Возрождение «бесполезных» чисел

Л.ШИБАСОВ

В ШЕСТОМ ВЕКЕ ДО Н.Э. ГРЕЧЕСКИЙ УЧЕНЫЙ Пифагор основал на юге Италии научную школу, которая одновременно стала и философским братством и политическим союзом. Много внимания в этой школе уделялось изучению математики. Пифагорейцы считали, что в основе мироздания лежат натуральные числа, и все явления природы объясняли их соотношениями. Такой подход способствовал глубокому изучению множества натуральных чисел. В школе Пифагора была разработана теория пропорций, найдены свойства различных средних, изучались числа четные и нечетные, простые и составные, дружественные и совершенные, многоугольные и пирамидальные и т.п. Остановимся на одном из этих результатов.

Четные совершенные числа

Возьмем натуральное число и найдем сумму всех его собственных, т.е. меньших самого числа, натуральных делителей. Эта сумма может оказаться меньше исходного числа, больше его или равна ему. Например, для числа 10 сумма собственных делителей 1 + 2 + 5 = 8 < < 10, для 12 имеем 1 + 2 + 3 + 4 + 6 = 16 > 12, а для 6 получаем 1 + 2 + 3 = 6. Числа первого типа пифагорейцы называли *недостаточными*, второго типа – *избыточными*, а третьего – *совершенными*. Итак, число 6 совершенное. Это наименьшее из совершенных чисел. Следующее за ним – число 28 = 1 + 2 + 4 + 7 + + 14, затем – число 496. Эти три совершенных числа знали еще в школе Пифагора.

В I веке уже новой эры греческий математик Никомах нашел четвертое совершенное число 8128 и, сравнив известные совершенные числа, заключил, что: 1) существуют лишь четные совершенные числа; 2) множество таких чисел бесконечно; 3) все они поочередно оканчиваются цифрами 6 и 8.

Первые два предположения Никомаха не доказаны до сих пор; больше повезло третьему, и то наполовину: с чередованием последних цифр он ошибся. Пятое и шестое совершенные числа оканчиваются на 6, но эти числа были найдены в арабском мире лишь в XIII веке, а в Европе – двумя веками позже. Тем не менее, соответствующую закономерность для четных совершенных чисел найти можно, но сначала выясним их структуру.

Теорема. *Четное число совершенно тогда и только тогда, когда оно имеет вид* $n = 2^{k-1}\left(2^k-1\right)$, *где* $\left(2^k-1\right)$ *– простое число.*

Достаточность условия теоремы была доказана Евклидом в его знаменитых «Началах» (3 в. до н.э.), а необходимость – Л.Эйлером (XVIII в.).

Доказательство. Для доказательства теоремы введем функцию $\sigma(n)$, равную сумме всех натуральных делителей числа n, включая и само n. Легко убедиться в верности следующих свойств функции $\sigma(n)$:

а) $\sigma(n) \geq n+1$, причем равенство имеет место лишь для простого числа n;

б) если числа m и n взаимно простые, то $\sigma(m \cdot n) = \sigma(m) \cdot \sigma(n)$;

в) для простого p и натурального k выполняется равенство $\sigma\left(p^k\right) = \dfrac{p^{k+1}-1}{p-1}$;

г) число n совершенно тогда и только тогда, когда $\sigma(n) = 2n$.

Необходимость условия теоремы. Пусть n – четное совершенное число, тогда $n = 2^{k-1}m$, где k – натуральное число, $k > 1$, а m – нечетное число, тоже большее единицы (при $m = 1$ число n недостаточное: $\sigma\left(2^{k-1}\right) = 2^k - 1 < 2^k = 2n$). Из равенств $\sigma(n) = \left(2^k-1\right) \cdot \sigma(m)$ и $\sigma(n) = 2n = 2^k m$ получаем $\left(2^k-1\right) \cdot \sigma(m) = 2^k m$, откуда $\sigma(m) = 2^k s$, где s – нечетное число. Итак, $m = \left(2^k-1\right) \cdot s$. Если $s \neq 1$, то

$$\sigma(m) = \sigma\left(\left(2^k-1\right)s\right) \geq 1 + s + 2^k - 1 + \left(2^k-1\right)s = 2^k s + 2^k = \sigma(m) + 2^k,$$

чего не может быть. Следовательно, $s = 1$, $m = 2^k - 1$ и $\sigma(m) = 2^k = m+1$, а значит, m – простое число.

