\ldots 11} \equiv 3 \pmod 4$, что невозможно.

В.Сендеров

М1948. *Окружности S_1, S_2, S_3 попарно касаются друг друга внешним образом. Окружности S_1 и S_2 имеют одинаковые радиусы и касаются в точке B. Окружности S_1 и S_3 касаются в точке A. Окружность S_2 касается S_3 в точке C. Прямая AB вторично пересекает S_2 в точке D. Прямая DC вторично пересекает S_3 в точке F. Прямая FA пересекает вторично S_1 в точке N. Прямая AC вторично пересекает S_2 в точке L. Докажите, что четырехугольник $DNAL$ является ромбом.*



Пусть O_1, O_2, O_3 – центры окружностей S_1, S_2, S_3 соответственно. Легко видеть, что $\Delta O_1O_2O_3$ равнобедренный. Поэтому $\angle O_2O_1O_3 = \angle O_1O_2O_3$ и $AB = BC$, поскольку радиусы S_1 и S_2 совпадают. Пусть KM есть общая внутренняя касательная к S_1 и S_2 в точке B (см. рисунок). Используя равенство радиусов S_1 и S_2 и формулу для угла между хордой и касательной, получим $\frac{1}{2}\overset{\smile}{AB} = \angle ABM = \angle KBD = \frac{1}{2}\overset{\smile}{DB}$. Таким образом, $AB = BD = BC$ и ΔADC прямоугольный. Поэтому $\angle ACF = \angle DCL = 90^\circ$ и AF является диаметром S_3, а DL является диаметром S_2. Тогда AN есть диаметр S_1 и $AN = DL$. Так как $\angle F = \angle O_3CF = \angle DCO_2 = \angle CDO_2$, то $DO_2 \parallel O_3F$. Следовательно, $DNAL$ – параллелограмм. Так как ΔO_1AB равнобедренный, то

$$\angle NAB = \angle O_1BA = 90^\circ - \angle ABM = 90^\circ - \frac{1}{2}\overset{\smile}{AB} = 90^\circ - \frac{1}{2}\overset{\smile}{BC} = 90^\circ - \angle BDC = \angle NDB.$$

Поэтому ΔDNA равнобедренный и $NA = ND$. Следовательно, $DNAL$ является ромбом.

И.Рудаков

М1949. *На координатной плоскости расположен правильный многоугольник M с центром $(0,\ 0)$ и одной из вершин $(1,\ 0)$.*

а) Пусть $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ – множество проекций вершин многоугольника M на ось Ox. Докажите, что существует многочлен n-й степени с целыми коэффициентами, корнями которого являются числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$.

б) Пусть $\{\beta_1, \ldots, \beta_m\}$ – множество проекций вершин многоугольника M на ось Oy. Докажите, что существует многочлен m-й степени с целыми коэффициентами, корнями которого являются числа $\beta_1, \ldots, \beta_m$.

Ниже $A_n(x), \ldots, D_n(x)$ – многочлены степени n с целыми коэффициентами.

Лемма.

$$\cos nx = A_n(\cos x),$$

$$\frac{\sin nx}{\sin x} = B_{n-1}(\cos x),$$

$$\frac{\sin(2n+1)x}{\sin x} = C_n(\cos 2x),$$

$$\sin(2n+1)x = D_{2n+1}(\sin x),$$

где во втором и третьем равенствах число $\frac{x}{\pi}$ не целое.

Доказательство сразу получается по индукции с помощью тождеств

$$\cos kx = 2\cos x \cos(k-1)x - \cos(k-2)x$$

и $$(*)$$

$$\sin kx = 2\cos 2x \sin(k-1)x - \sin(k-4)x.$$

а) Если M – k-угольник, то либо $k = 2n-1$, либо $k = 2n-2$, где $n \ge 2$, либо $k = 2n-2$, где $n \ge 3$.

