Итак, мы получили систему трех уравнений с тремя неизвестными v, r, n и тремя постоянными α, β, C_0:

$$E(r) = -\frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 r},$$

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2},$$

$$v^\alpha r^\beta = nC_0.$$

Исключая переменные v и r, найдем зависимость энергии электрона $E(r(n)) = E_n$ от квантового числа n:

$$E_n = -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 m (C_0 n)^{\frac{2}{\alpha}}}\right)^{\frac{\alpha}{2\beta-\alpha}} \sim \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{2}{2\beta-\alpha}}.$$

Для получения зависимости $E_n \sim \frac{1}{n^2}$, необходимо предположить, что

$$2\beta - \alpha = 1, \text{ или } \beta(\alpha) = \frac{1+\alpha}{2}.$$

Очевидно, в рамках размерностного подхода мы ожидаем увидеть целые значения α и β, что обеспечивается нечетными значениями числа α: $\alpha = 1, 3, 5, \ldots$ Однако выбор $\alpha = \beta = 1$ можно интерпретировать в терминах сохранения момента импульса электрона. Это важный аргумент, поскольку сохранение момента импульса орбитального движения в поле ньютоновских или кулоновских сил является основой описания некруговых траекторий. Сам Бор затронул этот вопрос только косвенно, указав на возможность сопоставления круговой и эллиптической орбит электрона с заданной энергией посредством выбора радиуса круговой обиты. С другой стороны, момент импульса имеет размерность постоянной Планка h:

$$rp = rmv = C_* n,$$

где $C_* = mC_0 = \frac{h}{2\pi}$ — постоянная, которая соответствует уравнению, описывающему гипотезу Бора.

Естественно, универсальная постоянная h должна участвовать в уравнении, описывающем излучение в соответствии с фундаментальными идеями Планка. Важно, что во времена Планка и Бора постоянная h все еще оставалась магической величиной, требующей интерпретации, и модель квантования Бора стала еще одним шагом в этом направлении.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КРУЖОК

Эйлер и геометрия

А.ЗАСЛАВСКИЙ

Леонард Эйлер был одним из самых разносторонних математиков всех времен. Разумеется, не осталась обделенной вниманием Эйлера и элементарная геометрия. В этой статье будут описаны основные результаты, связанные с именем Эйлера, и приведены примеры использующих эти результаты задач, которые предлагались на геометрической олимпиаде имени И.Ф.Шарыгина. Следует, впрочем, сказать, что нельзя достоверно утверждать ни того, что указанные результаты принадлежат целиком Эйлеру, ни того, что достижения Эйлера в геометрии этими результатами ограничиваются.

Прямая Эйлера

Теорема 1. *Пусть ABC – произвольный треугольник, M – его центр тяжести (точка пересечения медиан), O – центр описанной окружности, H – ортоцентр (точка пересечения высот). Точка M лежит на отрезке OH и $OM : MH = 1 : 2$.*

Доказательство. Пусть A_0, B_0, C_0 – середины отрезков BC, CA, AB (рис.1). Тогда треугольник $A_0B_0C_0$ гомотетичен треугольнику ABC с центром M и коэффициентом $-\frac{1}{2}$. При этой гомотетии точка H переходит в ортоцентр треугольника $A_0B_0C_0$ – точку O.

Прямая, на которой лежат точки O, M, H, называется *прямой Эйлера* треугольника.

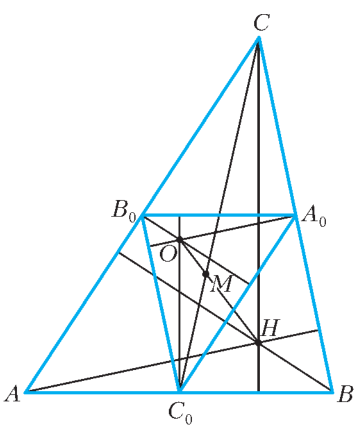


Рис. 1

Задача 1. *В остроугольном неравностороннем треугольнике отметили 4 точки: центры вписанной и описанной окружностей, центр тяжести (точка пересечения медиан) и ортоцентр (точка пересечения высот). Затем сам треугольник стерли. Оказалось, что невозможно установить, какому центру соответствует каждая из отмеченных точек. Найдите углы треугольника.*

Ответ. Треугольник, удовлетворяющий условию задачи, равнобедренный с углами при основании, равными $\arccos\frac{1}{4}$.

