МАТЕМАТИКА ТУРНИРОВ

А.ЗАСЛАВСКИЙ, Б.ФРЕНКИН

Коэффициенты и определение победителя

В спортивных соревнованиях победителем считается участник турнира, набравший наибольшее число очков. Однако при этом никак не учитывается, против кого были набраны эти очки. Поэтому в методе парных сравнений иногда применяются более сложные способы упорядочения. Например, для турнира без ничьих можно определить коэффициент каждого участника, равный сумме очков, набранных теми, кого победил данный спортсмен.

Задача 22. *Оказалось, что у всех участников коэффициент одинаков. Число участников турнира больше двух. Докажите, что все спортсмены набрали одинаковое количество очков.*

Решение. Пусть не все набрали одинаковое число очков. Пусть, далее, занявшие первое место набрали K очков, а последнее – L очков. Коэффициент занявших первое место – это сумма K чисел, каждое из которых не меньше L. Значит, этот коэффициент не меньше KL. Аналогично, коэффициент занявших последнее место – это сумма L чисел, каждое из которых не больше K. Поэтому коэффициент занявших последнее место не превосходит KL. Если коэффициенты первых и последних равны, то они равняются KL. Это возможно только в том случае, если занявшие первое место выиграли только у (некоторых) набравших L очков, т.е. занявших последнее место, и обратно.

Если первое место заняли несколько спортсменов, то один из них выиграл у другого, что противоречит предыдущему. Значит, на первом месте один спортсмен – аналогично и на последнем. По условию в турнире есть третий участник. Из предыдущего следует, что он выиграл и у первого, и у последнего. Но тогда он набрал больше очков, чем первый, так как первый мог выиграть только у последнего. Получено искомое противоречие.

Задача 23. *Докажите, что определенный в предыдущей задаче коэффициент у участников с максимальной суммой очков не ниже среднего.*

Решение. Пусть N обозначает число участников турнира минус 1 (т.е. число встреч, сыгранных каждым участником). Одного из набравших наибольшее число очков назовем чемпионом. Тех, кто ему проиграл (соответственно, выиграл у него), для краткости будем называть просто «проигравшими» («выигравшими»). Пусть, далее, $M = \left[\left(N^2-1\right)/4\right]$. Покажем, что коэффициент чемпиона не ниже M. Допустим, чемпион набрал K очков. Число «выигравших» равно $N-K$, и каждый из них набрал не больше чемпиона, поэтому в сумме «выигравшие» набрали не больше $(N-K)K$. Общая сумма очков во всех матчах равна $N(N+1)/2$. Поэтому сумма очков «проигравших», т.е. коэффициент чемпиона, не меньше чем

$$N\cdot(N+1)/2-K-(N-K)\cdot K =$$
$$= N\cdot(N+1)/2-K\cdot(N+1-K) \geq N\cdot(N+1)/2-(N+1)^2/4 =$$
$$= (N+1)/2\cdot(N-1)/2 = \left(N^2-1\right)/4 .$$

Так как коэффициент чемпиона – целое число, то он не меньше M.

Теперь покажем, что средний коэффициент участников не больше M, откуда и следует утверждение задачи. Если спортсмен набрал X очков, то эти очки внесут вклад в коэффициенты тех $N - X$ участников, которые у него выиграли. В общей сумме коэффициентов появится слагаемое $X(N-X)$. Оно не превосходит $N^2/4$, но так как обязано быть целым, то при нечетном N не превосходит и $\left(N^2-1\right)/4$. Таким образом, оно не больше M.

Сумма коэффициентов равна сумме $(N+1)$ таких слагаемых. Чтобы получить средний коэффициент, нужно эту сумму разделить на $N + 1$. Поэтому средний коэффициент участника турнира не выше M, что и требовалось.

Аналогично коэффициенту, введенному выше, определим для каждого участника второй коэффициент, равный сумме коэффициентов побежденных им участников, третий коэффициент, равный сумме их вторых коэффициентов, и так далее.

Задача 24. *Пусть k-е коэффициенты всех участников для некоторого k оказались равны. Верно ли, что все участники набрали поровну очков?*

Вообще говоря, ответ на вопрос задачи отрицателен: если 1-й участник выиграл у всех, 2-й – у всех, кроме 1-го, и т.д., то все $(n-1)$-е коэффициенты равны нулю. Попробуйте доказать, что этот пример единственный.