Поскольку при $n \ge 2$ имеем $\frac{\sin(2n-1)\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}} = C_{n-1}(\cos x)$, то попарно различные числа $\cos\frac{2\pi l}{2n-1}$, где $l = 1, \ldots, n-1$, – корни многочлена $C_{n-1}(x)$.

Аналогично, попарно различные числа $\cos\frac{\pi l}{n-1}$, где $l = 1, \ldots, n-2$, – корни многочлена $B_{n-2}(x)$ (здесь $n \ge 3$).

Следовательно,

$$P_n(x)=\begin{cases}(x-1)C_{n-1}(x) & \text{пр}, \quad k=2n-1,\\ \left(x^2-1\right)B_{n-2}(x) & \text{пр}, \quad k=2n-2.\end{cases}$$

б) Пусть по-прежнему M – k-угольник; тогда либо $k=m$, либо $k=2m$, либо $k=2m-2$. Поскольку $m=2t+1$, то в случаях $k=m$ и $k=2m$ имеем $Q_m(x)=D_m(x)$: попарно различные числа $\sin\frac{\pi l}{2t+1}$, где $l=0,\pm1,\ldots,\pm t$ – корни последнего многочлена. Если же $k=2m-2=4t$, то множество проекций вершин k-угольника на ось Oy совпадает с множеством проекций его вершин на ось Ox. Отсюда $Q_m(x)=\left(x^2-1\right)B_{m-2}(x)$. Окончательно получаем:

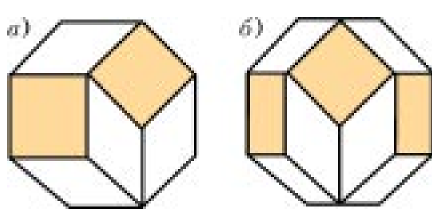
$$Q_m(x)=\begin{cases}D_m(x) & \text{пр}, \quad k=m,\\ D_m(x) & \text{пр}, \quad k=2m,\\ \left(x^2-1\right)B_{m-2}(x) & \text{пр}, \quad k=2m-2.\end{cases}$$

Замечание. Для нахождения многочленов $A_n(x),\ldots$ можно воспользоваться получаемыми с помощью тождеств (*) и $\sin kx=2\cos x\sin(k-1)x-\sin(k-2)x$ рекуррентными соотношениями: $A_0(x)=1$, $A_1(x)=x$, $A_{n+1}(x)=2xA_n(x)-A_{n-1}(x)$ при $n\ge1$; $B_0(x)=1$, $B_1(x)=2x$, $B_{n+1}(x)=2xB_n(x)-B_{n-1}(x)$ при $n\ge1$ и т.д. Подробнее о таких многочленах можно прочесть в статье Н.Васильева и А.Зелевинского «Многочлены Чебышёва и рекуррентные соотношения», опубликованной в «Кванте» №1 за 1982 год.

И.Дорофеев, В.Сендеров

М1950. *Правильный восьмиугольник легко разрезать на параллелограммы. Докажите, что правильный восьмиугольник нельзя разрезать на параллелограммы равной площади.*

Примеры простейших разрезаний правильного восьмиугольника на параллелограммы показаны на рисунке. Если принять сторону восьмиугольника за 1, то в



этих примерах сумма площадей прямоугольников равна 2, и это не случайно. Так будет при любом разрезании, что читатель может доказать самостоятельно, а может найти подробное доказательство в книжке В.В.Произволова «Задачи на вырост» (Приложение к журналу «Квант» №5 за 2003 г.).

С другой стороны, легко понять, что площадь правильного восьмиугольника со стороной 1 равна иррациональному числу.

Сопоставив эти два факта, делаем вывод, что площади параллелограммов, на которые разрезан правильный восьмиугольник, не могут быть все равными.

