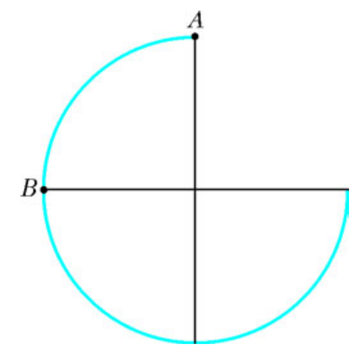
2. Мотоциклист, имея нулевую начальную скорость, разгоняется с максимально возможным ускорением по окружности радиусом R. Ускорение ограничивается коэффициентом трения между шинами и дорогой, равным μ. Определите расстояние, которое пройдет мотоциклист, разогнавшись до скорости, равной половине максимальной.

3. Вокруг массивной планеты массой M по стационарной круговой орбите радиусом R движется астероид массой m со скоростью v. В начальный момент времени на этой же орбите с такой же скоростью движется точно такой же еще один астероид, и расстояние между астероидами равно l ($R \gg l \gg Rm/M$). Определите расстояние между астероидами, когда они за счет сил гравитационного взаимодействия окажутся на одной прямой, проходящей через центр планеты.

4. Обруч радиусом R и массой m висит на гвозде, причем трение между гвоздем и обручем отсутствует. Определите период малых колебаний обруча.

5. В идеальной газовой тепловой машине Карно объем одного киломоля трехатомного газа за цикл изменяется в 8 раз. Определите максимальную работу, которую может совершить данная машина за цикл, если все процессы обратимы, а температура холодильника постоянна и равна T_x. Известно также, что $\exp(0{,}315) = 2(1 - 0{,}315)$.

6. Сфера радиусом R заряжена равномерно по поверхности с поверхностной плотностью σ и разделена на четыре одинаковые доли. Если одну долю удалить, то потенциал точки A (см. рисунок) будет равен φ_0. Определите работу, которую необходимо совершить над зарядом q, чтобы перенести его из точки A в точку B.



7. Длинная тонкая шина шириной a с током I сложена гармошкой N раз. Расстояние между соседними слоями $d \ll a$. Определите индукцию магнитного поля между слоями 1 и 2, 2 и 3, 3 и 4 и так далее.

8. Токи в двух кольцах из сверхпроводника, удаленных на большое расстояние друг от друга, равны I_1 и I_2 соответственно. Определите, каким будет ток во втором кольце, если в результате сближения колец ток в первом кольце стал равен I_3, а индуктивности колец известны и равны L_1 и L_2 соответственно.

9. Свет с длиной волны λ и интенсивностью I_0 падает на узкую щель, ширина которой равна диаметру первой зоны Френеля для точки наблюдения. Если первая зона Френеля закрыта стеклянной пластинкой с показателем преломления n и толщиной d, то интенсивность света в точке наблюдения максимальна и равна I_1. Определите интенсивность света в точке наблюдения, когда открыта вся щель.

Публикацию подготовили М.Яковлев, В.Голубев

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

КМШ

Задачи

(см. «Квант» №1)

1. По условию,

$$(10 \cdot \text{А} + \text{Х})(10 \cdot \text{Э} + \text{Х}) = (10 \cdot \text{Х} + \text{Э})(10 \cdot \text{Х} + \text{А}).$$

Раскрыв скобки, получим

$$100 \cdot \text{А} \cdot \text{Э} + 10 \cdot \text{Х} \cdot \text{Э} + 10 \cdot \text{А} \cdot \text{Х} + \text{Х}^2 = 100 \cdot \text{Х}^2 + 10 \cdot \text{Х} \cdot \text{Э} + 10 \cdot \text{А} \cdot \text{Х} + \text{А} \cdot \text{Э},$$

или, после упрощения, $99 \cdot \text{А} \cdot \text{Э} = 99 \cdot \text{Х}^2$. Разделив обе части равенства на $99 \cdot \text{Х} \cdot \text{Э}$, получим требуемое.

2. За 6 часов с момента начала боя часовая стрелка пройдет половину циферблата и окажется между 16 и 17 часами, а минутная обойдет циферблат 6 раз, поэтому угол между стрелками изменится на $180°$, и они совпадут. Но между 16 и 17 часами часовая и минутная стрелки не могут совпасть дважды. Значит, это и есть момент окончания боя, и бой длился ровно 6 часов.

3. Заметим, что $2^2 + 3^3 + 1^4 = 2^5$. Пользуясь тем, что сумма двух одинаковых степеней двойки равна следующей степени: $2^n + 2^n = 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$, из предыдущего равенства последовательно будем получать

$$2^2 + 3^3 + 1^4 + 2^5 = 2^6,$$
$$2^2 + 3^3 + 1^4 + 2^5 + 2^6 = 2^7,$$
$$2^2 + 3^3 + 1^4 + 2^5 + 2^6 + 2^7 = 2^8,$$
$$2^2 + 3^3 + 1^4 + 2^5 + 2^6 + 2^7 + 2^8 = 2^9,$$
$$2^2 + 3^3 + 1^4 + 2^5 + 2^6 + 2^7 + 2^8 + 2^9 = 2^{10}.$$

Значит, можно взять такие числа, удовлетворяющие условию задачи:

$$p = 2, \quad q = 3, \quad r = 1, \quad s = t = u = v = w = x = 2.$$

4. Нет. Возьмем, например, два равнобедренных треугольника со сторонами 4, 4, 2 и 5, 3, 3. Они удовлетворяют условию задачи, потому что 4 + 4 = 5 + 3 и 4 + 2 = 3 + 3.

5. Чудак прав. Если бы, например, в роще было меньше 100 дубов, то *не дубов* оказалось бы больше 200, что противоречит условию.

Конкурс «Математика 6—8»

(см. «Квант» № 5 за 2005 г.)

6. Можно.

7. Да, можно. Пусть наибольший общий делитель (НОД) числителя и знаменателя дроби $\frac{A+2B}{A-2B}$ равен $d > 1$. Тогда

$$d = \text{НОД}\left((A+2B) - (A-2B);\ A-2B\right) = \text{НОД}(4B;\ A-2B).$$

Если d нечетно, то d – делитель числа B, а следовательно, и числа A. Если d четно, то A – четное число. В этом случае проведем такие же рассуждения для второй дроби. В итоге получим, что либо числа A и B не взаимно просты, либо B – четно. Но если A и B четные, то дробь $\frac{A}{B}$ – сократима.

8. Распрямим траекторию луча, представив, что он проходит сквозь стенки квадрата и идет по прямой SF (рис.1). Для этого отразим исходный квадрат симметрично относительно его стенок достаточное число раз, тогда S – начальный, а F – конечный узел квадратной сет-

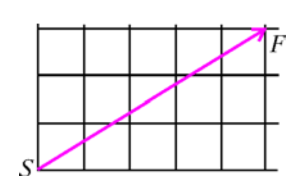


Рис. 1

ки. Если m и n – числа отражений луча от вертикальных и горизонтальных стенок исходного квадрата соответственно, то $SF = \sqrt{(m+1)^2 + (n+1)^2}$.
Найдем наименьшее значение величины $y = (m+1)^2 + (n+1)^2$, учитывая, что $m + n = 2005$, где m и n – натуральные числа. Подставив $n = 2005 - m$ в правую часть нашего равенства и выделив в нем полный квадрат, получим

$$y = 2\left(m - \frac{2005}{2}\right)^2 - \frac{2005^2}{2} + 2006^2 + 1.$$

Значение y наименьшее, когда $m = 1002$ или $m = 1003$ и, соответственно, когда $n = 1003$ или $n = 1002$. Числа $m + 1$ и $n + 1$ должны быть взаимно простыми, чтобы луч света не попал на узел сетки раньше, чем через заданное число отражений (пересечений линий сетки). В нашем случае числа 1003 и 1004 взаимно простые, поэтому на траектории луча между точками S и F нет других узлов квадратной сетки.
Итак, наименьшее расстояние, которое может пройти луч, равно $\sqrt{(1002+1)^2 + (1003+1)^2} = \sqrt{2014025}$.