Решение. Пусть ABC – исходный треугольник. Если точка I (центр вписанной окружности) не лежит на его прямой Эйлера, то можно однозначно установить роль каждой из точек в треугольнике ABC. Отметим, что эта прямая проходит не более чем через одну вершину треугольника, так что можно считать, например, что точки A и B не лежат на ней. Так как $\angle OBA = \angle HBC = \frac{\pi}{2} - \angle C$, то BI является биссектрисой угла HBO. Значит, точка I лежит на отрезке OH, причем $OI = 2IH$ (иначе роль точек устанавливается однозначно). По свойству биссектрисы получаем, что $BO = 2BH$. Рассуждая аналогично, находим, что $AO = 2AH$. Таким образом, $AH = BH = R/2$, где R – радиус описанной около треугольника окружности. Заметим теперь, что из гомотетии, указанной в доказательстве теоремы 1, следует также, что $AH = 2OA_0$ (и эти отрезки параллельны). Понятно также, что $OA_0 = R\cos\angle A$. Поэтому $AH = 2R\cos\angle A$, и $\cos\angle A = \frac{1}{4}$. Точно так же доказывается, что $\cos\angle B = \frac{1}{4}$.

Окружность Эйлера

Теорема 2. *Середины сторон треугольника, основания его высот и середины отрезков, соединяющих ортоцентр с вершинами, лежат на одной окружности.*

Доказательство. Пусть A_0, B_0, C_0 – середины сторон треугольника, A_1, B_1, C_1 – основания его высот, A_2, B_2, C_2 – середины отрезков AH, BH, CH (рис.2). Поскольку A_0B_0, A_2B_2, A_2B_0, A_0B_2 – средние линии треугольников ABC, ABH, AHC, BHC соответственно, $A_0B_0A_2B_2$ – прямоугольник, т.е. точки A_0, B_0, A_2, B_2 лежат на окружности, диаметрами которой являются отрезки A_0A_2 и B_0B_2. Так как $\angle A_0A_1A_2 = \angle B_0B_1B_2 = 90°$, точки A_1, B_1 также лежат на этой окружности. Таким образом, окружности $A_0A_1A_2$ и $B_0B_1B_2$ совпадают. Аналогично доказывается, что окружность $C_0C_1C_2$ также совпадает с ними.

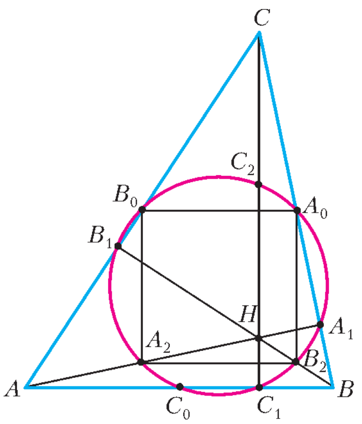


Рис. 2

Указанная окружность называется *окружностью Эйлера* или *окружностью девяти точек* треугольника.

Из теоремы 2 сразу следует, что окружность Эйлера, гомотетична описанной окружности треугольника относительно точек M и H с коэффициентами $-\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{2}$ соответственно.

Задача 2. *На плоскости даны три прямые l_1, l_2, l_3, образующие треугольник, и отмечена точка O – центр описанной окружности этого треугольника. Для произвольной точки X плоскости обозначим через X_i точку, симметричную точке X относительно прямой l_i.*

а) Докажите, что для произвольной точки M прямые, соединяющие середины отрезков O_1O_2 и M_1M_2, O_2O_3 и M_2M_3, O_3O_1 и M_3M_1, пересекаются в одной точке.