В.Произволов

Ф1958. *На тонкий прямой стержень длиной $L = 10$ м насажены $N = 20$ одинаковых маленьких бусинок, которые могут скользить по нему без трения. Скорости бусинок одинаковы и составляют $v = 2$ м/с, а при столкновениях друг с другом и с концами стержня скорости бусинок меняют направление, оставаясь прежними по величине. В начальный момент половина бусинок едет вправо, половина – влево. Сколько ударов бусинок об упоры стержня произойдет за время $T = 1$ ч? А сколько всего ударов произойдет за это время между бусинками?*

При ударе друг о друга бусинки не изменяют величину скорости, а только меняют ее направление на противоположное – как будто они пролетают друг сквозь друга. Если до этого додуматься, то движение бусинок станет совсем простым – они просто летают без помех от одного конца стержня к другому и обратно.

Одна бусинка за время T пролетит длину стержня

$$\frac{vT}{L}=\frac{2\text{ м/с}\cdot3600\text{ с}}{10\text{ м}}=720\text{ раз}.$$

Ударов всех бусинок о концы стержня будет в N раз больше:

$$720\cdot20=14400.$$

(Конечно, точный ответ зависит от начального расположения бусинок, но за час разница получается ничтожной.)

Второй вопрос немного сложнее. Каждая бусинка за время прохождения в одну сторону ударится по разу о каждую из всех остальных бусинок, значит, она ударится о другие бусинки

$$\frac{(N-1)vT}{L}\text{ раз}.$$

Чтобы учесть все удары бусинок друг о друга, нужно умножить это число на N и разделить пополам – иначе каждый удар бусинок друг о друга мы посчитаем дважды (для одной и для другой). Окончательно получим

$$\frac{N(N-1)vT}{2L}=136800\text{ ударов}.$$

А.Бусин

Ф1959. *Материальная точка движется вдоль отрезка прямой, длина которого $L = 2$ м. Скорость точки в начале отрезка $v_1=0{,}2$ м/с, в конце отрезка $v_2=0{,}4$ м/с. Известно, что скорость все время увеличивалась, но ускорение не превосходило $a_0=0{,}1$ м/с^2. Каким могло быть среднее ускорение точки на этом отрезке?*

Скорость на отрезке возрастает на 0,2 м/с, но для нахождения среднего ускорения нужно знать длительность интервала времени, за который увеличивается скорость. А вот время путешествия явно может быть различным при разных «стратегиях» набора скорости. Для того чтобы среднее ускорение оказалось максимально возможным, нужно сократить время разгона, а для этого нужна как можно большая средняя скорость. Способ понятен – по возможности быстрее набрать скорость $v_2 =\ 0{,}4$ м/с (ну, почти такую скорость, чтобы дальше она все же увеличивалась – это требует условие задачи). Время движения при этом будет равно времени разгона с ускорением $a_0 = 0{,}1\ \text{м/с}^2$ плюс время прохода остатка пути со скоростью v_2. Время разгона составляет 2 с, за которые точка пройдет 0,6 м и останется пройти 1,4 м. При скорости точки 0,4 м/с это потребует еще 3,5 с. Всего будет 5,5 с. Максимально возможное среднее ускорение при таких условиях составит

$$\frac{0{,}2\ \text{м/с}}{5{,}5\ \text{с}} = 0{,}0364\ \text{м/с}^2 .$$

Для получения минимального среднего ускорения нужно постараться сделать время путешествия побольше – приберечь разгон напоследок, а весь возможный кусок пути двигаться с минимальной скоростью. Расчет простой – время разгона те же 2 с, путь за время разгона те же 0,6 м. Время движения составит 1,4 м : 0,2 м/с + + 2 с = 9 с. Среднее ускорение при этом будет равно

$$\frac{0{,}2\ \text{м/с}}{9\ \text{с}} = 0{,}0222\ \text{м/с}^2 .$$

Итак, среднее ускорение может быть в пределах от $0{,}0222\ \text{м/с}^2$ до $0{,}0364\ \text{м/с}^2$. Ничего более определенного тут сказать нельзя.

