Пропорциональность дифференциалов в физических задачах

К.РЫБ

Математическое моделирование физических процессов часто приводит к дифференциальным уравнениям, связывающим между собой переменные величины и их производные. Решение подобных уравнений представляет математическую трудность для учащихся. Однако возможно применение обходного пути, не требующего владения методами интегрирования дифференциальных уравнений.

Так, если при моделировании какого-либо физического процесса устанавливается пропорциональная взаимосвязь двух изменяющихся физических величин, то можно говорить о пропорциональности их дифференциалов. При этом появляется возможность свести решение к конечным приращениям взаимосвязанных величин на основе пропорции. Суммируя бесконечно малые в полученном выражении, которое мы будем называть *пропорциональностью дифференциалов*, и вынося коэффициент за знак суммирования, получим связь между конечными изменениями величин. Если изменение одной из величин в ходе процесса задано условием задачи, то полученное выражение однозначно определит изменение и второй величины.

А теперь – несколько конкретных задач.

Задача 1. *Модели корабля массой m сообщают некоторую начальную скорость* v_0. *Сила сопротивления воды пропорциональна скорости:* $F_c = -kv$. *Какое расстояние пройдет модель до места, где ее скорость уменьшится вдвое? Каково общее расстояние, которое пройдет модель?*

Сила сопротивления определяет быстроту убыли скорости. С учетом условия и второго закона Ньютона запишем

$$F_c = -kv\,,\quad F_c = m\frac{dv}{dt}\,,$$

или

$$m\frac{dv}{dt} = -kv\,.$$

Умножим полученное уравнение на dt и учтем, что $vdt = ds$, где s – пройденное расстояние. При этом получим

$$ds = -\frac{m}{k}dv\,.$$

Два дифференциала связаны постоянным коэффициентом, который при суммировании можно вынести, и мы найдем связь между конечными приращениями:

$$\Delta s = -\frac{m}{k}\Delta v\,.$$

Так как по условию в первом случае $\Delta v_1 = -\frac{v_0}{2}$ и $\Delta s = s_1$, то

$$s_1 = \frac{mv_0}{2k}\,.$$

Аналогично получаем ответ для второго случая:

$$s_2 = \frac{mv_0}{k}\,.$$

Попробуйте решить задачу разделением переменных и интегрированием и сравните трудоемкости двух способов решения.

Задача 2. *По горизонтальным параллельным рельсам, расстояние между которыми L, скользит без трения перемычка массой m. Рельсы соединены резистором сопротивлением R и находятся в вертикальном однородном магнитном поле с индукцией B. Перемычке сообщают скорость* v_0. *Какое расстояние она пройдет до остановки?*

ЭДС индукции в движущейся со скоростью v перемычке создает индукционный ток:

$$e_i = BLv\,,\quad i = \frac{e_i}{R} = \frac{BLv}{R}\,.$$

Сила Ампера, действующая на проводник с током, тормозит движение перемычки:

$$F_A = iBL\sin\alpha\,,\quad F_A = -m\frac{dv}{dt}\,.$$

Таким образом, в нашем случае ($\alpha = 90^\circ$) получаем

$$-m\frac{dv}{dt} = \frac{B^2L^2}{R}v\,.$$

В этом уравнении мы видим признак экспоненциальной убыли скорости: быстрота уменьшения скорости пропорциональна самой скорости. Это – дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными. Но мы не будем его интегрировать (по методу разделения переменных), а сделаем следующее.

Умножим наше уравнение на dt и учтем, что $vdt = ds$, где s – пройденное расстояние. Тогда

$$ds = -\frac{mR}{B^2L^2}dv\,.$$

Получили пропорциональность дифференциалов. Суммирование позволит перейти к конечным приращениям:

$$\Delta s = -\frac{mR}{B^2L^2}\Delta v\,,$$

и, поскольку $\Delta v_{общ} = -v_0$, перемещение до остановки будет равно

$$s_{общ} = \frac{mRv_0}{B^2L^2}\,.$$

Задача 3. *Цепочку массой m и длиной l подвесили за два конца к потолку. При этом оказалось, что в местах закрепления цепочка образует углы* α *с вертикалью. Найдите расстояние* H_0 *от нижней точки цепочки до потолка.*