9. Такое можно сделать для всех n. Покажем, как именно. Сначала рассмотрим случай четного n: пусть $n = 2m$, где m – натуральное. Мысленно подготовим места для чисел и пронумеруем их слева направо номерами от 1 до $2m$. А теперь расставим на эти места числа от 1 до $2m$ по следующим правилам:

- числа от 1 до m расставим в возрастающем порядке слева направо на места с *четными* номерами, начиная с номера 2;
- числа от $m + 1$ до $2m$ расставим в возрастающем порядке слева направо на места с *нечетными* номерами, начиная с номера 1.

Таким образом, расстановка чисел имеет вид:

$$m + 1,\ 1,\ m + 2,\ 2,\ m + 3,\ 3,\ \ldots,\ m + k,\ k,\ \ldots,\ 2m,\ m$$

(например, для $n = 10$ она такова: 6, 1, 7, 2, 8, 3, 9, 4, 10, 5). Убедитесь, что полученная расстановка чисел действительно удовлетворяет условию.
Пусть теперь n – нечетное: $n = 2m + 1$. Сначала выпишем в строку числа от 1 до $2m$ так, как описано выше. Осталось «не пристроенное» число $2m + 1$. Запишем его справа от всех чисел. Таким образом, мы ничего не нарушим для тех чисел, которые были выписаны ранее. Поэтому единственное, что осталось, – проверить, что число $2m + 1$ делит сумму всех чисел, выписанных левее его. Но левее его выписаны *все остальные* числа, и их сумма, очевидно, равна $1 + 2 + \ldots + 2m = m \times (2m+1)$, т.е. и здесь требования условия соблюдаются.

10. а) Заметим, что весь комплект домино можно выложить в один ряд по кругу. Действительно, 21 кость (все, кроме 7 дублей) можно выложить, например, так:

01 12 23 34 45 56 60 02 24 46 61 13 35 50 03 36 62 25 51 14 40,

где левый и правый концы смыкаются. Оставшиеся 7 дублей вставляются в любые подходящие места. Ясно, что если из замкнутой круговой цепочки выкинуть одну любую кость, то оставшиеся окажутся выложенными в один ряд. Покажем, что из комплекта домино можно вынуть две кости так, что оставшиеся нельзя будет выложить в один ряд.
Пусть комплект костей домино выложили в один ряд. Будем говорить, что кость имеет две грани, каждая из которых может содержать от 0 до 6 очков. На стыке костей внутри ряда грани разбиваются на пары так, что без пары может оказаться самое большее две грани, расположенные на концах цепочки. Уберем кости 12 и 34. Поскольку каждая грань на костях полного комплекта встречается ровно 8 раз, то на оставшихся костях грани с 1, 2, 3 и 4 очками встретятся ровно 7 раз. Если бы оставшиеся кости можно было выложить в один ряд, то крайние грани этого ряда содержали бы и 1, и 2, и 3, и 4 очка. Но это невозможно. Поэтому $n = 2$.

б) Пусть из комплекта домино убрали две кости. Если одна из них дубль, то его можно удалить из круговой цепочки, сохранив круг. Поэтому после удаления любой другой кости оставшиеся всегда можно будет выложить в один ряд.
Пусть теперь убрали кости ab и bc, среди которых нет дублей. Докажем, что оставшиеся всегда можно выложить в один ряд. Действительно, рассмотрим кость ab в исходной замкнутой круговой цепочке. Можно считать, что рядом с ней находится отличная от дубля кость bk, ибо дубль bb можно переложить в любое другое подходящее место (имеется два таких места).
Если $k = c$, т.е. убранные кости являются соседями в круговой цепочке, то оставшиеся уже выложены в один ряд. Если $k \neq c$, то в круговой цепочке заменим все грани k на грани c и наоборот. Ясно, что круговая цепочка сохранится, но в ней кости ab и bc будут соседями, после удаления которых оставшиеся кости будут выложены в один ряд.
Если убрали кости ab и cd, среди которых нет одинаковых граней, то, как доказывалось в пункте а), оставшиеся нельзя выложить в один ряд.
Итак, если из комплекта убрали кости ab и cd, среди которых есть одинаковые грани, то оставшиеся кости всегда можно выложить в один ряд, если же одинаковых граней нет, то оставшиеся кости нельзя выложить в один ряд. Оценим шансы каждого исхода. Найдем, сколькими способами можно выбрать пару костей, у которых нет одинаковых граней. Уберем дубли в сторону. Отличную от дубля кость ab можно выбрать 21 способом. После того как кость ab выбрана, среди 20 оставшихся костей 10 имеют с этой костью одинаковые грани. Поэтому кость cd, не имеющую с ab одинаковых граней, можно выбрать $20 - 10 = 10$ способами. Образовав $21 \times 10 = 210$ возможных комбинаций пар костей с различными гранями, замечаем, что ровно в половине рассматриваемых случаев пары не повторяются (из двух пар $(ab; cd)$ и $(cd; ab)$ оставляем только одну). Итого, возможно 105 различных способов.
Всего же из комплекта 28 костей домино пару костей можно выбрать $\frac{28 \cdot 27}{2} = 378$ различными способами. Поэтому оставшиеся кости можно будет выложить в один ряд в 273 случаях и нельзя – в 105 случаях.

ЦЕНТР МАСС МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

1. $v_{4m} = \frac{2}{5} v_0$; $\tau = \pi\sqrt{\frac{4m}{5k}}$. **2.** $H = \frac{36}{5} s = 18$ см.

4. $E_k = 1{,}3$ МэВ.

ИНСТИТУТ КРИПТОГРАФИИ, СВЯЗИ И ИНФОРМАТИКИ АКАДЕМИИ ФСБ РФ

Математика

Вариант 1

1. $[0; 1) \cup (1; 3)$. **2.** $(3; 0)$; $\left(\frac{1459}{27}; -\frac{728}{27}\right)$.

3. $[-8; -6) \cup (3; \sqrt{10})$. **4.** 40.

5. $\operatorname{arcctg}\left(-\frac{4}{3}\right) + 2\pi n$, 15; $\pi + \operatorname{arcctg}\left(-\frac{4}{3}\right) + 2\pi n$, 11; $n \in \boldsymbol{Z}$.

6. Успеют.

Вариант 2

1. $y = 2x^2 - x + 3$.

2. $\left(-\infty; -\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \cup \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}; 0\right) \cup \left[\frac{1}{2}; \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \cup \left(\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$.

3. Первой хозяйке – 10 рублей, а второй – 70 рублей.

4. πn, $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $(-1)^m \frac{\pi}{6} + \pi m$, $n, k, m \in \boldsymbol{Z}$.

5. $\sin\angle ABC = \frac{3}{\sqrt{57}}$. **6.** $\frac{5}{4}$.

Физика

Вариант 1

1. $v_2 = v_1 + \frac{l}{t_0} = 72$ км/ч. **2.** $H = \frac{Mv^2}{2g(m+M)}$.

3. $A = \frac{(\varepsilon - 1)C\mathcal{E}^2}{2}$, $A_{ст} = (\varepsilon - 1)C\mathcal{E}^2$.

4. $\eta = \frac{V_в}{V_к} = \frac{М_к}{М_в} = 16$. **5.** $|F| = 2L = 6$ см.

Вариант 2

1. $\omega = \frac{2v}{D} = 10$ с$^{-1}$. **2.** $v_2' = \frac{k+1}{2}v_1$. **3.** $E = \frac{q}{Cd} = 2$ кВ/м.

4. $A_{23} = A - \frac{5}{2}\nu R\Delta T$. **5.** $F = \frac{df}{d+f} = 10$ см.

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЭЛЕКТРОННОЙ ТЕХНИКИ

Математика

Вариант 1

1. $-\frac{2}{3}$. **2.** $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{8} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **3.** 2,5 м. **4.** $\left[1\frac{2}{3}; 2\frac{2}{3}\right)$.
5. $[2,4; 3,6]$. **6.** 2,1. **7.** 3. **8.** 4,4. **9.** 1,5. **10.** 48. **11.** 1; 3.

Вариант 2

1. $\pm\frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **2.** $[0,5; 1]$. **3.** 4. **4.** $[1; 3]$. **5.** 31. **6.** $\frac{12P}{7}$.
7. 3000 руб. **8.** $(1,5; 2,5)$. **9.** 1. **10.** $\frac{\pi}{2} + \pi n$, $\frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.
11. 2.

Физика

Вариант 1

1. а) $a_1 = 2,5$ м/с^2, $a_2 = 0$; б) $L = 50$ м.