Задача 25. *Будем упорядочивать участников по их первым, вторым и т.д. коэффициентам. Верно ли, что, начиная с некоторого момента, порядок участников перестанет изменяться?*

В некоторых книгах по методу парных сравнений утверждается, что этот факт верен. Однако приводимое там доказательство, во-первых, не элементарно, а во-вторых, проходит не во всех случаях. Точный ответ на вопрос задачи нам неизвестен.

В турнирах с ничьими учитывать только результаты побежденных данным игроком противников, очевидно, нельзя. Поэтому для каждого участника i турнира подсчитаем его бергеровский коэффициент B_i, который определяется по такой формуле: сумма очков тех участников, у кого i выиграл, минус сумма очков тех, кому он проиграл. Отметим, что в шахматных соревнованиях бергеровский коэффициент применяется для определения мест тех участников, которые набрали поровну очков.

Задача 26 (А.Толпыго).

а) Может ли быть, что все $B_i > 0$?

б) Может ли быть, что все $B_i < 0$?

в) Известно, что $B_i \geq 0$ для всех i. Верно ли, что $B_i = 0$ для всех i?

г) Известно, что $B_i \leq 0$ для всех i. Верно ли, что $B_i = 0$ для всех i?

Указание к решению. Пункты а), б) этой задачи предлагались на Московской математической олимпиаде 2001 года. Для их решения достаточно рассмотреть сумму $\sum s_i B_i$, где s_i – сумма очков i-го участника. Она состоит из слагаемых вида $s_i s_j$, где партия между игроками i и j не завершилась вничью, причем каждое такое произведение входит в сумму один раз с плюсом и один раз с минусом. Следовательно,

Окончание. Начало см. в «Кванте» №1.

сумма равна нулю, и ответ на вопросы а), б) отрицательный. Более того, из проведенного рассуждения следует, что ответ на вопрос в) положительный. Напротив, в пункте г) ответ отрицательный: если один игрок проиграл все встречи, а остальные сыграли между собой вничью, то коэффициент последнего игрока отрицателен, а все остальные равны нулю.

Проигравший вылетает

Как известно, круговые турниры – не единственная существующая форма соревнований. В противоположность им, при кубковой (олимпийской) системе проигравший «вылетает», и ничьи невозможны. В таких соревнованиях роль случайности гораздо выше, но зато борьба протекает острее. Если круговому турниру отвечает полный граф (вершины – игроки, ребра – поединки, любые две вершины соединены ребром), то граф олимпийского турнира представляет собой бинарное дерево (циклов нет, и на пути, ведущем от висячей вершины к корню, в каждую промежуточную вершину входят два ребра и выходит одно).

Задача 27. *Турнир по боксу проходил по олимпийской системе (в каждом круге проигравшие выбывают, отдыхающих нет). Сколько боксеров участвовало в турнире, если по окончании турнира выяснилось, что 32 человека выиграли боев больше, чем проиграли?*

Решение. При олимпийской системе большинство боев выиграно у тех и только тех боксеров, которые вышли хотя бы в третий тур. Участники третьего тура составляют четверть от общего числа участников. Следовательно, в турнире участвовало 128 боксеров.

Интересно сравнить результаты возможных турниров с одними и теми же участниками, но проводимых по разным системам. Приведем две задачи на эту тему (автор К.Фельдман, см. статью Б.Френкина «Жеребьевка для чемпиона» в «Кванте» № 5 за 2000 год). Чтобы выделить то, что зависит от формы проведения, а не от игроков, примем «предположение о стабильной игре»: в каждой паре игроков победитель всегда один и тот же. Ничьи в круговом турнире между такими игроками исключены, поскольку их не бывает в кубковом турнире. Однако мы допускаем, что один игрок выигрывает у другого, другой – у третьего, а при этом третий выигрывает у первого.

Задача 28. *Прошел чемпионат по круговой системе с участием 2^N игроков. Теперь тем же спортсменам предстоит разыграть кубок. Выполнено предположение о стабильной игре. Докажите, что существует жеребьевка розыгрыша кубка, при которой чемпион кругового турнира выйдет в финал.*

Решение. Занумеруем игроков следующим образом. В начало списка поставим тех, кто победил чемпиона, т.е. «опасных». Далее – проигравших ему, т.е.«неопасных». Последний номер дадим чемпиону. В каждом туре розыгрыша кубка составим пары по порядку номеров.

Чемпион выступил не хуже «среднестатистического» участника, который выиграл столько же, сколько и проиграл. Значит, число «опасных» не больше числа «неопасных» . Все «опасные» попадут в первую половину списка, тогда как чемпион – во вторую. Поэтому чемпион не встретится с «опасным» игроком раньше финала, что и требовалось.