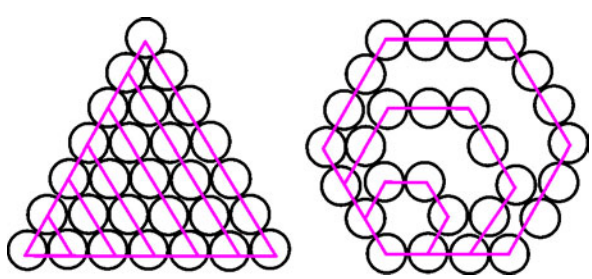
Достаточность условия. Так как $n = 2^{k-1}\left(2^k-1\right) = 2^{k-1}p$, то $\sigma(n) = \left(2^k-1\right)(p+1) = \left(2^k-1\right)2^k = 2n$. Таким образом, n – совершенное число.

Теорема доказана.

Теперь мы в состоянии выяснить закономерность появления последней цифры в записи четного совершенного числа. Отметим, что показатель k числа 2^k-1 не может быть составным: при $k = t \cdot s$, $t > 1$, $s > 1$, число $2^{ts} - 1 = \left(2^t-1\right)\left(2^{(s-1)t} + 2^{(s-2)t} + \ldots + 2^t + 1\right)$ составное. Правда, и в случае простого показателя число $2^k - 1$ может оказаться составным; например, $2^{11} - 1 = 2047 = 23 \cdot 89$. Таким образом, показатель k пробегает лишь часть множества простых чисел. Если исключить значение $k = 2$, то останутся нечетные показатели, а они имеют вид $k = 4l \pm 1$. При $k = 4l + 1$ первый сомножитель числа $2^{4l}\left(2^{4l+1} - 1\right)$ оканчивается шестеркой, поскольку $2^{4l} = 16^l$, а второй сомножитель – единицей: $2^{4l+1} - 1 = 2 \cdot 16^l - 1$. В случае $k = 4l - 1$ имеем $2^{4l-2}\left(2^{4l-1} - 1\right)$; здесь 2^{4l-1} оканчивается цифрой 8, а 2^{4l-2} – цифрой 4. Итак, число $2^{4l}\left(2^{4l+1} - 1\right)$ заканчивается цифрой 6, а $2^{4l-2}\left(2^{4l-1} - 1\right)$ – цифрой 8. В исключенном случае ($k = 2$) получается число 6.

Обозначим для удобства числа вида $2^{k-1}\left(2^k - 1\right)$ через N_k. Как мы убедились, наблюдение Никомаха о чередовании последних цифр подтверждается именно для чисел N_k с нечетными номерами $k \geq 3$, но… не все они являются совершенными. Числа N_k (а значит, и совершенные) обладают многими интересными свойствами, в частности, они связаны с так называемыми фигурными числами, хорошо известными еще в школе Пифагора.

Число называется *фигурным* или *q-угольным*, если оно является одной из сумм членов арифметической прогрессии с первым членом, равным 1, и разностью $q - 2$. Это число выражает количество шаров, из которых можно выложить на плоскости правильный q-угольник, чем и объясняется название числа. Построим треугольные числа; для этого начнем укладывать шары на плоскости в виде правильных треугольников, растущих из одной вершины. Для построения треугольника, сторона которого содержит $2^k - 1$ шаров, будет использовано $1 + 2 + \ldots + \left(2^k - 1\right) = 2^{k-1}\left(2^k - 1\right) = N_k$ шаров. Объединив в этой сумме попарно слагаемые,



начиная со второго, получим $1 + 5 + 9 + \ldots + \left(2^{k+1} - 3\right)$ – шестиугольное число. Сторона соответствующего 6-угольника содержит 2^{k-1} шаров. Итак, из N_k шаров можно выложить правильный треугольник со стороной $2^k - 1$ и правильный шестиугольник со стороной 2^{k-1}. На рисунке изображен случай $k = 3$.

Упражнения

1. Докажите, что при любом $k > 1$ число N_k:

а) не является квадратом (4-угольным числом);

б) в двоичной системе счисления имеет запись 11…100…0, сначала идут k единиц, а за ними $(k - 1)$ нулей.

2. Докажите, что любое число N_k с нечетным индексом $k \geq 3$:

а) при делении на 9 дает остаток, равный 1;

б) представимо в виде суммы кубов последовательных нечетных натуральных чисел от единицы до $2^{(k+1)/2} - 1$.