2. $a = g - \frac{kx}{m} = 6$ м/с^2. **3.** $H = \frac{k\Delta E_п}{mg(k-1)} = 10$ м.

4. $\frac{m_1}{m_2} = \frac{М_1}{М_2}\frac{T_2}{T_1} = 1$. **5.** $Q = \frac{3}{2}mgh = 15$ Дж.

6. а) $E_1 = \frac{kq_1}{a^2}$; б) $q_2 = -q_1\cos\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}q_1$.

7. $\frac{I_{кз}}{I_1} = \frac{\mathcal{E}}{\mathcal{E} - U_1} \approx 5,3$; $r = \frac{\mathcal{E} - U_1}{I_1} = 1$ Ом.

8. а) $I \approx 5$ мА; б) $t \approx 1$ с. **9.** $\alpha = \arcsin(n\sin\varphi) \approx 60°$.

10. $n = \frac{\nu\lambda}{c} = 200$.

Вариант 2

1. $v_0 = \frac{2s}{t_1} = 10$ м/с, где $t_1 = 1$ с.

2. $a_2 = \frac{3\mu g - a_1}{2} = 1,5$ м/с^2, вектор ускорения направлен против вектора скорости шайбы; пружина сжата.

3. $l = \frac{E_{max} - E_{min}}{mg} = 40$ см.

4. Температура выросла, так как плотность насыщенного пара увеличилась:

$$\frac{\rho_{н2}}{\rho_{н1}} = \frac{\varphi_1 V_1 + \varphi_2 V_2}{\varphi(V_1 + V_2)} > \frac{\varphi_1 V_1}{\varphi(V_1 + V_2)} > 1.$$

5. $\frac{C_с}{C_г} = \frac{4c\rho dT}{ap} \approx 43$.

6. а) $q_1 = q_2 = q_3 = CU = 100$ мкКл; б) $q = CU = 100$ мкКл.

7. $R = \frac{U}{3I} = 10$ Ом. **8.** $Q = \frac{I_0^2 Rt}{2} = 3,6 \cdot 10^6$ Дж.

9. $d = \frac{2h(n_1 - n_2)}{n_1(n_2 - 1)} = 1$ см.

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. Н.Э.БАУМАНА

Математика

Вариант 1

1. 15 с, 18 с. **2.** $-\frac{7\pi}{6}$; $\frac{\pi}{6}$. **3.** 9. **4.** $(0; 4) \cup [8; 12]$. **5.** 90°.

6. Нет решений при $a < -2$; 2 при $a = -2$; $-a + \sqrt{2(a+2)}$ и $-a$ при $-2 < a < 0$; 2 − a и $-a - \sqrt{2a}$ при $0 \le a < 2$; $-a \pm \sqrt{2a}$ при $a \ge 2$. *Указание.* Решите уравнение на каждом из промежутков $(-\infty; 0)$, $[0; 2)$ и $[2; +\infty)$.

7. $\frac{11}{10}$. *Указание.* Пусть π – секущая плоскость, $MNPR$ – сечение пирамиды $TABC$ этой плоскостью (обозначения ясны из рисунка 2), V – объем пирамиды $TABC$. Из условия следует, что $MR \parallel AD$, $FA = \frac{1}{3}AC$. Докажите, что $TP = \frac{1}{4}PC$. Объем пирамиды $PCRF$ равен $\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}V = \frac{32}{45}V$, объем пирамиды $NAMF$ равен $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}V = \frac{1}{18}V$, объем $TRBM$ равен $\frac{2}{9}V$, так что объем *четырехугольной* пирамиды $TPRMN$ равен $V - \left(\frac{32}{45}V - \frac{1}{18}V\right) - \frac{2}{9}V = \frac{11}{90}V$. Высота пирамиды $TPRMN$ нам известна, так что осталось найти V.

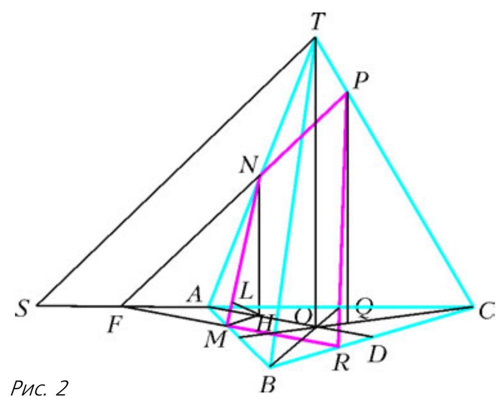


Рис. 2

Для этого заметим, что все точки прямой AD удалены от плоскости π на то же расстояние, что и точка T. Пусть NH – перпендикуляр из точки N на плоскость π, HL – перпендикуляр из H на MN. Из прямоугольного треугольника MNH находим, что $NH = \frac{1}{2\sqrt{3}}$, тогда $TO = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $V = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{9\sqrt{3}}{4} = \frac{3}{4}$.
Итак, $\frac{1}{3}S_{MNPR}\cdot\frac{1}{4} = \frac{11}{90}\cdot\frac{3}{4}$, откуда $S_{MNPR} = \frac{11}{10}$.

Вариант 2

1. 30 ч, 6 ч. **2.** $\pi(2n+1)$, $-\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

3. 17,5. **4.** $[0; 1) \cup (1; 25)$. **5.** 10.

6. $-p \pm \sqrt{4p + 12}$ при $p \in (-3; -2)$; 3 и −1 при $p = 1$; $2\sqrt{5} - 2$

и -1 при $p = 2$; $-p \pm \sqrt{4p-4}$ при $p \in [6; +\infty)$.

7. $\frac{21}{5}$, $\frac{24}{5}$.

Физика

Вариант 1

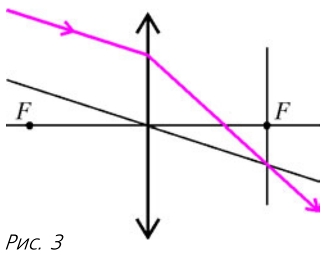


Рис. 3

1. Кольцо будет отклоняться от магнита.

2. См. рис. 3.

3. $v_O = \frac{2\pi A v}{\lambda} = 0{,}84$ м/с.

4. Цифрой 3.

5. Так как вдоль горизонтальной оси X внешние силы не действуют, то, согласно закону сохранения импульса, $m_1 v_{1x} = m_2 v_2$. Скорость верхней призмы (*1*) относительно нижней (*2*) находится по формуле

$$\vec{v}_{1\text{о}2\text{н}} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2, \text{ или } v_{1\text{о}2\text{н}} \cos\alpha = v_{1x} + v_2.$$

Отсюда получим

$$v_2 = \frac{v_{1\text{отн}} \cos\alpha}{1 + m_2/m_1} = \frac{\sqrt{3}}{10} v_{1\text{отн}}.$$

6. $W = \frac{C}{2}\left(\mathscr{E}\left(\frac{5R+12r}{3R+6r}\right)\right)^2$.

7. Из закона сохранения энергии,

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv^2}{2} + \frac{mg\sin\alpha}{L}\frac{x^2}{2},$$

где x – длина троса в наклонной части трубы, m – масса троса, v_0 – начальная скорость троса, а

$$\left(\frac{m}{L}x\right)\frac{x}{2} g\sin\alpha = \frac{mg\sin\alpha}{L}\frac{x^2}{2}$$

– потенциальная энергия отрезка троса длиной x. Дифференцируя уравнение для энергии по времени и приравнивая полученное выражение нулю, получим уравнение движения троса

$$x'' + \frac{g\sin\alpha}{L}x = 0.$$

Решение этого уравнения запишем в виде

$$x(t) = A\sin\omega t, \text{ где } A = \frac{L}{2},\ \omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{g\sin\alpha}{L}}.$$

Искомое время найдем из уравнения

$$x(t) = \frac{L}{4}, \text{ или } \frac{L}{4} = \frac{L}{2}\sin\omega t,$$

откуда

$$t = \frac{T}{12} = \frac{\pi}{6}\sqrt{\frac{L}{g\sin\alpha}} = \frac{\pi}{6}\sqrt{\frac{2L}{g}}.$$

Вариант 2

1. Индукционный ток направлен против часовой стрелки (если смотреть справа).

2. Период колебаний увеличится.

3. $a = \frac{4\pi^2 A v^2}{\lambda^2} = 350$ м/с^2.