Пусть сила натяжения в нижней точке цепочки T_O, а в точке подвеса T_A (рис.1). К половине цепочки еще приложена сила тяжести $\frac{mg}{2}$. Запишем условие равновесия сил, действующих на половину цепочки, в проекциях на горизонтальную и вертикальную оси:

$$T_O - T_A\sin\alpha = 0\,,$$

$$T_A\cos\alpha - \frac{mg}{2} = 0\,.$$

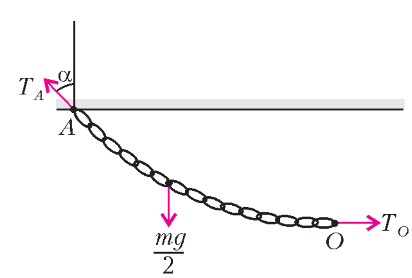

Рис. 1

Отсюда

$$T_A = \frac{mg}{2\cos\alpha} \text{ и } T_O = \frac{mg}{2}\operatorname{tg}\alpha .$$

Для любого промежуточного звена цепочки, образующего с вертикалью угол φ, который меняется от $90°$ вблизи точки O до α вблизи точки A, можно записать условие равновесия для проекций сил на направление звена. Пусть длина звена dl, тогда его сила тяжести равна $dP = \frac{mg}{l}dl$. Прирост силы натяжения на элементе звена равен $dT = \frac{mg}{l}dl\cos\varphi$. Обратим внимание на то, что $dl\cos\varphi = dh$ определяет прирост высоты на элементе звена. Тогда

$$dT = \frac{mg}{l}dh .$$

Мы получили связь между приростом высоты и приростом модуля силы натяжения в виде пропорциональности дифференциалов. Суммируя, получаем $\sum dh = H_0$ – высоту провиса и $\sum dT = T_A - T_O$ – разность модулей сил натяжения. Таким образом,

$$T_A - T_O = \frac{mg}{l}H_0 ,$$

или

$$\frac{mg}{2}\left(\frac{1}{\cos\alpha} - \operatorname{tg}\alpha\right) = \frac{mg}{l}H_0 .$$

Отсюда находим

$$H_0 = \frac{l(1-\sin\alpha)}{2\cos\alpha} .$$

Примечание. Существует энергетический метод решения этой задачи. Разумеется, он приводит к тому же результату. Убедитесь в этом самостоятельно.

Задача 4. *В неоднородном магнитном поле с индукцией $B = \alpha x$ $(x > 0)$ стартует частица массой m и зарядом q с начальной скоростью v_0, направленной вдоль оси X (рис.2). Определите максимальное смещение частицы вдоль оси X.*

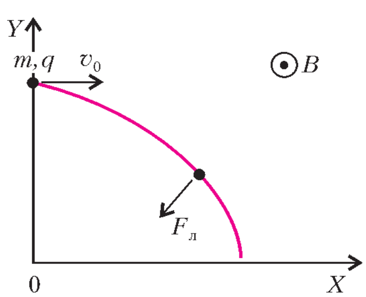

Рис. 2

Со стороны магнитного поля на частицу будет действовать сила Лоренца. Она перпендикулярна скорости и меняет только ее направление. Однако в неоднородном поле скорость будет нарастать, что вызовет уменьшение радиуса кривизны траектории, поэтому траектория частицы не будет дугой окружности.

Заметим, что проекция силы Лоренца на ось Y меняет соответствующую составляющую скорости частицы:

$$F_{\text{Л}y} = m\frac{dv_y}{dt} .$$

Но эта проекция силы зависит от перпендикулярной к ней составляющей скорости частицы v_x:

$$F_{\text{Л}y} = qB(x)v_x .$$

Отсюда получаем

$$m\frac{dv_y}{dt} = qB(x)v_x .$$

Умножая на приращение времени, находим

$$mdv_y = qB(x)dx .$$

Поскольку $B(x) = \alpha x$, то

$$dv_y = \frac{q\alpha}{m}xdx , \text{ или } dv_y = \frac{\alpha q}{m}d\left(\frac{x^2}{2}\right).$$

Мы получили пропорциональность дифференциалов. Смещение частицы вдоль оси X достигнет максимума, когда проекция скорости частицы на эту ось уменьшится до нуля. Тогда проекция скорости частицы на ось Y достигнет значения модуля скорости. Для этого случая

$$\sum dv_y = v_0 , \text{ и } v_0 = \frac{\alpha q}{m}\frac{x_{\max}^2}{2} .$$

Отсюда находим искомое смещение частицы:

$$x_{\max} = \sqrt{\frac{2v_0 m}{\alpha q}} .$$

Задача 5. *Две частицы с одинаковыми массами m и зарядами q, равными по модулю, но противоположными по знаку, помещены в однородное магнитное поле, индукция которого B перпендикулярна отрезку R, соединяющему заряды. Найдите расстояние между частицами в момент наибольшего сближения, если их стартовые скорости нулевые. Индукция магнитного поля достаточна для предотвращения столкновения.*