Поиск простых чисел Мерсенна

Мы уже видели, что открытие новых четных совершенных чисел связано с поиском простых показателей k, для которых числа $M_k = 2^k - 1$ оказываются простыми. Числа M_k называют *числами Мерсенна* – по имени изучавшего их в XVII веке французского ученого. В «Физико-математических размышлениях» (1644) Мерсенн утверждал, что числа $2^k - 1$ являются простыми для $k = 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 67, 127, 257$. Этот факт произвел сильное впечатление на его современников. Ведь тогда не было вычислительной техники, и проверить утверждение было делом немыслимым: например, число M_{31} больше двух миллиардов (его простоту доказал через сто лет Эйлер). И хотя, как выяснилось позже, в этом списке два числа M_{67} и M_{257} составные, можно лишь поражаться глубине проникновения Мерсенна в структуру таких чисел.

Критерий простоты чисел Мерсенна нашел (1878) французский математик Ф.Люка. Прежде чем формулировать его, введем *последовательность Люка*. Она определяется рекуррентно: $L_1 = 4$, $L_n = L_{n-1}^2 - 2$. По этим формулам получаем $L_2 = 14$, $L_3 = 194$, $L_4 = 37634$ и т.д. **Критерий Люка**, усовершенствованный (1930) американским математиком Д.Лемером, звучит так: *число M_k при простом нечетном k тогда и только тогда является простым, когда L_{k-1} делится на M_k*. Приводить доказательство мы не будем, а обратимся к примерам. При $k = 3$ имеем $L_2 = 14$, оно делится на $M_3 = 7$, число 7 и на самом деле простое; при $k = 5$ число $L_4 = 37634$ делится на $M_5 = 31$, и число 31 простое. Но при больших номерах k применение критерия затруднительно.

Подойдем к поиску простых чисел Мерсенна с другой стороны: найдем вид делителей числа M_k при условии их существования. Это позволит сразу отсеять некоторые из M_k. Рассмотрим первые числа Мерсенна с простыми номерами: $M_2 = 3$, $M_3 = 2 \cdot 3 + 1$, $M_5 = 2 \cdot 3 \cdot 5 + 1$, $M_7 = 2 \cdot 7 \cdot 9 + 1$, $M_{11} = 2 \cdot 11 \cdot 93 + 1$. Если исключить M_2, то числа $M_p - 1$ делятся на $2p$. Подмеченный факт имеет место для всех чисел Мерсенна с простыми нечетными номерами. Он является следствием **малой теоремы Ферма**: *если p простое число и a не делится на p, то разность $a^{p-1} - 1$ делится на p*. По этой теореме $M_p - 1 = 2^p - 2 = 2\left(2^{p-1} - 1\right)$ делится на $2p$.

Надо сказать, что Ферма и открыл свою малую теорему, занимаясь совершенными числами. Опираясь на нее, он установил, что *не только сами числа M_p при простом нечетном p, но и все их делители имеют вид* $2pt + 1$ (элементарное доказательство имеется, например, в книге Л.П.Шибасова «От единицы до бесконечности» – М.: Дрофа, 2006). Это утверждение Ферма облегчает поиск простых делителей чисел Мерсенна. Например, в случае $p = 23$ надо испытать делимость $M_{23} = 8388607$ только на числа $46 + 1$, $46 \cdot 2 + 1$ и т.д. Уже первая проверка дает результат: число M_{23} делится на 47. Полученное частное 178481 тоже представимо в аналогичном виде: $46 \cdot 3880 + 1$. При $p = 29$, перебирая по порядку числа $58t + 1$, найдем все простые делители числа M_{29}: $58 \cdot 4+1=233$, $58 \cdot 19+1=1103$, $58 \cdot 36+1=2089$.

Эйлер установил, что *все простые делители чисел Мерсенна с нечетными номерами имеют вид $8m \pm 1$*. Ему же принадлежит следующий признак делимости чисел M_p: *если $p = 4m + 3$ и $q = 2p + 1$ оба простые, то M_p делится на q* (доказательства этих свойств имеются в упомянутой книге). Приведем примеры применения последнего признака делимости (учитывая лишь простые числа p и q):

1) $m = 0$, $p = 3$, $q = 7$, $M_3 = 7$ делится на 7;
2) $m = 2$, $p = 11$, $q = 23$, $M_{11} = 23 \cdot 89$;
3) $m = 5$, $p = 23$, $q = 47$, $M_{23} = 47 \cdot 178481$;
4) $m = 20$, $p = 83$, $q = 167$, $M_{83} = 167 \cdot 57912614113275649087721$.