4. $q = 4\pi\varepsilon_0 r \frac{hc/\lambda - A}{e} = 1{,}45 \cdot 10^{-11}$ Кл.

5. $F = mg\left(1 + \frac{1}{2\,\mathrm{tg}\,\alpha}\right) = \frac{3}{2}mg$. **6.** $A = \frac{\nu M}{3}(v_1 - v_3)^2 = 2985$ Дж.

7. Рассмотрим два заряженных шарика как единую механическую систему. Кулоновское взаимодействие между шариками является внутренним, поэтому оно не влияет на движение центра масс системы. Единственная внешняя сила, действующая на систему, это сила тяжести, только она и будет определять движение центра масс системы. Начальное положение центра масс находится на высоте

$$h_{\text{ц}0} = \frac{3m \cdot h + 2m \cdot 3h}{3m + 2m} = \frac{9}{5}h,$$

а его начальная скорость v направлена горизонтально. В дальнейшем центр масс будет двигаться по параболе, характеризуемой уравнением

$$h_{\text{ц}} = h_{\text{ц}0} - \frac{g}{2}t^2.$$

Нижний шарик упадет на землю в момент времени $t = \frac{L}{v}$. Положение центра масс в этот момент определяется соотношением

$$H_{\text{ц}} = h_{\text{ц}0} - \frac{g}{2}t^2 = \frac{9}{5}h - \frac{g}{2}\left(\frac{L}{v}\right)^2.$$

С другой стороны,

$$H_{\text{ц}} = \frac{3m \cdot 0 + 2m \cdot H_2}{5m} = \frac{2}{5}H_2.$$

Отсюда найдем высоту H_2 второго шарика:

$$H_2 = \frac{9}{2}h - \frac{5}{4}g\left(\frac{L}{v}\right)^2.$$

МОСКОВСКИЙ ИНЖЕНЕРНО-ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

Математика

Вариант 1

1. $\left(1; \frac{5}{4}\right) \cup \left[\frac{3}{2}; 2\right)$. **2.** $\left(-5; 2 \pm \sqrt{3}\right) \cup \left(1; 2 \pm \sqrt{3}\right)$.

3. $\left(-\infty; 6 - \sqrt{35}\right] \cup \left[6 + \sqrt{35}; +\infty\right)$.

4. При $a \in \left[-\frac{1}{4}; 1\right]$: $x = \sqrt{\frac{1-a^2}{8a+17}}$; при других a: $\varnothing$.

5. а) $\frac{50}{3}$; б) $\frac{23\sqrt{85}}{3}$; в) $55\sqrt{2}$.

Вариант 2

1. πn, $n \in \boldsymbol{Z}$; $\pm\arccos(-1/6) + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

2. 12. **3.** $(-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$.

4. 1) При $a \in \{-3\} \cup \{-1\}$: $x \in \{2\}$;

при $a \in \left(-3; -2 - 1/\sqrt{2}\right] \cup \left[-2 + 1/\sqrt{2}; -1\right)$:

$$x \in \left[2 - \sqrt{1-(a+2)^2}; 2 + \sqrt{1-(a+2)^2}\right];$$

при $a \in \left(-2 - 1/\sqrt{2}; -2 + 1/\sqrt{2}\right)$:

$$x \in \left[2 - \sqrt{1-(a+2)^2}; 2 - \sqrt{1/2-(a+2)^2}\right] \cup$$

$$\cup \left[2 + \sqrt{1/2-(a+2)^2}; 2 + \sqrt{1-(a+2)^2}\right].$$

2) $2 \pm \sqrt{2}/2$.

5. а) $7\sqrt{22}$; б) $\frac{21}{13}\left(2 + \sqrt{13}\right)$.

Физика

Вариант 1

1. $g_1 = gkn^2$. **2.** $\omega = \sqrt{\frac{g}{l\cos\alpha}}$. **3.** $T = T_0\frac{S_1 + 3S_2}{2(S_1 + S_2)}$.

4. $A = \frac{\rho g a^4 (n-k)^2 \left(S - a^2\right)}{2S} = 0{,}1$ Дж. **5.** $E = E_0\frac{\left(a^3 + a_1^3\right)(a - a_1)}{a\left(a^3 - a_1^3\right)}$.

Вариант 2

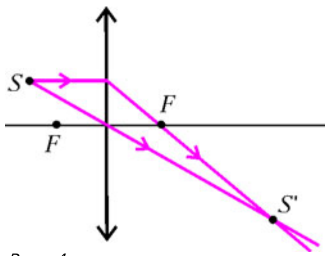


Рис. 4

1. См. рис.4.

2. $a_2 = \dfrac{g^2}{a_1}$.

3. $\varphi_A - \varphi_B = -\dfrac{\Delta\varphi}{22}$.

4. $\eta_1 = \dfrac{\eta}{2-\eta}$.

5. Положение тела устойчиво, так как

$$R_1^4\rho_1 > R_2^4\rho_2 + 2R_3^4\rho_3 .$$

НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Вариант 1

1. Энергия, выделяющаяся в проводах, связана с энергий получаемой от источника, соотношением

$$\frac{U^2R_{1,2}}{\left(R+R_{1,2}\right)^2} = \beta_{1,2}\frac{U^2}{R+R_{1,2}}, \text{ откуда } R_{1,2} = R\frac{\beta_{1,2}}{1-\beta_{1,2}} .$$

Сопротивление однородного провода в случае постоянного тока обратно пропорционально его сечению, следовательно, получаем

$$\frac{S_2}{S_1} = \frac{R_1}{R_2} = \frac{\beta_1\left(1-\beta_2\right)}{\beta_2\left(1-\beta_1\right)} = 11 .$$

2. Пусть x – растяжение верхней и нижней пружин, а y – растяжение «передней» средней пружины, тогда «задняя» средняя пружина сожмется на $y - x$. По второму закону Ньютона,

$$ma = ky + k\left(y-x\right).$$

Сумма сил, приложенных к заднему невесомому стержню, равна нулю, следовательно,

$$2k_0x = k\left(y-x\right), \text{ или } y = x\frac{2k_0+k}{k} .$$

Из полученных уравнений находим

$$x = \frac{ma}{4k_0+k} .$$

3. Напряжения между пластинами на разных участках горизонтали равны, поэтому можно записать

$$E_1d_1 = E_2d_2 .$$

Заряды плоских участков верхней пластины противоположны по знаку: q и $-q$, как и у участков нижней: Q и $-Q$. Поля, создаваемые этими зарядами в зазорах, можно найти по принципу суперпозиции:

$$E_1 = E + k\frac{Q-q}{2S_1}, \quad E_2 = E - k\frac{Q-q}{2S_2},$$

$$\text{или } E_1S_1 + E_2S_2 = E\left(S_1+S_2\right).$$

Отсюда получим

$$E_1 = Ed_2\frac{S_1+S_2}{S_1d_2+S_2d_1}, \quad E_2 = Ed_1\frac{S_1+S_2}{S_1d_2+S_2d_1} .$$

4. Когда пластинку только отпустили, разность давлений на ее верхнюю и нижнюю поверхности была равна $\Delta p_0 = \rho_0 gd$, где ρ_0 – плотность воды, g – ускорение свободного падения, а d – толщина пластинки. Под воздействием силы трения со стороны воды скорость тонущей пластинки в конце концов станет постоянной, следовательно, из второго закона Ньютона получаем

$$\Delta p_{\text{макс}} = \rho gd ,$$

где ρ – плотность пластинки. Таким образом, отношение давлений равно

$$\frac{\Delta p_{\text{макс}}}{\Delta p_0} = \frac{\rho}{\rho_0} \approx 8.$$

5. Когда чашку ставят в горячую воду, давление нагревающегося воздуха (и паров) возрастает, заметно уменьшая прижимающую силу, а значит, и силу трения, что приводит к сползанию чашки. Слой же воды вне чашки не позволяет выйти воздуху из нее, пока избыточное давление не сравняется с давлением слоя.
Попробуйте провести этот эксперимент самостоятельно.