б) Где может лежать эта точка пересечения?

Решение. Покажем, что эти прямые пересекаются в точке, лежащей на окружности Эйлера. Пусть ABC – треугольник, образованный прямыми l_i, H – его ортоцентр. Тогда середины отрезков O_1O_2, O_2O_3, O_3O_1 совпадают с серединами отрезков AH, BH, CH (в дальнейшем будем обозначать их A_1, B_1, C_1) и, стало быть, лежат на окружности Эйлера треугольника ABC. Действительно, стороны треугольника $O_1O_2O_3$ параллельны средним линиям треугольника ABC и вдвое больше их, поскольку переводятся друг в друга гомотетией с центром в O и коэффициентом 2. Следовательно, треугольник $O_1O_2O_3$ центрально симметричен треугольнику ABC. Значит, прямая, проходящая через C и середину O_1O_2, параллельна прямой, проходящей через O_3 и середину AB, т.е. совпадает с высотой треугольника ABC, а H является центром гомотетии треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ (рис.3).

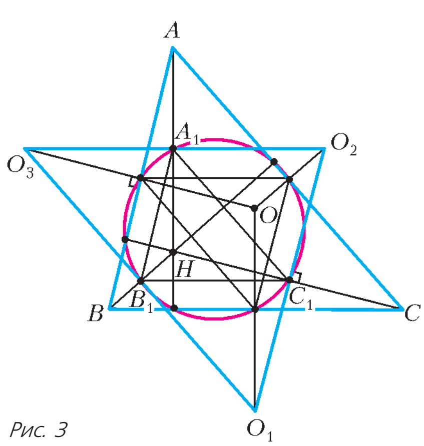


Рис. 3

Пусть, далее, M – произвольная точка, D – середина M_1M_2 (рис. 4). Тогда $\overrightarrow{DC_1} = \left(\overrightarrow{DO_1} + \overrightarrow{DO_2}\right)/2$ и, так как $\overrightarrow{M_1O_1}$ и $\overrightarrow{M_2O_2}$ получаются друг из друга поворотом вокруг точки C на два угла C, вектор $\overrightarrow{DC_1}$ образует с каждым из них угол, равный углу C. Кроме того, $\overrightarrow{M_1O_1}$ и $\overrightarrow{M_2O_2}$ переходят в $\overrightarrow{MO}$ при симметрии относительно AB и AC соответственно, поэтому $\overrightarrow{DC_1}$ и $\overrightarrow{MO}$ образуют равные углы с биссектрисой угла C (а значит, равные углы и с биссектрисой угла C_1 в треугольнике $A_1B_1C_1$).

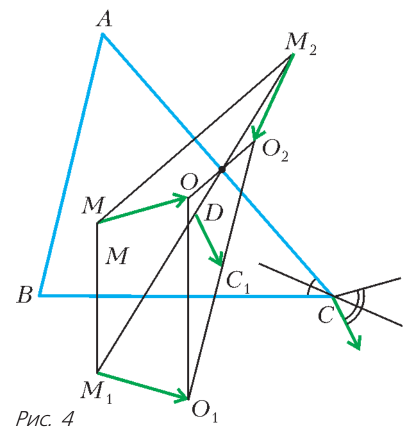


Рис. 4

Проведя аналогичные рассуждения для двух других середин, приходим к выводу, что прямые, соединяющие A_1, B_1, C_1 с серединами сторон треугольника $M_1M_2M_3$, симметричны относительно биссектрис треугольника $A_1B_1C_1$ прямым, проходящим через A_1, B_1, C_1 и параллельным OM. В заключение воспользуемся следующей известной теоремой планиметрии: тройка прямых, выходящих из вершин треугольника, пересекается в одной точке, расположенной на описанной около этого треугольника окружности, тогда и только тогда, когда прямые, симметричные данным относительно биссектрис соответствующих углов, параллельны. (Несложное доказательство использует простой подсчет углов.)