Следующие простые p и q появятся при $m = 32$, соответствующее число M_{131} делится на 263 и содержит 40 цифр, мы его приводить не будем.

Интерес к простым числам Мерсенна объясняется не только их связью с совершенными числами, а еще одним обстоятельством. Человечество всегда интересовалось числами-гигантами, в том числе и наибольшими простыми числами. Доказательство простоты большого числа – трудоемкое занятие даже сейчас, когда в распоряжении математиков имеется современная вычислительная техника. И здесь на выручку приходят различные признаки делимости, а поскольку для M_p найдено много таких признаков да к тому же имеется критерий простоты, то среди наибольших открытых на данный момент простых чисел часто оказываются числа Мерсенна. Пока таким чемпионом является 43-е по счету простое число $M_{30402457}$, содержащее более 9 миллионов цифр. Оно обнаружено в декабре 2005 года после многих суток непрерывной работы мощного компьютера. Возможно, и этот рекорд будет побит к тому времени, когда вы прочтете эту статью. Дело в том, что применение ЭВМ существенно облегчило поиск. Достаточно сказать, что большая часть (31) из всех известных простых чисел Мерсенна найдена именно с их помощью, причем половине из этих открытий нет и 20 лет. А теперь этот процесс пойдет гораздо быстрее: создан международный проект «Поиск больших простых чисел Мерсенна с использованием Интернета», анонимный спонсор основал фонд на сумму более полумиллиона долларов для четырех удачников, которые первыми найдут простые числа Мерсенна с количеством цифр более 1 миллиона, 10 миллионов, 100 миллионов и одного миллиарда соответственно. Первый из четырех денежных призов уже выплачен за 38-е число Мерсенна, содержащее более двух миллионов цифр.

Созданию фонда, несомненно, способствовало то обстоятельство, что огромные простые числа лежат в основе защиты электронной коммерции и электронной почты – в вопросах, ставших актуальными в последнее время. Дело в том, что для шифра удобно использовать произведение двух простых чисел; чтобы найти ключ к шифру, надо определить эти сомножители. Поскольку со временем все же удается их найти, то шифровальщики постоянно обновляют арсенал простых чисел. Так что теперь не только простая любознательность и научный престиж будут стимулировать охотников за большими простыми числами. А ведь еще в 1811 году английский математик П.Барлоу, приведя в своей книге «Теория чисел» восьмое совершенное число, писал: «Оно навсегда останется наибольшим из когда-либо открытых совершенных чисел, поскольку, принимая во внимание их бесполезность, трудно предположить, чтобы кто-нибудь стал затрачивать усилия на получение больших совершенных чисел». Как же он ошибался!

Похоже, большинство ученых верит в бесконечность множества простых чисел Мерсенна. В конце XIX века бельгийский математик Э.Каталан предполагал это вывести из следующего наблюдения: если взять простые числа Мерсенна 3, 7, 31, 127, то M_3, M_7, M_{31}, M_{127} тоже будут простыми. Но в 1953 году было обнаружено, что хотя число $M_{31} = 8191$ простое, число M_{8191} составное.

О нечетных совершенных числах

Ученые с давних пор пытались отыскать нечетные совершенные числа. Их поиск напоминает охоту за призраком, которого никто никогда не видел. В длительном процессе охоты найдено много свойств, которыми должны обладать эти числа при условии их существования. Например, легко видеть, что количество различных простых делителей нечетного совершенного числа больше двух. В самом деле, число $n = p^a \cdot q^b$, где $p \ge 3$, $q \ge 5$ – простые числа, a и b – натуральные, недостаточное, поскольку

$$\sigma(n) = \frac{p^{a+1}-1}{p-1} \cdot \frac{q^{b+1}-1}{q-1} < \frac{p^{a+1}}{p-1} \cdot \frac{q^{b+1}}{q-1} = n \cdot \frac{p}{p-1} \cdot \frac{q}{q-1} \le n \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4} < 2n.$$

Установлено, что количество различных простых делителей должно быть не меньше 8. Сложнее определить вид нечетного совершенного числа n. Обратимся к его разложению на простые (нечетные) множители:

$$n = p_0^{\alpha_0} \cdot p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_s^{\alpha_s}.$$