Пусть ось X направлена по линии, соединяющей заряды. Вдоль этой оси действуют силы кулоновского притяжения, разгоняющие частицы. Прирост кинетической энергии частиц определяется убылью потенциальной энергии кулоновского притяжения:

$$2\frac{mv^2}{2} = -kq^2\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r}\right),$$

откуда

$$v = q\sqrt{\frac{k}{m}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right)} .$$

Сила Лоренца, перпендикулярная скорости, изменяет ее направление. Проекция ускорения частиц на ось Y обусловлена соответствующей проекцией силы Лоренца:

$$m\frac{dv_y}{dt} = F_{\text{Л}y} , \text{ или } m\frac{dv_y}{dt} = qBv_x .$$

Умножая на приращение времени, получим

$$dv_y = \frac{qB}{m}dx$$

– между изменением проекции скорости и сближением частиц зависимость пропорциональная. Для конечных приращений учтем следующее. Частицы не столкнутся, если успеют выйти на параллельные курсы вдоль оси Y при $R - r > 0$. Конечные приращения для этого условия равны $\sum dv_y = v$ и $\sum dx = \frac{R-r}{2} > 0$. Тогда

$$v = \frac{qB}{2m}(R - r) .$$

С учетом найденного ранее выражения для скорости v, получим зависимость минимального сближения частиц r от начального расстояния и индукции магнитного поля. Действительно,

$$\frac{q^2B^2(R-r)^2}{4m^2} = \frac{q^2k(R-r)}{mRr} ,$$

сократим и приведем к квадратному уравнению, подставив $k = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}$:

$$r^2 - Rr + \frac{m}{\pi\varepsilon_0 B^2 R} = 0 \text{, и } r = \frac{R}{2}\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4m}{\pi\varepsilon_0 B^2 R^3}}\right).$$

Положительный дискриминант определяет значение индукции магнитного поля, предотвращающее столкновение частиц. При этом для r выбирается больший корень, так как при достижении этого расстояния сближение частиц прекращается. Магнитная и кулоновская силы, действующие на частицу, компенсируются. Окончательно получим

$$r = \frac{R}{2}\left(1 + \sqrt{1 - \frac{4m}{\pi\varepsilon_0 B^2 R^3}}\right).$$

Задача 6. *В схеме на рисунке 3 замыкают вначале ключ K_1, а после установления стационарного режима замыкают ключ K_2. Какой заряд протечет через резистор сопротивлением R после замыкания ключа K_2? Величины R, r, $\mathscr{E}$, L_1, L_2 считать заданными.*

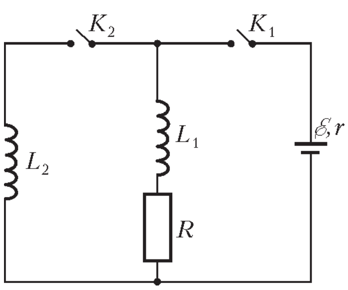

Рис. 3

После замыкания ключа K_1 ток стационарного режима будет равен $I_1 = \dfrac{\mathscr{E}}{R + r}$. После замыкания ключа K_2 катушка индуктивностью L_2 будет осуществлять шунтирующее действие, так как она обладает пренебрежимо малым активным сопротивлением. В ней установится ток короткого замыкания $I_2 = \dfrac{\mathscr{E}}{r}$, а ток в первой катушке уменьшится до нуля.

По второму правилу Кирхгофа для контура из двух катушек, $e_2 + e_1 = i_1 R$. Но $e_2 = -L_2 \dfrac{di_2}{dt}$ и $e_1 = -L_1 \dfrac{di_1}{dt}$. Тогда

$$-L_2 \frac{di_2}{dt} - L_1 \frac{di_1}{dt} = i_1 R.$$

Отметим, что убыль тока i_1 дает отрицательную производную. Умножим полученное равенство на dt и заметим, что $i_1 dt = dq$, $\dfrac{di_2}{dt} dt = di_2$, $\dfrac{di_1}{dt} dt = di_1$. Получим

$$-\frac{1}{R}\left(L_2 di_2 + L_1 \left|di_1\right|\right) = dq.$$

Учитывая общие изменения токов в процессах и переходя к конечным приращениям, найдем искомый заряд:

$$q_{\text{общ}} = \frac{\mathscr{E}}{R}\left(\frac{L_2}{r} + \frac{L_1}{R + r}\right).$$