Согласно этой теореме, тройка прямых в нашей задаче пересекается на описанной около треугольника $A_1B_1C_1$ окружности, т.е. на окружности Эйлера исходного треугольника.

Окружность Эйлера обладает также рядом весьма красивых, в том числе и неэлементарных свойств. Например, все описанные около треугольника равносторонние гиперболы проходят через его ортоцентр, а их центры лежат на окружности Эйлера. Это позволяет мгновенно решить следующую задачу.

Задача 3. *Даны четыре точки A, B, C, D. Точки A_1, B_1, C_1, D_1 – ортоцентры треугольников BCD, CDA, DAB, ABC. Точки A_2, B_2, C_2, D_2 – ортоцентры треугольников $B_1C_1D_1$, $C_1D_1A_1$, $D_1A_1B_1$, $A_1B_1C_1$, и т.д. Докажите, что все окружности, проходящие через середины сторон таких треугольников, пересекаются в одной точке.*

Решение. Проведя равностороннюю гиперболу через точки A, B, C, D, получим, что все указанные в задаче точки лежат на этой гиперболе, а все окружности проходят через ее центр.

Отметим, что задача допускает и элементарное решение. Найдите его самостоятельно.

Формулы Эйлера

Теорема 3. *Пусть O, I – центры описанной и вписанной окружностей треугольника, R, r – их радиусы. Тогда*

$$OI^2 = R^2 - 2Rr .$$

Это равенство называется *формулой Эйлера.*

Доказательство. Проведем прямую через I и вершину C треугольника ABC и найдем вторую точку C' пересечения этой прямой с описанной около ABC окружностью (рис.5).

Так как $C'A = C'B$, $\angle AIB = \pi - (\angle A + \angle B)/2 = (\pi + \angle C)/2$ и $\angle AC'B = \pi - \angle C$, C' – центр окружности, описанной около треугольника AIB. Значит, $IC' = C'B = 2R\sin\dfrac{\angle C}{2}$. С другой стороны, $IC = r\Big/\sin\dfrac{\angle C}{2}$. Следовательно,

$$R^2 - OI^2 = CI \cdot C'I = 2Rr .$$

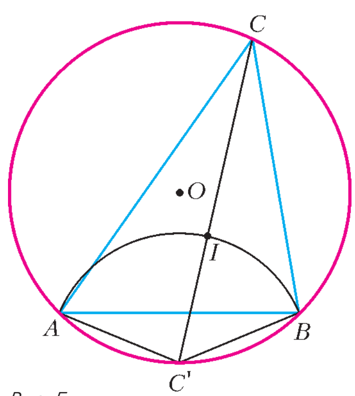


Рис. 5

Пользуясь формулой Эйлера, можно доказать **теорему Понселе** для треугольника.

Теорема 4. *Пусть дан треугольник ABC. Из произвольной точки C' на его описанной окружности проведем касательные к вписанной окружности треугольника и найдем вторые точки A', B' их пересечения с описанной окружностью. Тогда прямая $A'B'$ также касается вписанной окружности.*

Доказательство. Предположим противное. Например, пусть $A'B'$ не пересекает вписанную окружность треугольника ABC. Будем увеличивать угол $A'C'B'$ так, чтобы прямая $C'I$ оставалась его биссектрисой. Тогда расстояние от I до прямых $C'A'$ и $C'B'$ будет увеличиваться, а до прямой $A'B'$ – уменьшаться, и в какой-то момент окружность с центром I и радиусом $r' > r$ окажется вписанной в треугольник $A'B'C'$. Но из формулы Эйлера следует, что радиусы вписанных окружностей треугольника ABC и $A'B'C'$ равны. Противоречие. Случай, когда $A'B'$ пересекает вписанную окружность, рассматривается аналогично.