Вариант 2

1. Пусть v_0 – скорость капли при пересечении верхней границы окна. Тогда уравнение движения капли имеет вид

$$h = v_0t + \frac{gt^2}{2}, \text{ откуда } v_0 = \frac{h}{t} - \frac{gt}{2} .$$

Пусть v_1 – скорость капли при пересечении нижней границы окна. В таком случае можно записать

$$v_1 = v_0 + gt, \text{ или } v_1 = \frac{h}{t} + \frac{gt}{2} .$$

2. Пусть U_{AB} – напряжение между точками A и B, а q_1, q_2 и q_3 – заряды на конденсаторах с емкостями C_1, C_2 и C_3 соответственно. Запишем закон сохранения заряда в точке A:

$$q_1 + q_2 + q_3 = 0 ,$$

где $q_1 = C_1\left(U_1 - U_{AB}\right)$, $q_2 = C_2\left(U_2 - U_{AB}\right)$, $q_3 = C_3\left(U_3 - U_{AB}\right)$. Отсюда получаем

$$U_{AB} = \frac{C_1U_1 + C_2U_2 + C_3U_3}{C_1 + C_2 + C_3} .$$

3. Давление газа в сосуде определятся массой поршня и равно $p = (M+m)g/S$ до отрыва груза и $p' = Mg/S$ после отрыва груза, где S – площадь поршня. Пусть ν – число молей газа в сосуде, а h – высота на которую поднимется поршень после отрыва груза. Тогда из уравнения состояния идеального газа получаем

$$\nu RT_0 = (M+m)gH , \quad \nu RT = Mg(H+h) .$$

Количество теплоты

$$Q = mgH_0 ,$$

выделившееся при неупругом ударе груза, идет на работу по подъему поршня

$$A = Mgh$$

и приращение внутренней энергии гелия

$$\Delta U = \frac{3}{2}\nu R\Delta T = \frac{3}{2}\left(Mg\left(H+h\right) - \left(M+m\right)gH\right) = \frac{3}{2}\left(Mgh - mgH\right).$$

Из закона сохранения энергии (первое начало термодинамики) получаем

$$mgH_0 = Mgh + \frac{3}{2}\left(Mgh - mgH\right), \text{ откуда } h = \frac{\left(2H_0 + 3H\right)m}{5M} .$$

4. Отношение плотностей равно отношению молярных масс:

$$\frac{\rho_{H_2O}}{\rho_{D_2O}} = \frac{M_{H_2O}}{M_{D_2O}} = \frac{1\times2+18}{2\times2+18} = 1{,}1 .$$

Так как в стандартном стакане помещается 200 г обычной воды, то масса тяжелой воды будет на 20 г больше.

5. В первом случае силы тяжести, действующие на конусы равных масс, одинаковы, а силы сопротивления со стороны воздуха разные – больше для большего конуса. Поэтому больший конус медленнее разгоняется и отстает от меньшего. Во втором случае ускорения практически равны, что указывает на пропорциональность силы сопротивления площади основания конуса.

РОССИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ.А.И.ГЕРЦЕНА

Вариант 1

1. 4. **2.** $\left(0; \frac{\sqrt{3}}{3}\right] \cup \left[\sqrt{3}; +\infty\right)$. **3.** 0.

4. $\frac{\pi k}{3}$, $k \in \boldsymbol{Z}$; $(-1)^n \frac{\pi}{24} + \frac{\pi n}{4}$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **5.** $\left(1-\sqrt{2}; 0\right) \cup \left(0; 1+\sqrt{2}\right)$.

6. $[0; 4]$. **7.** 98550. **8.** 4. **9.** $30°$.

Вариант 2

1. 60 км. **2.** 2500. **3.** −2, 2; 2. **4.** $\left(0; \frac{1}{9}\right] \cup (1; 27]$.

5. $[-1; 2]$. **6.** 3. **7.** $\left[-\frac{2}{3}; +\infty\right)$. **8.** 5.

9. 13,5.

РОССИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ.К.Э.ЦИОЛКОВСКОГО (МАТИ)

Математика

Вариант 1

1. −3; 11. **2.** $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$; $\pm\sqrt[8]{2}$. **3.** $\left[\frac{1}{2\sqrt{5}}; +\infty\right)$.

4. $\frac{2}{3}$. **5.** $\left[-2-\frac{3}{2}\sqrt{2}; \frac{25}{8}\right]$.

Вариант 2

1. Первая команда. **2.** $(-\infty; +\infty)$.
3. *Указание.* Если α и β − корни первого трехчлена, то они имеют разные знаки, а корни второго трехчлена это $-\alpha$ и $-\beta$.
4. $\frac{2}{9}$. **5.** 3. **6.** $(1; \pm 3)$; $(0; \pm 4)$; $(-3; \pm 1)$.
7. *Указание.* Пусть

$$A_n = \frac{1 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2n}.$$

Докажите по индукции, что

$$A_n < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}.$$

8. $\left[-\sqrt{35}; 0\right]$. **9.** $\frac{32}{9}\left(3\sqrt{3}+4\pi\right)$.

Физика

Вариант 1

1. 4). **2.** 3). **3.** 2). **4.** 4). **5.** 4). **6.** 4). **7.** 2). **8.** 3). **9.** 3).
10. 1).

Вариант 2

1. 5). **2.** 1). **3.** 4). **4.** 2). **5.** 1). **6.** 3). **7.** 1). **8.** 4). **9.** 4).
10. 5).

РОССИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ НЕФТИ И ГАЗА ИМ.И.М.ГУБКИНА

Математика

Вариант 1

1. 1. **2.** 10. **3.** 121. **4.** −2. **5.** 2. **6.** −1. **7.** 0,5. **8.** −30.
9. 46. *Указание.* Уравнение касательной к графику имеет вид

$$y = p^3 + 10{,}8p^2 - 25p + a + \left(3p^2 + 21{,}6p - 25\right)(x-p),$$

где p − абсцисса точки касания. Прямая должна проходить через начало координат, т.е. должно выполняться равенство $2p^3 + 10{,}8p^2 = a$. Осталось найти наибольшее целое значение a, при котором уравнение относительно p имеет три различных корня. Для этого исследуйте с помощью производной функцию $y = 2x^3 + 10{,}8x^2$, постройте эскиз ее графика и выясните, при каких a горизонтальная прямая $y = a$ пересекает график в трех точках (на рисунке 5 показан эскиз этого графика с различными масштабами по осям Ox и Oy).

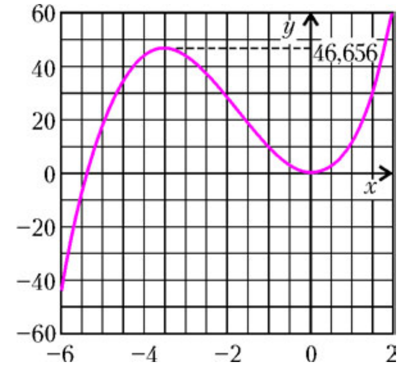


Рис. 5

10. 22.
11. 0,9232. Пусть ABC − данный треугольник (рис.6), $\angle ABC = \alpha$, O − центр вписанной окружности, $OM = OK = r$ − ее радиусы, проведенные в точки касания. Тогда $\angle OBM = \alpha/2$ и $BO = r/\sin(\alpha/2)$. Пусть T − центр второй окружности, $BT = x$ − ее радиус, $\angle MBT = \varphi$. Поскольку $OT = x - r$, то по теореме косинусов из ΔOBT

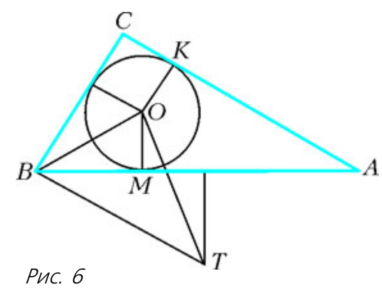


Рис. 6

$$(x-r)^2 = x^2 + \frac{r^2}{\sin^2(\alpha/2)} - \frac{2rx\cos(\alpha/2+\varphi)}{\sin(\alpha/2)},$$

или

$$r\,\mathrm{ctg}^2(\alpha/2) = 2x\left(\cos\varphi\,\mathrm{ctg}(\alpha/2) - \sin\varphi - 1\right).$$

Если $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$, то $\cos\varphi = \frac{c}{2x}$, $\sin\varphi = \frac{\sqrt{4x^2-c^2}}{2x}$, поэтому

$$r\,\mathrm{ctg}^2(\alpha/2) = c\,\mathrm{ctg}(\alpha/2) - \sqrt{4x^2-c^2} - 2x.$$

Но $r\,\mathrm{ctg}(\alpha/2) = BM$, $c - r\,\mathrm{ctg}(\alpha/2) = AM = AK = b - r$. Отсюда

$$c\,\mathrm{ctg}(\alpha/2) - r\,\mathrm{ctg}^2(\alpha/2) = \mathrm{ctg}(\alpha/2)\left(c - r\,\mathrm{ctg}(\alpha/2)\right) = (b-r)\,\mathrm{ctg}(\alpha/2),$$

и поскольку $r = \frac{1}{2}(a+b-c) = \frac{c}{2}(\cos\alpha + \sin\alpha - 1)$, а $\mathrm{ctg}(\alpha/2) = \frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}$, то

$$(b-r)\,\mathrm{ctg}(\alpha/2) = \frac{c}{2}(\cos\alpha + \sin\alpha + 1) = \frac{P}{2},$$

где P − периметр данного треугольника. Мы получаем уравнение $\sqrt{4x^2-c^2} - 2x = \frac{P}{2}$, откуда $x = \frac{P}{8} + \frac{c^2}{2P}$.