Задача 29. *В условиях предыдущей задачи докажите, что существует жеребьевка, при которой чемпион кругового турнира получит кубок.*

Решение. Каждый из «опасных» (выигрывающих у чемпиона) проиграл в чемпионате кому-то из «неопасных» (иначе он бы выиграл больше матчей, чем чемпион, что невозможно). Составим первую пару розыгрыша кубка из «опасного» и такого «неопасного», которому он проиграл. Следующие пары составляем таким же образом, пока это возможно. Допустим, остались «опасные», которых нельзя включить в такие пары (они проиграли в чемпионате тем «неопасным», которые уже вошли в предыдущие пары). Тогда пусть эти «опасные» играют между собой. Если один из них останется без пары, то поступим следующим образом.

Общее число «опасных» не больше числа «неопасных» (поскольку чемпион выступил не хуже «среднестатистического» игрока, который выиграл и проиграл поровну). В составленных парах не больше «неопасных» игроков, чем «опасных», и еще один «опасный» остался без пары. Значит, кто-то из «неопасных» не был еще включен в пару – пусть с ним и играет оставшийся «опасный».

Остальные игроки объединяются в пары произвольно. Чемпион выйдет в следующий тур, поскольку играет с «неопасным». Если в остальных турах пары строятся по тому же правилу, то чемпион получит кубок. Это заведомо возможно, если в каждом туре «опасные» составляют менее половины участников. Допустим, что вплоть до некоторого тура мы обеспечили выполнение этого условия. Покажем, что и в следующем туре можно этого добиться.

Поскольку в следующий тур выходит половина участников предыдущего, то достаточно показать, что отсеивается не меньше половины «опасных». Но в матчах между ними выбывает каждый второй участник. Только один «опасный» может выиграть у «неопасного». Поэтому достаточно, чтобы в том же туре хотя бы один «опасный» проиграл «неопасному». Как мы видели, в первом туре это выполнено. В последующие туры выходили только такие «опасные», которые проигрывают кому-то из «неопасных», также вышедших в этот тур. И первая же пара составлялась из «опасного» и такого «неопасного», которому он проигрывает. Наше утверждение доказано.

В заключение этого параграфа приведем задачу, в которой рассматривается еще одна форма соревнований – игра на вылет. Несмотря на простоту формулировки и решения, задача оказалась трудной для участников отбора на Российскую олимпиаду 1998 года.

Задача 30. *Группа школьников играет в пинг-понг на вылет. Они установили очередь, вначале играют первый и второй, а в дальнейшем каждый очередной участник играет с победителем предыдущей пары. На следующий день те же школьники снова играют на вылет, но очередь идет в обратную сторону – от последнего к первому. Докажите, что найдутся два школьника, которые играли между собой и в первый день, и во второй.*

Решение. Соперник последнего игрока в первый день играет со всеми, кто стоит позже него в очереди. С одним из них он играет свою первую партию во второй день.

Еще несколько задач

В приведенных ниже задачах, как правило, требуется выяснить, можно ли выбрать из данного турнира подмножество игроков, обладающее некоторым свойством. Часть этих задач не решены.

Задача 31.

а) Докажите, что в турнире без ничьих из n участников можно занумеровать их так, что 1-й выиграл у 2-го, 2-й у 3-го,..., $(n-1)$-й у n-го и 1-й у n-го.

б) Докажите, что в турнире без ничьих либо существует цикл, включающий всех участников, либо можно разбить участников на две группы так, что любой игрок из первой группы победил любого из второй.

Задача 32. *В круговом турнире с 2^N участниками не было ничьих. Докажите, что существует цепочка из $N+1$ участника, каждый из которых победил всех последующих.*

Утверждение задачи легко доказать по индукции. Однако вопрос о том, насколько можно уменьшить число 2^N, значительно сложнее. Можно привести пример турнира 7 участников, никакие 4 из которых не образуют транзитивного подтурнира. Но в любом турнире с 15 участниками найдутся 5, каждый из которых победил всех последующих. При каком максимальном числе участников существует турнир без таких цепочек длины k, неизвестно.

Задача 33. *В круговом турнире участвовали n спортсменов, имевших номера от 1 до n. Участник с номером 1 сделал 1 ничью, с номером 2 сделал 2 ничьих, …, участник с номером n − 1 сделал n − 1 ничью. Сколько ничьих сделал участник с номером n?*

Ответ. $[n/2]$.