Аналоги формулы Эйлера верны и для вневписанных окружностей, касающихся одной стороны треугольника и продолжений двух других сторон. Например, если окружность с центром I_c и радиусом r_c касается стороны AB и продолжений сторон AC, BC, то

$$OI_c^2 = R^2 + 2Rr_c .$$

Доказательство совершенно аналогично доказательству теоремы 3 (проведите его самостоятельно). Разумеется, для вневписанных окружностей верен и аналог теоремы Понселе.

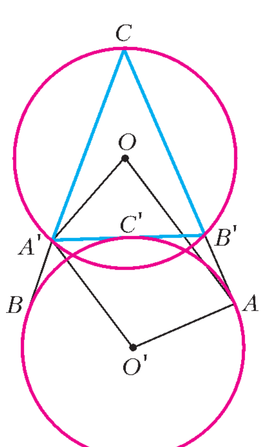


Рис. 6

Задача 4. *Две окружности радиуса 1 пересекаются в точках X, Y, расстояние между которыми также равно 1. Из точки C одной окружности проведены касательные CA, CB к другой. Прямая CB вторично пересекает первую окружность в точке A'. Найдите расстояние AA'.*

Решение. Пусть O – центр окружности, на которой лежит точка C, O' – центр другой окружности (рис.6). Поскольку $OO' = \sqrt{3}$, данные окружности являются описанной и вневписанной для треугольника $CA'B'$, где B' – вторая точка пересечения прямой CA с первой окружностью. Пусть прямая $A'B'$ касается второй окружности в точке C' . Тогда

$$\angle A'OA = \angle AO'C' + \frac{1}{2}\angle C'O'B =$$
$$= 2\angle ABC' + \angle C'AB = \angle CB'A' + \frac{1}{2}\angle CA'B' ,$$
$$\angle O'A'O = \angle O'A'B' + \angle B'A'O = \frac{\pi}{2} - \angle C'O'A' + \frac{\pi}{2} - \angle BCA =$$
$$= \pi - \angle BCA - \frac{1}{2}\angle CA'B' = \angle CB'A' + \frac{1}{2}\angle CA'B' .$$

Так как $O'A = OA'$, то $AO'A'O$ – равнобедренная трапеция, и $AA' = OO' = \sqrt{3}$.

Задача 5. *Пусть I – центр сферы, вписанной в тетраэдр ABCD, A', B', C', D' – центры сфер, описанных около тетраэдров IBCD, ICDA, IDBA, IABC соответственно. Докажите, что сфера, описанная около ABCD, целиком лежит внутри сферы, описанной около $A'B'C'D'$.*

Решение. Пусть R, r – радиусы описанной и вписанной сфер тетраэдра $ABCD$, O – центр описанной сферы $ABCD$, L – центр описанной окружности треугольника ABC, H – проекция I на плоскость ABC. Из условия следует, что точки O и D' лежат на перпендикуляре к плоскости ABC, проходящем через L, поэтому прямые OD' и IH параллельны. Кроме того, $D'A = D'I$ (как радиусы сферы, описанной около $IABC$), $OA = R$, $IH = r$.

Дважды применим теорему косинусов – к треугольникам $AD'O$ и $OD'I$:

$$R^2 = D'A^2 + D'O^2 - 2D'A \cdot D'O\cos\angle AD'O ,$$
$$OI^2 = D'I^2 + D'O^2 - 2D'I \cdot D'O\cos\angle ID'O .$$

Вычитая из первого равенства второе, получим

$$R^2 - OI^2 = 2D'O\left(D'A\cos\angle AD'O - D'I\cos\angle ID'O\right).$$

Следовательно, $D'O = \left(R^2 - OI^2\right)\big/(2r)$. Аналогично доказывается, что и точки A', B', C' удалены от точки O на такое же расстояние. Таким образом, сферы $ABCD$ и $A'B'C'D'$ концентричны (т.е. их центры совпадают) и $D'O = \rho$ – радиус сферы, описанной около $A'B'C'D'$.