12. 9. На рисунке 7 точка O − центр основания, M − середина бокового ребра SB. Центр шара, описанного около пирамиды $MABCD$, лежит на пересечении перпендикуляра к плоскости основания, проведенного через центр окружности, описанной около основания, в данном случае это есть продолжение высоты пирамиды SO, и плоскости, проходящей через середину какого-нибудь бокового ребра пирамиды $MABCD$ перпендикулярно к нему. В качестве такого ребра возьмем MB, и пусть N − середина MB. Тогда центр шара лежит в точке P пересечения продолжения высоты SO и прямой NP,

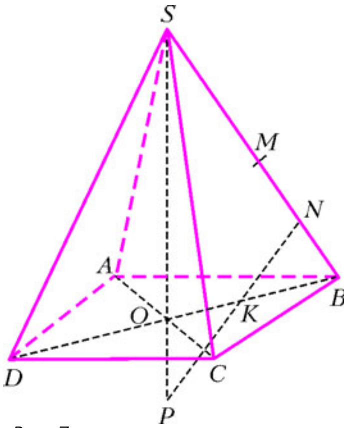


Рис. 7

проведенной в плоскости SOB перпендикулярно к MB. Радиус этого шара есть $x = PB$, при этом $x^2 = OP^2 + OB^2$. Пусть $SB = l$, $\angle SBO = \alpha$. Тогда $NB = l/4$, $OB = l\cos\alpha$, $BK = l/(4\cos\alpha)$ и $OK = l\dfrac{4\cos^2\alpha - 1}{4\cos\alpha}$. Поскольку $\angle KPO = \alpha$, то

$$OP = OK\operatorname{ctg}\alpha = l\frac{4\cos^2\alpha - 1}{4\sin\alpha}.$$

Теперь

$$x^2 = \frac{l^2}{16\sin^2\alpha}\left(8\cos^2\alpha + 1\right).$$

Но радиус шара, описанного около пирамиды $SABCD$, равен радиусу окружности, описанной около треугольника SBD, это есть $R = l/(2\sin\alpha)$. Поэтому

$$x^2 = \frac{R^2}{4}\left(8\cos^2\alpha + 1\right) = \frac{R^2}{4}(5 + 4\cos 2\alpha).$$ При этом $\angle BSD = \varphi = \pi - 2\alpha$. Отсюда

$$x^2 = \frac{R^2}{4}(5 - 4\cos 2\varphi) = R^2(1{,}25 - \cos\varphi),$$

и окончательно

$$x = R\sqrt{1{,}25 - \cos\varphi}.$$

Вариант 2

1. 1. **2.** 8. **3.** 0,9. **4.** −18. **5.** 19. **6.** 0,2. **7.** −1. **8.** 30.

9. −2. Составим уравнение касательной к графику функции $y = \dfrac{\sqrt{6}}{9}x^3$. Пусть p – абсцисса точки касания, тогда уравнение запишется так: $y = \dfrac{\sqrt{6}p^2x}{3} - \dfrac{2\sqrt{6}p^3}{9}$. Эта невертикальная прямая касается параболы $y = x^2 + a$, если относительно неизвестного x уравнение $x^2 + a = \dfrac{\sqrt{6}p^2x}{3} - \dfrac{2\sqrt{6}p^3}{9}$ имеет единственное решение. Дискриминант квадратного трехчлена есть $D = \dfrac{2p^4}{3} - 4\left(a + \dfrac{2\sqrt{6}p^3}{9}\right)$, и так как должно быть $D = 0$, то $a = \dfrac{p^4}{6} - \dfrac{2\sqrt{6}p^3}{9}$. Поскольку общая касательная должна быть единственной, надо выяснить, при каком значении параметра a это уравнение относительно неизвестной p имеет единственное решение. Для этого рассмотрим функцию $f(x) = y = \dfrac{x^4}{6} - \dfrac{2\sqrt{6}x^3}{9}$ и построим ее график. Поскольку $y = \dfrac{x^3}{6}\left(x - \dfrac{4\sqrt{6}}{3}\right)$, то $y = 0$ при $x = 0$ и $x = \dfrac{4\sqrt{6}}{3}$, $y < 0$ при $x \in \left(0; \dfrac{4\sqrt{6}}{3}\right)$ и $y > 0$ при $x \in (-\infty; 0) \cup \left(\dfrac{4\sqrt{6}}{3}; +\infty\right)$. Так как $f'(x) = \dfrac{2x^2}{3}\left(x - \sqrt{6}\right)$, то $f(x)$ убывает при $x \in \left(-\infty; \sqrt{6}\right)$ и возрастает при $x \in \left(\sqrt{6}; +\infty\right)$. При $x = \sqrt{6}$ функция достигает минимума, равного $f\left(\sqrt{6}\right) = -2$. Эскиз графика $f(x)$ построен по этим данным на рисунке 8. График не имеет точек пересечения с горизонтальной прямой $y = a$, если $a < -2$, и имеет две такие точки, если $a > -2$. Единственная точка пересечения будет только при $a = -2$. Ответ в задаче мы получили, но продолжим анализ. При $a = -2$ абсцисса точки касания есть $p_{\min} = \sqrt{6}$, при этом для кубической параболы $y(p_{\min}) = 4$, $y'(p_{\min}) = 2\sqrt{6}$. Для квадратичной параболы при $a = -2$ имеем $y(p_{\min}) = 4$, $y'(p_{\min}) = 2\sqrt{6}$. Совпадение в точке $x = \sqrt{6}$ функций и их производных означает, что общая касательная будет единственной в том и только в том случае, когда у двух графиков имеется общая точка касания.

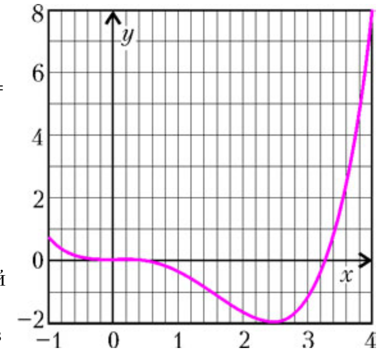


Рис. 8

10. 0,3. *Указание.* Прологарифмируйте обе части уравнения по основанию 10 и решите квадратное уравнение, коэффициенты которого содержат $\lg 3$.

11. 8. Пусть ABC – данный треугольник с гипотенузой $AB = c = 64$ и катетами $BC = a$, $AC = b$ (рис.9), O – центр описанной окружности радиуса $c/2$, лежащий посередине AB, O_1 – центр вписанной окружности, $O_1M = O_1N = O_1P = r$ – радиусы этой окружности, проведенные в точки касания. Центр третьей окружности лежит в точке O_2 отрезка MT так, что $O_2M = O_2K = \rho = 9$. Поскольку O_1NCP – квадрат, то $BN = BM = a - r$, и $MO = \dfrac{c}{2} - BM = \dfrac{c}{2} - (a - r)$. Но $r = \dfrac{1}{2}(a + b - c)$, поэтому $MO = \dfrac{b - a}{2}$. Запишем теорему Пифагора в треугольнике OMO_2:

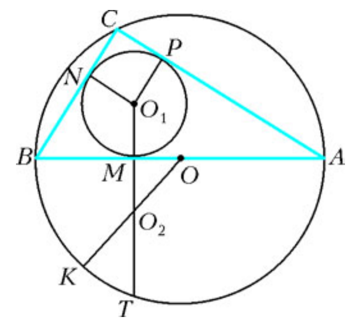


Рис. 9

$$\left(\frac{b - a}{2}\right)^2 + \rho^2 = \left(\frac{c}{2} - \rho\right)^2,$$

тогда $ab = 2\rho c$. Из системы

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = c^2, \\ 2ab = 4\rho c \end{cases}$$

получаем $a + b = \sqrt{c^2 + 4\rho c}$, откуда $r = \dfrac{1}{2}\left(\sqrt{c^2 + 4\rho c} - c\right)$.