Так как $\sigma(n) = \sigma\left(p_0^{\alpha_0}\right) \cdot \sigma\left(p_1^{\alpha_1}\right) \cdot \ldots \cdot \sigma\left(p_s^{\alpha_s}\right)$, то из равенства $2n = \sigma(n)$ получаем

$$2p_0^{\alpha_0} \cdot p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_s^{\alpha_s} = \left(1 + p_0 + \ldots + p_0^{\alpha_0}\right)\left(1 + p_1 + \ldots + p_1^{\alpha_1}\right)\ldots\left(1 + p_s + \ldots + p_s^{\alpha_s}\right). \quad (1)$$

Поскольку сумма $1 + p + p^2 + \ldots + p^\alpha$ делится на 2 лишь при нечетном α, то только один из показателей $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_s$ нечетен, остальные четные. Будем считать $\alpha_0 = 2c+1$, $\alpha_1 = 2a_1$, …, $\alpha_s = 2a_s$. Тогда в правой части равенства (1) четный сомножитель возникает за счет первой скобки. Преобразуем ее так:

$$1 + p_0 + \ldots + p_0^{2c+1} = \left(1 + p_0\right)\left(1 + p_0^2 + \ldots + p_0^{2c}\right).$$

Нечетное число p_0 имеет вид $p_0 = 4l - 1$ или $p_0 = 4l + 1$. В первом случае правая часть равенства (1) делится на

4; учитывая, что левая часть равенства делится только на 2, остается второй вариант. Аналогично, число c не может быть нечетным, иначе скобка $\left(1+p_0^2+\ldots+p_0^{2c}\right)$ делилась бы на 2; значит, $c = 2b$. Получаем еще один **результат Эйлера**: *если нечетное совершенное число существует, то оно имеет вид*

$$n = (4l+1)^{4b+1}\cdot p_1^{2a_1}\cdot p_2^{2a_2}\cdot\ldots\cdot p_s^{2a_s},$$

где $4l+1$, $p_1,\ldots,p_s$ – различные нечетные простые числа.

Отсюда следует, что нечетное совершенное число не может быть квадратом, поскольку первый сомножитель $(4l+1)^{4b+1}$ не является им. Открыто много свойств нечетных совершенных чисел, но в их существование верится с трудом: в промежутке от 1 до 10^{300} их не обнаружено. Можно попытаться доказать отсутствие нечетных совершенных чисел от противного. Предположим, что такое число n_0 существует: $\sigma(n_0)=2n_0$. Рассмотрим число $n=2n_0$, для него $\sigma(n)=$ $=\sigma(2)\cdot\sigma(n_0)=3\cdot 2n_0=3n$. Числа, для которых $\sigma(n)=3n$, называют *трехкратными совершенными*. Например, число $120=2^3\cdot 3\cdot 5$ является трехкратным совершенным. Остается убедиться, что среди трехкратных совершенных нет чисел вида $n=2n_0$, где n_0 – нечетный сомножитель. Возможно, именно эти соображения стимулировали интерес ученых XVII столетия к трехкратным совершенным числам.

Сейчас, наряду с трехкратными, изучают *мультисовершенные,* или *r-кратные совершенные числа*. Это числа, для которых $\sigma(n)=r\cdot n$.

Упражнение 3. Докажите, что сумма обратных величин всех собственных делителей r-кратного совершенного числа равна $r-1$; в частности, для совершенных чисел она равна 1.

В настоящее время открыто более 5 тысяч мультисовершенных чисел различной кратности, все они четные, и, что удивительно, только 6 из них трехкратные, причем эти шесть чисел были обнаружены еще в первой половине XVII веке. Опишем способ получения четных мультисовершеных чисел, исходя не из их кратности, а из показателя степени числа 2.

Предложение: *для любого натурального k найдется мультисовершенное число $n=2^{k-1}m$, где m — нечетный сомножитель.*

Поскольку $\sigma\left(2^{k-1}\right)=2^k-1$, то надо по заданному показателю k найти такие числа m и r, для которых выполняется равенство

$$\left(2^k-1\right)\sigma(m)=r\cdot 2^{k-1}m. \qquad (2)$$

Ясно, что $\sigma(m)$ должно быть кратным 2^{k-1}. Подбор числа m будем вести поэтапно. На первом шаге положим $m=2^k-1$. Если число m окажется простым, то цель достигнута: $\sigma(m)=2^k$, и число $n=2^{k-1}\left(2^k-1\right)$ совершенное. Так будет для $k = 2, 3, 5, 7, 13, 17$.