Докажем, что $\rho > R$. Для этого проведем плоскость DOI. Она пересекает описанную и вписанную сферы по окружностям с центрами O, I и радиусами R, r, а тетраэдр – по некоторому треугольнику. Вершина D этого треугольника лежит на большей окружности, а из двух других вершин по крайней мере одна лежит внутри этой окружности. Кроме того, меньшая окружность целиком лежит внутри этого треугольника и внутри большей окружности. Поэтому, если провести через D хорды DX_1 и DY_1 большей окружности, касающейся меньшей, то меньшая окружность окажется строго внутри треугольника DX_1Y_1 . Аналогично доказательству теоремы Понселе получаем, что существует треугольник $DX'Y'$, вписанный в большую окружность и описанный около некоторой окружности с центром I и радиусом $r' > r$, для которого по формуле Эйлера $OI' = R^2 - 2Rr'$. Следовательно, $r' = \left(R^2 - OI^2\right)\big/(2R) > r$.

Понятно также, что $\rho > r'$.

Теорема 5. *Пусть O, R – центр и радиус описанной около треугольника ABC окружности; P – произвольная точка внутри треугольника; A_1, B_1, C_1 – проекции P на прямые BC, CA, AB; S, S_1 – площади треугольников ABC и $A_1B_1C_1$. Тогда*

$$\frac{S_1}{S} = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{OP^2}{R^2}\right).$$

Это соотношение также называется *формулой Эйлера.*

Доказательство. Пусть A_2, B_2, C_2 – вторые точки пересечения прямых AP, BP, CP с описанной окружностью треугольника ABC (рис.7).

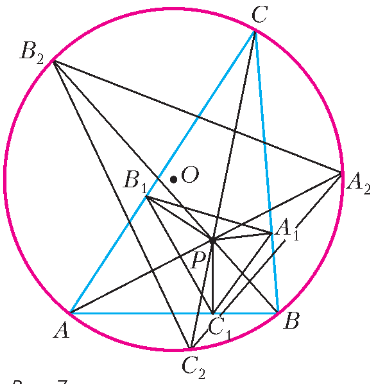


Рис. 7

Так как четырехугольник BC_1PA_1 – вписанный, $\angle PC_1A_1 = \angle CBP = \angle CC_2B_2$. Аналогично, $\angle PC_1B_1 = \angle CC_2A_2$, а значит, $\angle A_1C_1B_1 = \angle A_2B_2C_2$. Таким образом, соответствующие углы треугольников $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ равны, т.е. эти треугольники подобны, и для их площадей S_1, S_2 выполняется равенство

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{A_1C_1 \cdot B_1C_1}{A_2C_2 \cdot B_2C_2}.$$

С другой стороны, так как треугольники ABC и $A_2B_2C_2$ вписаны в одну окружность, то

$$\frac{S_2}{S} = \frac{A_2B_2 \cdot A_2C_2 \cdot B_2C_2}{AB \cdot AC \cdot BC}.$$

Кроме того, из вписанности четырехугольников BC_1PA_1, AC_1PB_1 получаем $A_1C_1 = PB \sin\angle B = PB \cdot AC/(2R)$, $B_1C_1 = PA \cdot BC/(2R)$, а из подобия треугольников PA_2B_2 и PBA –

$$\frac{A_2B_2}{AB} = \frac{PB_2}{PA}.$$

В результате имеем

$$\frac{S_1}{S} = \frac{A_1C_1}{AC}\frac{B_1C_1}{BC}\frac{A_2B_2}{AB} = \frac{PB}{2R}\frac{PA}{2R}\frac{PB_2}{PA} = \frac{PB \cdot PB_2}{4R^2} = \frac{R^2 - OP^2}{4R^2}.$$