Задача 7. *Параллельно соединенные катушка индуктивностью L и резистор сопротивлением R подключены через ключ к батарее с ЭДС $\mathscr{E}$ и внутренним сопротивлением r (рис.4). Какой заряд протечет через резистор после замыкания ключа? Сопротивлением катушки пренебречь.*

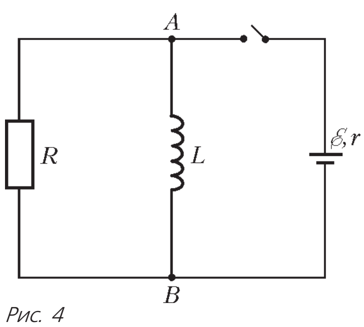

Рис. 4

В момент замыкания ключа через резистор течет ток $I_0 = \dfrac{\mathscr{E}}{R + r}$, а ток в катушке равен нулю. В последующее время ток через катушку будет нарастать до значения тока короткого замыкания $I_{\text{к}} = \dfrac{\mathscr{E}}{r}$. При этом напряжение между точками A и B схемы будет убывать до нуля.

Для какого-либо момента времени переходного периода выполняется равенство

$$-L \frac{di_2}{dt} = i_1 R.$$

Умножая на dt, получим пропорциональность дифференциалов:

$$-L di_2 = R dq.$$

Суммируя, перейдем к конечным приращениям:

$$\frac{L}{R} \Delta i_2 = \Delta q.$$

Очевидно, что ток через катушку перестанет меняться, когда ЭДС самоиндукции в ней станет нулевой, а значит, ток через резистор прекратится. Тогда получим $\Delta i_2 = \dfrac{\mathscr{E}}{r}$, и

$$q_R = \frac{L\mathscr{E}}{Rr}.$$

Задача 8. *Тело брошено под углом к горизонту с высокого обрыва из точки O (рис.5). Из-за сопротивления воздуха разность времени подъема тела до наибольшей высоты и времени возврата на прежний уровень в точку A составляет τ. В точке A вертикальная составляющая скорости на Δv меньше вертикальной составляющей скорости в точке старта, а горизонтальная составляющая равна v_{Ax}. На какую высоту от линии горизонта OA поднялось тело, если наибольшее удаление его по горизонтали от точки A за все время полета составило ΔL_0? Сила сопротивления движению тела в воздухе прямо пропорциональна его скорости.*

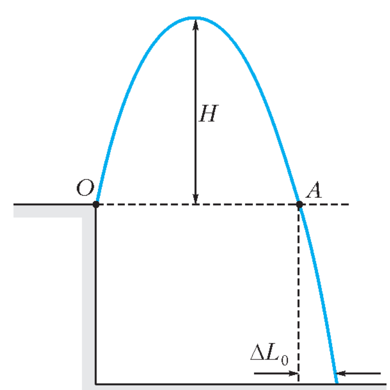

Рис. 5

Горизонтальная составляющая скорости в точке A равна v_{xA}, а максимальное горизонтальное смещение после прохождения точки A составляет ΔL_0. Значит, эта скорость гасится полностью силой сопротивления воздуха. Запишем уравнение динамики в проекции на горизонтальную ось:

$$m \frac{dv_x}{dt} = -kv_x,$$

где k – коэффициент пропорциональности между силой сопротивления и скоростью. Умножая на приращение времени dt, получаем пропорциональность дифференциалов:

$$m dv_x = -k dx \text{, или } -\frac{m}{k} dv_x = dx.$$

Суммируя, перейдем к конечным приращениям:

$$\frac{m}{k} v_{Ax} = \Delta L_0 \text{, или } \frac{m}{k} = \frac{\Delta L_0}{v_{Ax}}.$$

Теперь запишем уравнения динамики в проекции на вертикальную ось для движения тела вверх и вниз:

$$m\frac{dv_y}{dt} = -kv_y - mg\ ,\quad m\frac{dv_y}{dt} = -kv_y + mg\ .$$

Умножим на приращение времени и получим для движения вверх и для движения вниз, соответственно,

$$mdv_y = -kdy - mgdt\ ,$$

$$mdv_y = -kdy + mgdt\ .$$

Для всего пути запишем

$$-mv_{Oy} = -kH - mgt_1\ ,\quad mv_{Ay} = -kH + mgt_2\ .$$

Складывая эти уравнения получим

$$-m\Delta v = -2kH + mg\tau\ .$$

Отсюда найдем искомую величину:

$$H = \frac{m}{k}\frac{\Delta v + g\tau}{2} = \frac{\Delta L_0}{v_{Ax}}\frac{\Delta v + g\tau}{2}\ .$$

