Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 1 июня 2007 года по адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» №2–2007» и номера задач, решения которых Вы посылаете, например «М2036» или «Ф2043». В графе «От кого» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем Вашим адресом и необходимый набор марок (в этом конверте Вы получите результаты проверки решений).

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с Вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «Задачник «Кванта», новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором Вы учитесь.

Задачи М2040 предлагалась на XXVIII Турнире городов.

Задачи М2036 – М2040, Ф2043–Ф2047

М2036. Андрей, Боря и Саша поделили 20 монет так, что не все монеты достались одному из них. После этого каждую минуту один из ребят отдает по одной монете двум другим. Через некоторое время у Андрея, Бори и Саши оказалось a, b и c монет соответственно. Найдите количество возможных троек (a, b, c).

К.Каибханов

М2037. Диагонали вписанного четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке E; точки K и M – середины сторон AB и CD; точки L и N – проекции точки E на стороны BC и AD. Докажите, что прямые KM и LN перпендикулярны.

Фольклор

М2038. Фома и Ерема делят кучу из кусков сыра. Сначала Фома, если хочет, выбирает один кусок и режет его на два. Затем он раскладывает сыр на две тарелки. После этого Ерема выбирает одну тарелку, и они делят сыр на ней, беря себе по очереди по куску; начинает Ерема. Точно так же они делят сыр со второй тарелки, только первым начинает Фома. Докажите, что Фома всегда может действовать так, чтобы получить не менее половины сыра (по весу).

А.Шаповалов

М2039. Докажите, что для каждого натурального $n > 1$ найдется натуральное z, не представимое в виде $x^n - y!$, где x и y – натуральные.

Н.Агаханов

М2040. Положительные числа $x_1, x_2, \ldots, x_k$ удовлетворяют неравенствам

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_k^2 < \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_k}{2},$$

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_k < \frac{x_1^3 + x_2^3 + \ldots + x_k^3}{2}.$$

а) Докажите, что $k > 50$.

б) Укажите пример таких чисел для какого-нибудь k.

в*) Найдите наименьшее k, для которого такой пример возможен.

А.Толпыго

Ф2043. Груз массой 3 кг поднимают и опускают при помощи легкой нити и блока, ось которого закреплена неподвижно. Однажды блок «заело» – он перестал вращаться вокруг своей оси. При этом удается поднимать груз силой 40 Н, приложенной к свободному концу нити, и груз в этом случае движется вверх с постоянной скоростью. Какой груз нужно подвесить к свободному концу нити, вместо того чтобы тянуть нить, чтобы груз массой 3 кг двигался с той же скоростью вниз? Трение между нитью и блоком – сухое, коэффициент трения не зависит от прижимающего усилия.

А.Блоков

Ф2044. Гантелька состоит из тонкого легкого стержня длиной L и двух одинаковых маленьких шариков массой M каждый на концах стержня. В начальный момент гантелька стоит в углу комнаты вертикально, опираясь на пол и вертикальную стену. От очень малого толчка гантелька начинает двигаться, при этом один из концов скользит по полу, а другой продолжает касаться стены. Найдите силы, с которыми гантелька действует на пол и стену в тот момент, когда она составляет угол $45°$ с вертикалью. Трения нет.

А.Зильберман

Ф2045. Массивный клин с углом $60°$ при основании может двигаться по гладкому горизонтальному столу. На наклонной поверхности клина находится маленькая тележка. Когда тележка едет по неподвижному клину – мы его удерживаем, приложив к нему горизонтальную силу, – она давит на его поверхность силой f. Увеличим горизонтальную силу, действующую на клин, так, чтобы он двигался по горизонтали с постоянным ускорением. Найдите величину этой силы, если известно, что сила, с которой тележка давит на поверхность клина, стала вчетверо больше по величине. Масса клина в 5 раз больше массы тележки.

З.Рафаилов

Ф2046. В двух одинаковых сосудах находятся одинаковые массы кислорода и гелия. Давление кислорода 1 атм, давление гелия 2 атм. Сосуды соединяют тонкой трубкой, и газы перемешиваются. Каким станет давление в системе после установления равновесия? Теплообмен с окружающей средой пренебрежимо мал. Молярная масса кислорода 32 г/моль, гелия 4 г/моль.