А.Простов

Ф1960. *Туман состоит из огромного количества мельчайших капелек воды, неподвижно висящих в воздухе. Масса капелек в 1 л воздуха составляет 1 г (средняя плотность тумана получается в 1000 раз меньше плотности воды). Маленькая капля воды начинает падать на землю с высоты 5 м, «впитывая» встреченные капельки. Считая, что капля сохраняет форму шарика, найдите ее диаметр перед падением на землю.*

Пусть в некоторый момент капелька имеет радиус r и проходит по вертикали очень маленький отрезок пути Δh. Считая, что радиус капельки изменился совсем немного, запишем ее приращение массы:

$$\Delta m = \rho_т \pi r^2 \Delta h = \rho_в \cdot 4\pi r^2 \Delta r ,$$

откуда найдем

$$\Delta r = \frac{\rho_т}{4\rho_в} \Delta h .$$

Поскольку начальный радиус капли мал, ее диаметр перед падением на землю будет равен

$$d = 2\frac{\rho_т}{4\rho_в} H = 2{,}5\ \text{мм} .$$

З.Рафаилов

Ф1961. *На гладком горизонтальном столе лежит твердый кубик. На него налетает мягкий, довольно упругий кубик такой же массы, и между ними происходит лобовой удар. Скорость мягкого кубика после удара уменьшилась в 10 раз. Какая часть максимальной энергии деформации перешла в тепло при этом ударе? Считайте, что все тепло выделяется в мягком кубике при его деформировании.*

Обозначим начальную скорость налетающего кубика v, его массу M. Тогда после удара его скорость будет $0{,}1v$, а скорость второго кубика составит $0{,}9v$ (закон сохранения импульса). Можно теперь выразить выделившееся количество теплоты:

$$\frac{Mv^2}{2} = \frac{M(0{,}1)^2 v^2}{2} + \frac{M(0{,}9)^2 v^2}{2} + Q ,$$

откуда

$$Q = 0{,}18\frac{Mv^2}{2} .$$

В условии просят найти отношение этого количества теплоты к максимальной величине энергии деформации при ударе. Найдем эту величину. Максимальная энергия деформации соответствует равенству скоростей тел в процессе удара, их кинетическая энергия в этот момент составляет $Mv^2/4$. Ясно, что остальные $Mv^2/4$ куда-то делись — действительно, энергия перешла в тепло, а остальная «недостача» как раз и есть энергия деформации. Логично предположить, что к этому моменту выделилась половина подсчитанного нами количества теплоты (тепло выделяется как при сжатии, так и при растяжении мягкого кубика). Тогда баланс энергий можно записать в виде

$$\frac{Mv^2}{2} = \frac{Mv^2}{4} + \frac{1}{2}Q + W_{деф} .$$

Отсюда получаем

$$W_{деф} = (0{,}5 - 0{,}09)\frac{Mv^2}{2} = 0{,}41\frac{Mv^2}{2} .$$

Теперь находим искомое отношение:

$$\frac{Q}{W_{деф}} = \frac{0{,}18}{0{,}41} = \frac{18}{41} \approx 0{,}44 .$$

А.Повторов

Ф1962. *На сложенных вместе двух нитях длиной L каждая подвешено тело массой M (рис.1). На расстоянии $L/3$ от верхнего конца между нитями вставили очень легкую горизонтальную распорку общей длиной d, состоящую из двух соединенных торцами половинок. Найдите силу, с которой одна половинка распорки действует на другую.*

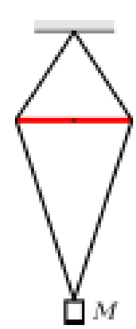


Рис. 1

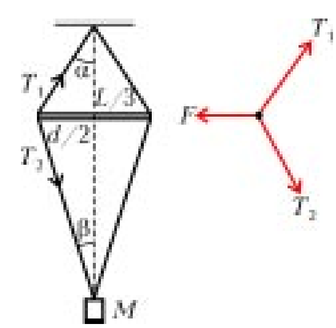


Рис. 2

Для маленького кусочка нити, соприкасающегося с распоркой, сумма сил со стороны распорки и соседних участков нити равна нулю (рис.2):

$$F - T_1 \sin\alpha - T_2 \sin\beta = 0 ,$$

$$T_1 \cos\alpha - T_2 \cos\beta = 0 .$$

Для подвешенного тела можно записать

$$2T_2\cos\beta = Mg .$$

Из геометрических соображений,

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{d/2}{L/3} = \frac{3}{2}\frac{d}{L},\ \operatorname{tg}\beta = \frac{3}{4}\frac{d}{L} .$$