Решение. Участник с номером $n-1$ сыграл вничью со всеми остальными спортсменами. Так как 1-й сделал лишь одну ничью, то он не сыграл вничью ни с кем, кроме $(n-1)$-го. Участник $n-2$ не сделал ничью лишь с одним спортсменом, и по доказанному это 1-й. Значит, 2-й сыграл вничью и с $(n-1)$-м, и с $(n-2)$-м (если только он не совпадает с одним из них, т.е. если $n > 4$; случай малых n легко разбирается, и ответ будет аналогичным). Так как у 2-го участника всего 2 ничьи, то больше он ни с кем не сыграл вничью. Из сказанного видно, что $(n-1)$-й и $(n-2)$-й участники сделали ничью с n-м, а 2-й не сделал. Продолжая в том же духе, получаем, что при $i \le (n-1)/2$ участник i сыграл вничью с участниками $n-1, \ldots, n-i$, а участник $n-i$ сыграл вничью с участниками от i до n (разумеется, не считая себя). Этим решена задача для нечетного n: с n-м участником сделали ничьи $(n-1)/2 = [n/2]$ спортсменов. При четном n осталось рассмотреть участника $n/2$. В силу сказанного выше, меньшие номера не сделали с ним ничьих. Так как всего он сделал $n/2$ ничьих, то он сыграл вничью со всеми последующими номерами, включая n. Это означает, что участник n сделал $n/2 = [n/2]$ ничьих.

Будем говорить, что турнир обладает свойством P_k, если для любых k участников найдется участник, победивший их всех.

Задача 34 (А.Толпыго).

а) Докажите, что если в любом турнире, обладающем свойством P_k, участвуют не менее n игроков, то в любом турнире, обладающем свойством P_{k+1}, участвуют не менее 2n + 1 игроков.

б) При каком наименьшем n существует турнир n игроков со свойством P_2? (**Ответ.** $n = 7$.)

в) Постройте турнир 19 игроков со свойством P_3. (**Ответ.** Занумеруем игроков числами от 0 до 18, и пусть игрок i выигрывает у игрока j тогда и только тогда, когда $i - j \equiv l^2 \pmod{19}$.)

г) Докажите, что турниры со свойством P_k существуют для любого k. (Указание. Оцените вероятность того, что в турнире n участников данные k не имеют общего победителя.)

Ответ на вопрос, при каком минимальном n существует турнир n участников со свойством P_k, неизвестен даже при $k = 3$. Из пунктов а), б), очевидно, следует, что $n \ge 15$, а из пункта в) – что $n \le 19$. Для больших значений k неизвестны даже приблизительные оценки.

ПРАКТИКУМ АБИТУРИЕНТА

Энергетический метод исследования колебаний

А.ЧЕРНОУЦАН

Одна из важных задач теории колебаний – найти период малых колебаний механической системы около положения равновесия. В школьном курсе физики количественно рассматриваются колебания систем только с одной степенью свободы (положение которых задается одним параметром – смещением, углом отклонения и т.д.) и происходящие без потерь энергии. Простейшие примеры таких систем – груз на пружине и математический маятник.

Обычно колебания таких систем изучаются *динамическим* методом. Этот метод состоит в приведении уравнения движения системы (второго закона Ньютона) к виду, соответствующему *уравнению гармонических колебаний*

$$x'' + \omega^2 x = 0, \tag{1}$$

где x'' – вторая производная от параметра x по времени. Однако в некоторых случаях школьнику оказывается сложно записать уравнение движения. Это относится в первую очередь к системам с распределенной массой. Например, для получения уравнения колебаний протяженного твердого тела – *физического маятника* – нужно записать уравнение динамики вращательного движения, но его в школе не изучают. И тут, как всегда, на помощь приходит закон сохранения энергии, который позволяет существенно расширить круг задач, доступных для решения школьными методами.

В чем же заключается *энергетический* метод исследования колебаний? Можно сказать, что он состоит в сопоставлении энергии колебательной системы с энергией простейшего маятника – груза массой m на пружине жесткостью k. Если выражение для механической энергии системы, отклонение которой от положения равновесия определяется параметром x, удалось привести к виду

$$E = \frac{m_{эф} x'^2}{2} + \frac{k_{эф} x^2}{2}, \tag{2}$$

то система совершает гармонические колебания

$$x = A\cos(\omega t + \varphi_0),$$

циклическая частота которых равна

$$\omega = \sqrt{\frac{k_{эф}}{m_{эф}}}. \tag{3}$$