12. 288. На рисунке 10 изображено сечение конфигурации плоскостью, проходящей через вершину пирамиды S и середины K и P двух противоположных сторон основания пирамиды, так что SK и SP – апофемы. При этом O – центр основания, T – центр вписанной в пирамиду сферы, PT – биссектриса $\angle SPO$. Пусть $OM = MN = d = 2$, $\angle SKO = \beta$, $OT = TL = r$. Тогда $\angle LOM = \beta$, поэтому $OM = 2r\cos\beta$, $ON = 4r\cos\beta$, но $ON = OK\sin\beta$, поэтому

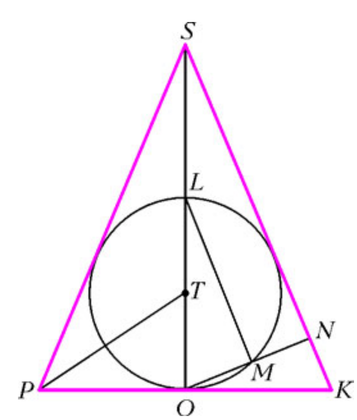


Рис. 10

$4r\cos\beta = OK\sin\beta$. Однако $r = OP\operatorname{tg}\dfrac{\beta}{2} = OK\operatorname{tg}\dfrac{\beta}{2}$, и мы получаем уравнение $4\,\mathrm{tg}\frac{\beta}{2} = \mathrm{tg}\,\beta$. Из него следует, что

$\mathrm{tg}^2\frac{\beta}{2} = \frac{1}{2}$, так что $\cos\beta = \frac{1}{3}$ и $\mathrm{tg}\,\beta = 2\sqrt{2}$.

Пусть сторона основания пирамиды $PK = a$. Тогда ее высота $SO = OK\,\mathrm{tg}\,\beta = \frac{a}{2}\mathrm{tg}\,\beta$ и объем пирамиды равен $V = \frac{a^3}{6}\mathrm{tg}\,\beta = \frac{a^3\sqrt{2}}{3}$, так что остается найти a. Поскольку

$$l = OM = 2r\cos\beta = 2OK\,\mathrm{tg}\frac{\beta}{2}\cos\beta = \frac{a}{3\sqrt{2}},$$

то

$$a = 3\sqrt{2}\,l = 6\sqrt{2}.$$

Физика

Вариант 1

1. $5\ \text{м/с}^2$. **2.** $F = 6$ Н. **3.** $v = 440$ см/с. **4.** $m = 3$ кг. **5.** $\Delta U = 1200$ Дж. **6.** $A = 35$ мДж. **7.** $I = 3$ А. **8.** $k = 7$.

9. Запишем законы сохранения энергии и импульса для тележки с грузом:

$$m_1gh = m_1g\cdot 2R + \frac{m_1v_1^2}{2} + \frac{m_2v_2^2}{2}, \qquad 0 = m_1v_1 - m_2v_2,$$

где v_1, v_2 – скорости груза и тележки в момент времени, когда груз находится в верхней точке петли. Чтобы найти силу N, действующую на груз в этот момент времени со стороны поверхности, надо записать второй закон Ньютона для груза в системе отсчета, связанной с тележкой:

$$N + m_1g = \frac{m_1(v_1+v_2)^2}{R},$$

так как именно в этой системе отсчета радиус кривизны траектории груза равен радиусу петли R. Отметим, что в рассматриваемый момент времени ускорение тележки равно нулю, т.е. связанная с ней система отсчета является инерциальной (сила инерции обращается в ноль). Выполнив преобразования, получим

$$N = m_1g\left(2\left(1+\frac{m_1}{m_2}\right)\left(\frac{h}{R}-2\right)-1\right) = 0{,}5m_1g = 1\ \text{Н}.$$

(На экзамене для экономии времени удобно сразу подставить в уравнение $m_2 = 2m_1$, $h = 2{,}5R$.)

Замечание. Если вы знакомы с важным свойством системы центра масс двух материальных точек, утверждающим, что кинетическая энергия системы выражается через относительную скорость точек по формуле

$$E_k = \frac{m_1m_2}{m_1+m_2}\frac{|\vec{v}_1-\vec{v}_2|^2}{2}$$

(это утверждение несложно проверить «в лоб»), то можно решать эту задачу в системе центра масс:

$$m_1gh = m_1g\cdot 2R + \frac{m_1m_2}{m_1+m_2}\frac{v_{\text{отн}}^2}{2}, \qquad N + m_1g = m_1\frac{v_{\text{отн}}^2}{R}.$$

10. $n = 3$. **11.** $k = 16$. **12.** $x = 40$ см.

Вариант 2

1. $v_{\text{ср}} = 29$ м/с. **2.** $x = 8$ мм. **3.** $N = 300$ Вт. **4.** $M = 36$ т. **5.** $\eta = 56\%$. **6.** $F = 12$ Н. **7.** $I = 25$ мкА. **8.** $a = 7\ \text{м/с}^2$.

9. Запишем закон сохранения импульса для неупругого удара груза и чашки весов: $mv = (m+M)u$, где $v = \sqrt{2gh}$ – скорость груза до удара, u – скорость чашки с грузом после удара. Для нахождения амплитуды колебаний запишем закон сохранения энергии для движения чашки с грузом. Это можно сделать двумя способами.

Во-первых, можно записать закон сохранения энергии «в лоб», отсчитывая энергию упругой деформации от недеформированного состояния пружины, а энергию тяготения – от конечного состояния, в котором скорость равна нулю (момент остановки):

$$\frac{(m+M)u^2}{2} + (m+M)gx + \frac{kx_0^2}{2} = \frac{k(x+x_0)^2}{2},$$

где $x_0 = Mg/k$ – начальная деформация пружины. После преобразований приходим к квадратному уравнению

$$\frac{kx^2}{2} - mgx - \frac{m^2gh}{m+M} = 0,$$

два корня которого x_1 и x_2 соответствуют крайним точка колебаний. Расстояние между этими точками равно удвоенной амплитуде, откуда можно найти амплитуду:

$$A = \frac{|x_1-x_2|}{2} = \sqrt{\left(\frac{mg}{k}\right)^2 + \frac{2km^2gh}{m+M}} = 10\ \text{см}.$$

Во-вторых, можно, как это принято при описании колебаний, отсчитывать полную потенциальную энергию от положения равновесия. Это положение описывается равенством $kx_{\text{р}} - (m+M)g = 0$, смещение от него равно $y = x - x_{\text{р}}$, а начальное смещение составляет

$$y_0 = x_0 - x_{\text{р}} = \frac{Mg}{k} - \frac{(m+M)g}{k} = -\frac{mg}{k}$$

(ось направлена вниз). Тогда закон сохранения энергии запишется проще:

$$\frac{ky_0^2}{2} + \frac{(m+M)u^2}{2} = \frac{kA^2}{2}.$$

Дальнейшее решение аналогично предыдущему.

10. $T = 400$ К. **11.** $\delta = 20\%$. **12.** $f = 18$ см.

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Вариант 1

1. $\frac{2}{x-1}$. **2.** 4. **3.** 2. **4.** $\frac{\pi}{3}$. **5.** $y = \frac{2x+5}{x+2}$.

6. $(-\infty; -10]\cup[2; +\infty)$. **7.** $-2; -\frac{3}{2}; -1$. **8.** $[-2; 0)\cup[2; +\infty)$.

9. $\frac{3\pi}{4}$. **10.** $\pi + 2\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$. **11.** 0; 1. **12.** $-\log_2^2 3$. **13.** 5.

14. $\left(\frac{6}{5}; 2\right)\cup(2; 3]$. **15.** 35. **16.** $(-2; -2); (-2; 2)$.