После элементарных преобразований получим искомую силу:

$$F = \frac{9}{8}\frac{d}{L}Mg .$$

А.Зильберман

Ф1963. *На pV-диаграмме изображен замкнутый процесс (рис.1). Кривая – это дуга окружности, прямая вертикальна и соответствует охлаждению газа при постоянном объеме. Считая, что этот процесс проводят с порцией гелия, найдите КПД получившейся тепловой машины. Отношение максимального давления к минимальному в этом цикле равно 5, а минимальный объем составляет 0,9 от максимального.*

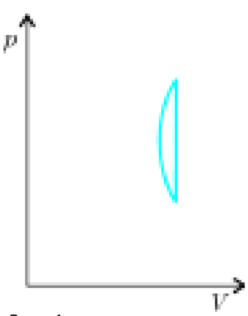


Рис. 1

Газ получает тепло на дуге окружности и отдает его на прямой. Для расчета КПД цикла нужно найти площадь, ограниченную сегментом (рис.2). Посчитаем эту площадь в «клеточках» – для расчета отношений это вполне допустимо. В наших

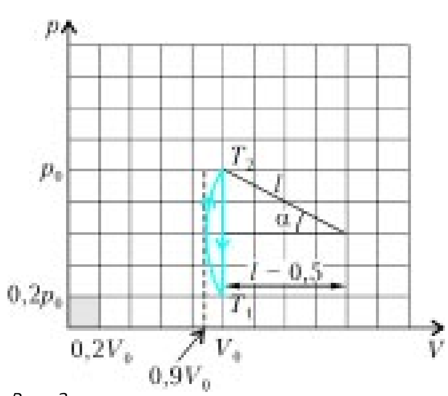


Рис. 2

обозначениях площадь клетки равна $0,2p_0\cdot 0,2V_0$. Посчитаем радиус дуги:

$$(l-0,5)^2 + 2^2 = l^2,\ l^2 - l + 0,25 + 4 = l^2,\ l = 4,25$$

и найдем угол α:

$$\alpha = \arcsin\frac{2}{4,25} \approx 0,49\ \text{рад} .$$

Площадь сегмента равна разности площади сектора и площади треугольника:

$$S_{\text{сег}} = S_{\text{сек}} - S_{\text{тр}} = \frac{2\alpha}{2\pi}\pi l^2 - \frac{1}{2}\cdot 4(l-0,5) =$$

$$= \alpha l^2 - 2l + 1 \approx 8,85 - 8,5 + 1 \approx 1,35 .$$

Работа в этом цикле равна

$$A = 1,35\cdot 0,04p_0V_0 .$$

Количество теплоты, полученное от нагревателя, составляет

$$Q_{\text{н}} = A + \Delta U = A + \nu\cdot\frac{3}{2}R(T_2 - T_1) =$$

$$= A + \frac{3}{2}(p_0V_0 - 0,2p_0V_0) =$$

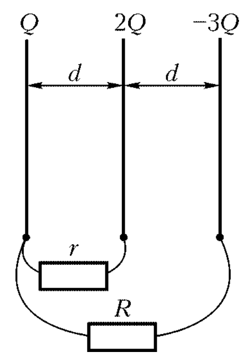
$$= 1,35\cdot 0,04p_0V_0 + 1,2p_0V_0 = 1,254p_0V_0 .$$

Тогда термодинамический КПД цикла будет равен

$$\eta = \frac{A}{Q_{\text{н}}} = \frac{1,35\cdot 0,04p_0V_0}{1,254p_0V_0} \approx 0,043 = 4,3\% .$$