При составном $m=2^k-1$ разложим его на простые множители $p_0^{\alpha_0}\cdot p_1^{\alpha_1}\cdot\ldots\cdot p_s^{\alpha_s}$. Если показатель простого числа p нечетен, то $\sigma\left(p^\alpha\right)=2^b q$, где нечетное число $q<p^\alpha$ (на самом деле, при $p\ge 3$ имеем $p^{\alpha+1}-1<2p^\alpha(p-1)$, откуда $2^b q<2p^\alpha$). Таким образом, при нечетных показателях число $\sigma(m)=2^a q_1\cdot q_2\cdot\ldots\cdot q_l$ имеет меньшие по сравнению с m нечетные сомножители. Если $a<k-1$, то увеличим m до числа $\left(2^k-1\right)q_1\cdot\ldots\cdot q_l$, что приведет к увеличению показателя степени 2 у числа $\sigma\left(2^{k-1}q_1\cdot\ldots\cdot q_l\right)$. В случае четного показателя число $\sigma\left(p^\alpha\right)=r$ нечетно; добавим его в качестве сомножителя к числу m; если при этом r вновь окажется четной степенью простого нечетного числа (например, $\sigma\left(3^4\right)=11^2$, $\sigma\left(11^2\right)=$ $=7\cdot 19$), то добавим еще сомножитель $\sigma(r)$. И так будем поступать до тех пор, пока в левой части равенства (2) не появится множитель 2^{k-1}. Это на самом деле произойдет, поскольку бесконечно убывать нечетные простые сомножители не могут и на некотором шаге появятся такие простые числа p, для которых $\sigma(p)=2^c$. Но если $p>2^d$, то $\sigma(p)=2^c>2^d$, а так как $\sigma(m)>2^{k-1}$, то нужный показатель достижим. Предложение доказано. Приведем примеры.

1) $k = 4$: из равенств $\sigma\left(2^3\right)=3\cdot 5$, $\sigma(3)=2^2$, $\sigma(5)=2\cdot 3$ получаем трехкратное совершенное число $n=2^3\cdot 3\cdot 5=120$, найденное Мерсенном.

2) $k = 6$: так как $2^6-1=3^2\cdot 7$, то вслед за Ферма приходим к числу $n=2^5\cdot 3\cdot 7$, для которого $\sigma\left(2^5\cdot 3\cdot 7\right)=3^2\cdot 7\cdot 2^2\cdot 2^3=3n$; если вместо 3 взять 3^3, то придем к числу $n=2^5\cdot 3^3\cdot 5\cdot 7$, обнаруженному Декартом, для него $\sigma(n)=\left(3^2\cdot 7\right)\left(2^3\cdot 5\right)(2\cdot 3)2^3=4n$.

Упражнение 4. Для показателей $k = 9, 10, 14, 15$ найдите трехкратные совершенные числа и убедитесь, что у них нет повторяющихся нечетных сомножителей.

Итак, в разложениях на простые множители всех шести известных на сегодняшний день трехратных совершенных чисел множитель 2 имеет степень выше первой, а значит, и на этом пути обнаружить нечетное совершенное число не удалось. Может быть, в этом плане повезет кому-либо из читателей.

А теперь приведем примеры мультисовершенных чисел, в разложении которых встречаются кратные нечетные простые сомножители.

При $k = 8$ имеем $\sigma\left(2^7\right)=3\cdot 5\cdot 17$, $\sigma\left(2^7\cdot 3\cdot 5\cdot 17\right)=$ $=(3\cdot 5\cdot 17)2^2(2\cdot 3)\left(2\cdot 3^2\right)$, появился сомножитель 3^4; поскольку $\sigma\left(3^4\right)=11^2$, $\sigma\left(11^2\right)=7\cdot 19$, приходим к числу $n=2^7\cdot 3^4\cdot 5\cdot 7\cdot 11^2\cdot 17\cdot 19$, для которого $\sigma(n)=5n$. Его нашел Декарт. Можно было на втором этапе взять число $2^7\cdot 3^3\cdot 5\cdot 17$; так как $\sigma\left(3^3\right)=2^3\cdot 5$, $\sigma\left(5^2\right)=31$, то получили бы число $n=2^7\cdot 3^3\cdot 5^2\cdot 17\cdot 31$, для него $\sigma(n)=4n$.

Упражнение 5. Найдите мультисовершенпые числа для показателей $k = 11, 12, 16$.