Отметим, что если считать площадь треугольника положительной или отрицательной, в зависимости от его ориентации, то формула Эйлера будет верна для любой точки плоскости. В частности, если точка P лежит на описанной окружности треугольника ABC, то площадь треугольника, образованного ее проекциями, будет равна нулю, т.е. эти проекции лежат на одной прямой. Эта прямая называется *прямой Симсона.*

КОЛЛЕКЦИЯ ГОЛОВОЛОМОК

Карандашам тесно

(Начало см. на 2-й с. обложки)

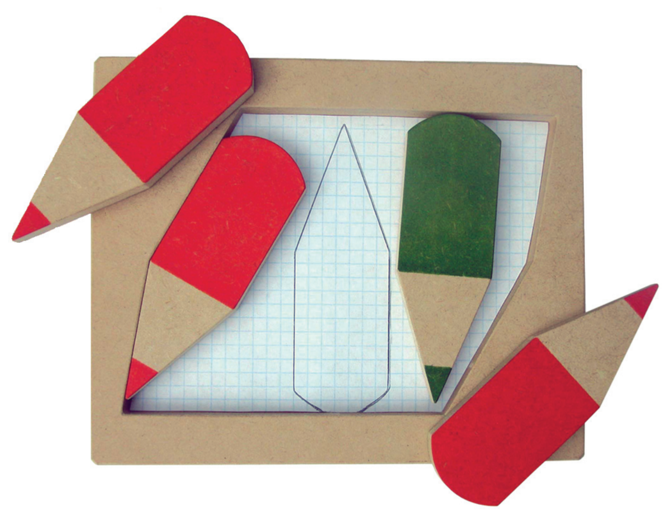
Эди Нагата впервые заинтересовался предметными головоломками в 1990 году и никогда не был на всемирных встречах изобретателей головоломок. Поэтому он никак не мог предполагать, что среди сотен новых игрушек его «Pencil Case» будет назван лучшей головоломкой 2001 года. У других изобретателей он видел игрушки, сделанные гораздо изящнее и красивее, труднее в решении или оригинальнее в постановке задачи. Тем не менее, победа Эди была заслуженной.

Международное жюри присудило ему главный приз за лучшее сочетание качеств, которые ценятся в этом необычном жанре изобретательства.

Эди Нагата придумал простую задачу, понятную даже ребенку, хотя решить ее может не каждый взрослый. В то же время она по силам и детям. Игрушка состоит из четырех одинаковых деталей и очень проста по устройству.

Напомним, что задача состоит в том, чтобы переложить четыре карандаша из одной коробочки в другую, приклеенную к первой донышком. Площади обеих коробочек одинаковы, а формы – разные. В этом и состоит особенность и трудность решения головоломки.

Чтобы вам было проще изготовить игрушку по фотографии в журнале, на дно второй коробочки положен листок клетчатой бумаги, повторяющий форму дна и контур карандаша (все карандаши одинаковые). По шаблону вы легко вырежете детали удобного для вас размера, а затем раскрасите их. «Pencil Case», показанный на фотографиях, сделан самим изобретателем Эди Нагата из древесно-волокнистой плиты толщиной 9 мм. Размеры его головоломки $180 \times 45 \times 20$ мм.



На первый взгляд может показаться, что при укладке в коробочку четырех карандашей не обязательно думать, как это сделать. Достаточно разными способами случайным образом укладывать карандаши как можно теснее друг к другу. Запаситесь терпением, и задача будет решена!

За что же тогда наградили игрушку? Один из членов жюри запасся этим самым терпением и уложил карандаши в коробочку за час. Другой же обратил внимание на то, что все карандаши одинаковые и симметричные и коробочка тоже обладает симметрией (центральной). Значит, решение, скорее всего, должно быть симметричным – точнее, центрально-симметричным. Следуя этой логике, он решил задачу за... минуту.

А.Калинин