З.Циклов

Ф1964. *Три большие проводящие пластины площадью $S = 2$ м^2 каждая расположены параллельно друг другу, расстояние между соседними пластинами d = 1 см. На одну из крайних пластин помещен заряд Q = 1 мкКл, на вторую, среднюю, пластину – заряд $2Q$, на третью пластину – заряд $-3Q$. Между первой и второй пластинами подключают резистор сопротивлением r = 100 Ом. Одновременно с этим резистор сопротивлением R = 100 кОм подключают между первой и третьей пластинами. Найдите количество теплоты, которое выделится в каждом из резисторов.*



При таком большом отношении сопротивлений можно считать, что перераспределение зарядов между левой и средней пластинами (см. рисунок) происходит очень быстро – за это время по резистору сопротивлением R заряд практически не перетекает. Ясно, что весь заряд Q перетечет на среднюю пластину. Начальная разность потенциалов между этими пластинами равна

$$\Delta\varphi_{\text{нач}} = Ed = \left(\frac{Q}{2\varepsilon_0S} - \frac{2Q}{2\varepsilon_0S} + \frac{3Q}{2\varepsilon_0S}\right)d = \frac{Qd}{\varepsilon_0S} = \frac{Q}{C},$$

где $C = \dfrac{\varepsilon_0S}{d}$.

Количество теплоты, которое при этом выделится в резисторе сопротивлением r, можно найти по формуле

$$W_{\text{т}1} = \frac{1}{2}\Delta\varphi_{\text{нач}}Q = \frac{Q^2}{2C} \approx 2,8\cdot 10^{-4}\ \text{Дж}$$

(мы учли, что зависимость разности потенциалов от уже перетекшего заряда линейная).

Вторая часть расчета совсем простая – получается обычный конденсатор емкостью C с зарядами обкладок $3Q$ и $-3Q$. Тепло при этом выделится в резисторе сопротивлением R:

$$W_{22} = \frac{(3Q)^2}{2C} = \frac{9Q^2}{2C} \approx 25,2\cdot 10^{-4}\ \text{Дж} .$$

А.Повторов

Ф1965. *К батарейке подключены три вольтметра, соединенные последовательно. Показания вольтмет-*

ров составляют при этом 0,5 В, 1 В и 2 В (должно быть, разные попались вольтметры). Изменим соединение – подключим теперь два вольтметра параллельно, к ним присоединим последовательно третий вольтметр, а к выводам всей цепи подключим батарейку. Оказалось, что один из вольтметров при таком переключении свои показания не изменил. Что показывают остальные два вольтметра? Напряжение батарейки считать неизменным.

Обозначим силу тока в цепи при последовательном соединении приборов через I. Сопротивления вольтметров относятся как 0,5 : 1 : 2, напряжение батарейки составляет 0,5 В + 1 В + 2 В = 3,5 В.

При переключении ток в цепи явно изменился, поэтому остаться прежними могли только показания одного из параллельно соединенных приборов. Проанализируем возможности.

Пусть параллельно соединены вольтметры, показывающие 0,5 В и 1 В, и показания первого остались равными 0,5 В. Второй вольтметр при этом тоже показывает 0,5 В, через первый вольтметр течет ток I, через второй $0{,}5I$, суммарный ток течет через третий вольтметр, и он показывает $2 \cdot 1{,}5\text{ В} = 3\text{ В}$. В сумме 0,5 В и 3 В дают как раз 3,5 В – напряжение батарейки. Итак, мы нашли подходящий вариант. Осталось проверить – нет ли других возможных вариантов.

Проверим вольтметр «1 В». Параллельно ему может быть подключен вольтметр «2 В», через него течет ток $I/2$, суммарный ток составляет $1{,}5I$, и сумма показаний получается $1\text{ В} + 1{,}5 \cdot 0{,}5\text{ В} = 1{,}75\text{ В}$ – не подходит. Проверим вольтметр «2 В» с параллельным подключением «1 В»: ток $3I$, напряжение $2\text{ В} + 3 \cdot 0{,}5\text{ В} = 3{,}5\text{ В}$ – подходит. Последняя возможная схема с параллельным подключением вольтметров «2 В» и «0,5 В» не подходит.