А.Повторов

Ф2047. Многопредельный ампер-вольтметр для измерений в цепях постоянного тока сделан на основе точного микроамперметра с током полного отклонения 100 мкА и сопротивлением 850 Ом. При помощи многопозиционного переключателя к нему подключаются точно подобранные резисторы — добавочные сопротивления для измерения напряжений и шунты для измерения токов. Пределы измерения напряжений 1 В, 10 В и 100 В, пределы измерения токов 1 мА, 10 мА и 100 мА. Хотелось бы иметь более «подробные» пределы измерений, но кардинально переделывать точный и удобный прибор совсем не хочется. На передней панели прибора есть отдельный, не используемый для его работы переключатель на два положения – у переключателя три контакта. В одном его положении соединены между собой контакты *1* и *2*, а контакт *3* отключен, при другом положении отключен контакт *2*, а соединены контакты *1* и *3*. Придумайте и рассчитайте простую схему, которая позволяла бы «растянуть» шкалы прибора ровно в три раза на всех пределах измерения (шкала измерения напряжений 10 В превращается в 30 В, шкала измерения тока 1 мА – в 3 мА и т.д.) в одном из положений этого переключателя, а в другом положении все должно оставаться «как было». Кстати, эти положения переключателя можно обозначить *x1* и *x2*.

Р.Александров

Решения задач М2011–М2020, Ф2028–Ф2032

М2011. *Натуральные числа от 1 до 200 разбили на 50 множеств. Докажите, что в одном из них найдутся три числа, являющиеся длинами сторон некоторого треугольника.*

Рассмотрим числа 100, 101, ..., 200. Так как их всего 101, то какие-то три из них попадут в одно множество. Сумма любых двух из этих трех чисел больше 200, и, следовательно, больше третьего числа. Значит, существует треугольник с соответствующими длинами сторон, что и требовалось доказать.

М.Мурашкин

М2012. *В тетраэдре ABCD из вершины A опустили перпендикуляры AB', AC', AD' на плоскости, делящие двугранные углы при ребрах CD, BD, BC пополам. Докажите, что плоскость $B'C'D'$ параллельна плоскости BCD.*

Продолжим отрезок AB' до пересечения с плоскостью BCD в точке B''. Так как плоскости BCD и ACD симметричны относительно биссекторной плоскости, то $AB' = B'B''$. Аналогично по точкам C' и D' строим точки C'' и D''.

При гомотетии с центром A и коэффициентом $\frac{1}{2}$ плоскость $B''C''D'' = BCD$ переходит в плоскость $B'C'D'$, поэтому $B'C'D' \parallel BCD$, что и требовалось доказать.

А.Бадзян

М2013. *При каких натуральных n найдутся такие положительные рациональные, но не целые числа a и b, что оба числа a + b и $a^n + b^n$ целые?*

Ответ: при всех нечетных n.

Если n нечетно, то положим $a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{2^n - 1}{2}$. Тогда $a + b$ целое, и

$$a^n + b^n = (a+b)\left(a^{n-1} - a^{n-2}b + \ldots + b^{n-1}\right) =$$
$$= 2^{n-1}\left(a^{n-1} - a^{n-2}b + \ldots + b^{n-1}\right);$$

знаменатели слагаемых в скобках равны 2^{n-1}, поэтому число $a^n + b^n$ также целое.

Пусть n четное, $n = 2k$ для некоторого натурального k. Предположим, что требуемые числа a, b нашлись. Так как их сумма целая, то знаменатели в их несократимой записи равны, т.е. $a = \frac{p}{d}$, $b = \frac{q}{d}$, где $d > 1$, $\text{НОД}(p,d) = \text{НОД}(q,d) = 1$; при этом $p + q$ кратно d. Тогда

$$p^n + q^n = \left(p^{2k} - q^{2k}\right) + 2q^{2k} =$$
$$= \left(p^2 - q^2\right)\left(p^{2k-2} + p^{2k-4}q^2 + \ldots + q^{2k-2}\right) + 2q^{2k} =$$
$$= (p+q)K + 2q^{2k},$$

где $K = (p-q)\left(p^{2k-2} + p^{2k-4}q^2 + \ldots + q^{2k-2}\right)$ – целое число. Поскольку $a^n + b^n = \frac{p^n + q^n}{d^n}$ целое, то $p^n + q^n$ делится на d^n. В частности, $p^n + q^n$ делится на d, а так как $p + q$ делится на d, то и $2q^{2k}$ делится на d. Так как $\text{НОД}(q,d) = 1$, то 2 делится на d, и возможно лишь d = 2. Если d = 2, то p^n и q^n – квадраты нечетных чисел, следовательно, дают остаток 1 при делении на 4. Поэтому $p^n + q^n$ не делится на 4, а должно делиться на 2^{2k}. Противоречие.

В.Сендеров

М2014. *На дугах AB и BC окружности, описанной около треугольника ABC, выбраны точки K и L соответственно так, что прямые KL и AC параллельны. Докажите, что центры вписанных окружно-*