17. $\left(\frac{3\pi}{4} + 2\pi k; \sqrt{2}\right)$, $k\in\mathbf{Z}$. **18.** $\frac{1}{3}$. **19.** 12. **20.** $(-\sqrt{2}; \sqrt{2})$.

Вариант 2

1. -3. **2.** 8. **3.** $a > b$. **4.** 2. **5.** $(3; 2)$. **6.** $3; \frac{7}{9}$. **7.** 36.

8. $\pm\frac{\pi}{6} + \pi k$, $k\in\mathbf{Z}$. **9.** $[-1; 1)\cup(1; +\infty)$. **10.** $(1; 1)$. **11.** 2.

12. -1; $\pm\sqrt[4]{3}$. **13.** 2; 4; 5; 9. **14.** $\frac{\pi}{6}$. **15.** $\left[5; \frac{60}{7}\right]$.

16. $\pm x + \sqrt{3}y - 2 = 0$. **17.** $[2; +\infty)$. **18.** 150°. **19.** 9. **20.** 6; 8.

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Вариант 1

1. $\frac{179}{110}$. *Указание.* Пусть x – вычеркнутый член прогрессии, n – его номер, d – разность прогрессии. Сумма оставшихся членов равна

$$\left(x - d(n-1) + \frac{9}{2}d\right)\cdot 10 - x = 9x + d(55-10n),$$

поэтому

$$\begin{cases} 9x + d(55-10n) = 18, \\ x(n-1) - \dfrac{dn(n-1)}{2} = 7, \end{cases} \quad \text{т.е.} \quad \begin{cases} d = \dfrac{18-9x}{5(11-2n)}, \\ x = \dfrac{18n^2 - 158n + 770}{11(n-1)(10-n)}. \end{cases}$$

Так как n – целое число из $[2; 9]$ то условие $x < 2$ равносильно

$$18n^2 - 158n + 770 < 22(n-1)(10-n) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4n^2 - 40n + 99 < 0 \Leftrightarrow \frac{9}{2} < n < \frac{11}{2} \Leftrightarrow n = 5.$$

Тогда из второго уравнения системы находим $x = \dfrac{43}{22}$, а из первого – $d = \dfrac{9}{110}$.

2. $\left[1; \dfrac{5}{2}\right] \cup (4; 5]$. *Указание.* Если $u = \sqrt{x}$, $v = \sqrt{5-x}$, то данное неравенство равносильно неравенству

$$\frac{2(u-v)}{u(2v-u)}\left(3u^2 - 2v + u\right) \le 0,$$

или

$$\frac{\left(\sqrt{x} - \sqrt{5-x}\right)\left(3x + \sqrt{x} - 2\sqrt{5-x}\right)}{\sqrt{x} - 2\sqrt{5-x}} \ge 0.$$

Функции $3x + \sqrt{x} - 2\sqrt{5-x}$, $\sqrt{x} - \sqrt{5-x}$ и $\sqrt{x} - 2\sqrt{5-x}$ возрастают, и их корнями являются 1, $\dfrac{5}{2}$ и 4 соответственно. Решая неравенство методом интервалов, получим ответ.

3. $\operatorname{arctg} 2\sqrt{3} + \operatorname{arctg}\dfrac{3}{2} + 2\pi k$, $\dfrac{1}{3}\left(\operatorname{arctg} 2\sqrt{3} - \operatorname{arctg}\dfrac{3}{2}\right) + \dfrac{(2k+1)\pi}{3}$, $k \in \mathbf{Z}$. *Указание.* Уравнение равносильно такому:

$$\sqrt{13}\sin\left(2x - \operatorname{arctg} 2\sqrt{3}\right) = \sqrt{13}\sin\left(x + \operatorname{arctg}\frac{3}{2}\right).$$

4. $\dfrac{13\sqrt{39}}{12} r^2$.

5. 8. Заметим, что для подобных пирамид отношение радиусов вписанных сфер равно отношению радиусов описанных сфер. Докажем равенство $\dfrac{r_1}{r} + \dfrac{r_2}{r} + \dfrac{r_3}{r} + \dfrac{r_4}{r} = 2$, где r, r_1, r_2, r_3, r_4 – радиусы сфер, вписанных соответственно в исходную пирамиду и пирамиды, отсекаемые от нее плоскостями. Рассмотрим пирамиду, отсекаемую от исходной пирамиды $DABC$ плоскостью, параллельной грани ABC. Тогда $\dfrac{r_1}{r}$ равно отношению высот этих пирамид $\dfrac{H-2r}{H} = 1 - \dfrac{2r}{H}$. Заметим, что объем $DABC$ равен $\dfrac{1}{3}HS_1$, он же равен $\dfrac{1}{3}rS$, где S_1 – площадь ΔABC, а S – площадь полной поверхности $DABC$. Поэтому $\dfrac{r_1}{r} = 1 - \dfrac{2S_1}{S}$. Складывая это равенство с аналогичными равенствами для других отсеченных пирамид, получим

$$\frac{r_1}{r} + \frac{r_2}{r} + \frac{r_3}{r} + \frac{r_4}{r} = 4 - 2\frac{S_1 + S_2 + S_3 + S_4}{S} = 2.$$

Для описанных сфер то же соотношение дает равенство

$$\frac{R_1}{R} + \frac{R_2}{R} + \frac{R_3}{R} + \frac{R_4}{R} = 2.$$

Вариант 2

1. $-\sqrt[3]{2}$. **2.** $\left(-2\sqrt{2}; -2\right) \cup (-2; 0) \cup (0; 2)$.

3. $\dfrac{3\pi}{8} + \dfrac{\pi k}{2}$, $-\dfrac{\pi}{4} + \pi k$, $-\dfrac{\pi}{4} \pm \arccos\dfrac{1}{2\sqrt{2}} + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

4. $\dfrac{\pi}{2}$. **5.** $[-4; -2) \cup \left(\dfrac{4}{3}; +\infty\right)$.

МОСКОВСКАЯ ГОРОДСКАЯ ОЛИМПИАДА СТУДЕНТОВ ПО ФИЗИКЕ

1. $\tau = \dfrac{L(u\sin\varphi - v\cos 2\varphi)}{\left(u^2 - v^2\cos 2\varphi\right)\cos\varphi}$. **2.** $l = \dfrac{R\arcsin(1/4)}{2}$.

3. $l = 2R$. **4.** $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{R}{g}}$.

5. $A = 0{,}315RT_{\text{х}}\left(2\exp(-0{,}315) - 1\right) = 0{,}145RT_{\text{х}}$.

6. $A = q\left(2\varphi_0 - \dfrac{3}{2}\dfrac{R\sigma}{\varepsilon_0}\right)$.

7. При четном числе слоев индукция магнитного поля равна $B_0 = \mu_0\dfrac{I}{a}$, 0, B_0, 0 и так далее; при нечетном числе слоев индукция равна $\dfrac{B_0}{2}$, $-\dfrac{B_0}{2}$, $\dfrac{B_0}{2}$, $-\dfrac{B_0}{2}$ и так далее.

8. $I_4 = \dfrac{I_2}{2} \pm \sqrt{\left(\dfrac{I_2}{2}\right)^2 - \dfrac{L_1I_3(I_1 - I_3)}{L_2}}$.

9. $I = I_1 + 4\left(2I_0 - \sqrt{I_0I_1}\right)\left(1 + \cos\dfrac{2\pi d(n-1)}{\lambda}\right)$.

журнал Квант ©

НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ

А.А.Егоров, С.П.Коновалов,
А.Ю.Котова, В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан

НОМЕР ОФОРМИЛИ

Д.Н.Гришукова, Н.А.Суворова, А.Е.Пацхверия,

ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР

Е.В.Морозова

КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА

Е.А.Митченко, Л.В.Калиничева

Журнал «Квант» зарегистрирован в Комитете РФ по печати. Рег. св-во №0110473

Адрес редакции:
119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант»;
тел.: 930-56-48;
e-mail: admin@kvant.info, math@kvant.info, phys@kvant.info

Отпечатано в ОАО ордена Трудового Красного Знамени «Чеховский полиграфический комбинат»
142300 г.Чехов Московской области
Тел./факс: (501) 443-92-17, (272) 6-25-36
E-mail: marketing@chpk.ru