Таким образом, мы нашли целых два возможных варианта.

Р.Александров

Ф1966. *В экономичном современном фонарике (вместо лампочки там используется очень яркий светодиод) применяют накопитель энергии – конденсатор большой емкости 0,1 Ф (это не шутка, такие конденсаторы выпускают уже больше 30 лет, в последние годы они сильно подешевели). А «накачивают» его энергией, встряхивая фонарик – при этом цилиндрический магнит длиной 2 см и диаметром 1 см проскакивает то в одну, то в другую сторону через катушку, содержащую 1000 витков и намотанную в 10 слоев на длине 2 см. Длина трубки, в которой движется магнит, равна 7 см, на концах трубки сделаны эластичные упоры – магнит при ударе о такой упор останавливается. Считая магнитную индукцию поля у торца магнита равной 0,2 Тл, оцените время, за которое можно зарядить конденсатор до напряжения 3 В. Чтобы конденсатор не разряжался через катушку, его подключают через диод.*

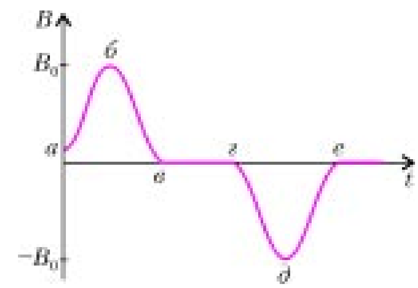
Поле такого короткого магнита быстро спадает при удалении от его торца – магнитный поток Ф при «проскоке» меняется очень быстро, и ЭДС индукции $\mathcal{E}$ оказывается существенно больше напряжения, до которого заряжается конденсатор. Тогда можно записать

$$I \approx \frac{\mathcal{E}}{R},$$

где R – сопротивление цепи. Заряд, прошедший по цепи, равен

$$Q = \sum I\Delta t = \frac{\Delta\Phi}{R} \approx \frac{2SB_0N}{R}.$$

На пути в одну сторону конденсатор заряжается на участках *аб* и *де* (диод!), на обратном пути – на участках *дг* и *вб* (см. рисунок). Оценим сопротивление: 100 витков на длине намотки 2 см (1000 витков, 10 слоев) дают диаметр провода 0,2 мм, с учетом изоляции



– примерно 0,15 мм. Длина намотки составляет приблизительно 50 м. Тогда сопротивление медного провода катушки будет

$$R \approx 50\text{ Ом}.$$

Заряд за один проход магнита равен

$$Q = \frac{SB_0N}{R} \approx 3 \cdot 10^{-4}\text{ Кл}.$$

При заряде конденсатора $Q_0 = CU_0 \approx 0{,}3$ Кл нужно «тряхнуть» фонарик примерно 1000 раз. Если трясти туда-обратно 5 раз в секунду (вполне реально), потребуется

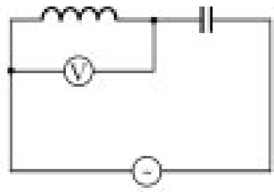
$$t \approx 100\text{ с}.$$

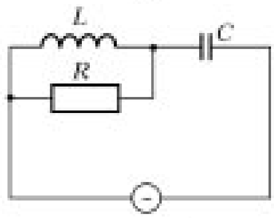
Примерно так и получается на практике!

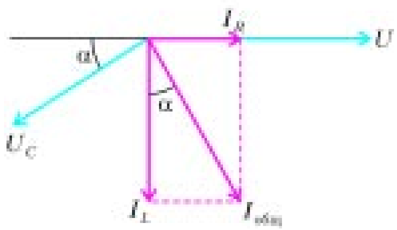
С.Фонарев

Ф1967. *К звуковому генератору подключают последовательно соединенные конденсатор емкостью C = 1 мкФ и катушку индуктивностью L = 1 Гн. Частоту генератора меняют, измеряя при этом напряжение на катушке вольтметром, имеющим сопротивление R = 20 кОм. На какой частоте показания вольтметра будут наибольшими? Найдите максимальное напряжение, которое покажет вольтметр. Напряжение генератора все время равно U_0 = 1 В (эффективное значение). А что будет, если вольтметр переключить и измерять напряжение на конденсаторе? Катушку и конденсатор считать идеальными, сопротивлением проводов и внутренним сопротивлением генератора пренебречь.*