Задача 9*. *В середине длинной цилиндрической трубки с глицерином находится воздушный пузырек. При вертикальном положении трубки пузырек поднимается со скоростью 1 м/с. Трубку расположили горизонтально и разогнали вдоль длинной стороны до скорости 20 м/с. Где остановится пузырек? Куда он сместится, если скорость плавно увеличить до 30 м/с?*

Рассмотрим сначала вертикальный подъем пузырька. Для установившегося режима при условии малости массы пузырька архимедова сила компенсируется силой сопротивления глицерина:

$$\vec{F}_{\text{А}} + \vec{F}_{\text{с}} = 0\ ,\ \text{или}\ \rho_{\text{ж}}Vg = kv_0\ ,$$

где $\rho_{\text{ж}}$ – плотность жидкости (глицерина), k – коэффициент пропорциональности между силой сопротивления и скоростью (будем считать, что при данных скоростях сила сопротивления со стороны жидкости прямо пропорциональна скорости пузырька), $v_0 = 1$ м/с.

При горизонтальном ускоренном движении трубки на жидкость действуют силы инерции, создавая «искусственную тяжесть». На элемент жидкости массой m действует сила инерции $-m\vec{a}$, направленная против ускорения. Поле сил инерции создает составляющую архимедовой силы, направленную по ускорению трубки и равную

$$F_{\text{А}} = \rho_{\text{ж}}Va = \rho_{\text{ж}}V\frac{dv}{dt}\ .$$

Это приведет пузырек в движение. Из-за пренебрежимой массы пузырька можно записать

$$\vec{F}_{\text{А}} + \vec{F}_{\text{с}} = 0\ ,\ \text{или}\ \rho_{\text{ж}}V\frac{dv}{dt} = kv\ .$$

Умножим на dt и получим пропорциональность дифференциалов:

$$\rho_{\text{ж}}Vdv = kdx\ .$$

Суммируя и уточняя конечные приращения, для первого случая, когда трубку разгоняют до скорости $v_1 = 20$ м/с, запишем

$$\frac{\rho_{\text{ж}}V}{k}v_1 = x_1\ .$$

С учетом уравнения для вертикального подъема пузырька найдем

$$x_1 = \frac{v_0v_1}{g} = 2\ \text{м}\ .$$

Аналогично, для второго случая, когда скорость трубки увеличивают до $v_2 = 30$ м/с, получим

$$x_2 = \frac{v_0v_2}{g} = 3\ \text{м}\ .$$

Видно, что смещение пузырька пропорционально скорости трубки.

Замечание. Решите самостоятельно эту задачу без использования силы инерции.

Множество значений функции

С.ЛАВРЕНОВ

Часто, решая задачи, абитуриент (или школьник, сдающий ЕГЭ) сталкивается с необходимостью отыскания области значений той или иной функции. Напомним, что если на некотором множестве $D[f] \subset \boldsymbol{R}$ задана функция $y = f(x)$, $y \in \boldsymbol{R}$, то множеством значений $E[f]$ этой функции называется множество всех таких $y \in \boldsymbol{R}$, что $y = f(x)$ при некотором $x \in D[f]$.

Цель этой статьи – представить различные методы нахождения множества значений функции. Для демонстрации эффективности рассматриваемых методов некоторые задачи и упражнения повторяются в статье несколько раз. Номера таких задач и упражнений сохраняются.

Начнем с несложных примеров.

Задача 1. *Найдите множество значений функции* $y = \sin x + \cos x$.

Решение. Воспользуемся способом введения вспомогательного угла:

$$y = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos x\right) = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right).$$

Ответ: $\left[-\sqrt{2}; \sqrt{2}\right]$.

Задача 2. *Найдите множество значений функции* $y = \cos^2 x + \sqrt{2}\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$.

Решение. Преобразуя данное выражение и вводя вспомогательный угол φ, получим

$$y = \frac{1}{2} + \sin 2x - \frac{1}{2}\cos 2x = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\sin(2x - \varphi)\ .$$