Если бы вольтметр имел очень большое сопротивление, то максимальное напряжение (очень большое!) полу-







чилось бы при резонансе на частоте

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 1000\ \text{с}^{-1}$$

– там резко возрастает ток цепи.

Нарисуем векторную диаграмму токов и напряжений цепи (см. рисунок). Сумма напряжений конденсатора и катушки равна напряжению источника U_0:

$$(U_C \cos\alpha - U)^2 + (U_C \sin\alpha)^2 = U_0^2,$$

$$U_C^2 + U^2 - 2UU_C \cos\alpha = U_0^2,$$

$$\left(\frac{I_{общ}}{\omega C}\right)^2 + U^2 - 2U\frac{I_{общ}\cos\alpha}{\omega C} =$$

$$= \frac{U^2/(\omega L)^2 + U^2/R^2}{\omega^2 C^2} + U^2 - 2U^2\frac{1}{\omega^2 LC} = U_0^2,$$

$$U = \frac{U_0}{\sqrt{\left(\frac{1}{\omega^2 LC} - 1\right)^2 + \frac{1}{\omega^2 R^2 C^2}}}.$$

Применим удобное обозначение

$$LC = \frac{1}{\omega_0^2},$$

тогда

$$U = \frac{U_0}{\sqrt{\left(\frac{\omega_0^2}{\omega^2} - 1\right)^2 + \frac{\omega_0^2 L}{\omega^2 R^2 C}}}.$$

Минимум знаменателя будет при

$$\frac{\omega_0^2}{\omega^2} = 1 - \frac{L}{2R^2C} = 1 - \frac{1}{800}.$$

В таком случае

$$\omega = 1000{,}625\ \text{с}^{-1},$$

$$U \approx 20\ \text{В}.$$

Максимальное напряжение, измеренное на конденсаторе, будет таким же, но на частоте чуть меньшей ω_0.

З.Рафаилов

Карлов университет

(Начало см. на с. 14)

шись, фактически зашло в тупик. Судьи требовали признательного раскаяния, апеллируя к авторитету собора, Гус заявлял о своей невиновности, апеллируя к Библии. Процесс завершился 6 июля 1415 года сожжением реформатора, которое взбудоражило всю Чехию. Вооруженное восстание гуситов, как известно, завершилось их поражением, что привело к закрытию всех, кроме философского, факультетов Пражского университета. Контроль над университетом получили иезуиты, которые в разрушенном доминиканском монастыре на базе часовни Св. Климента основали новое учебное заведение — Климентинум.

В средние века Прага и Карлов университет оказались вытесненными на обочину европейской культуры, а Чехия стала одной из провинций Австро-Венгерской империи. После 1620 года Каролинум стал называться университетом Карла-Фердинанда. И все-таки это был чешский университет, подтверждавший претензии чехов на культурную самостоятельность. Преподавание в нем велось, однако, на немецком языке. Чешский язык зазвучал в аудиториях лишь в 1882 году, когда Карлов университет был разделен на два – немецкое и чешское – отделения.

В настоящее время Карлов университет пользуется репутацией одного из сильнейших в мире. На его многочисленных факультетах, расположенных не только в Праге, но и в других чешских городах, обучается более сорока тысяч студентов. Структура Карлова университета сложна и охватывает практически все направления современного высшего образования. И по сей день Каролинум занимает одно из старинных готических зданий Праги — Карлов колледж второй половины XIV века. О тех временах напоминает большой зал с эркером бывшей часовни и готические аркады на первом этаже. Во дворе Каролинума установлена скульптура ректора Яна Гуса.