Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 1 июня 2006 года по адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» №2–2006» и номера задач, решения которых Вы посылаете, например «М1991» или «Ф1998». В графе «От кого» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем Вашим адресом и необходимый набор марок (в этом конверте Вы получите результаты проверки решений).

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с Вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «Задачник «Кванта», новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором Вы учитесь.

Задачи М1991 и М1992 предлагались на XXVII Турнире городов, задача М1993 предлагалась на I Всероссийской олимпиаде по геометрии имени И.Ф.Шарыгина, задача М1994 – на V Турнире математических боев памяти А.Н.Колмогорова.

Задачи М1991 – М1995, Ф1998–Ф2002

М1991. Имеется 6 монет, одна из которых фальшивая (она отличается по весу от настоящей, но ее вес, как и вес настоящей монеты, неизвестен). Как за 3 взвешивания с помощью весов, показывающих общий вес взвешиваемых монет, найти фальшивую монету?

М.Малкин

М1992. На плоскости лежал куб. Его перекатили несколько раз через ребра так, что куб снова оказался на исходном месте той же гранью вверх. Могла ли при этом верхняя грань повернуться на 90° относительно своего начального положения?

И.Богданов

М1993. Пусть H – точка пересечения высот треугольника ABC, а X – произвольная точка, не лежащая на прямых AH, BH, CH. Окружность с диаметром XH вторично пересекает прямые AH, BH, CH в точках A_1, B_1, C_1, а прямые AX, BX, CX – в точках A_2, B_2, C_2 соответственно. Докажите, что прямые A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 пересекаются в одной точке.

А.Заславский

М1994. а) В мешке изюма содержится 2001 изюминка общим весом 1001 г, причем ни одна изюминка не весит больше 1,001 г. Докажите, что весь изюм можно разложить на две чаши весов так, чтобы весы показали разность, не превосходящую 1 г.

б) В мешке изюма содержится 2001 изюминка общим весом 1001 г, причем ни одна изюминка не весит больше $(1+x)$ г. При каком наибольшем значении x заведомо можно разложить весь изюм на две чаши весов так, чтобы весы показали разность, не превосходящую 1 г?

И.Богданов, Е.Петров, Д.Карпов

М1995*. Докажите, что уравнение

$$n(n+1)(n+2)(n+3) = m(m+1)^2(m+2)^3(m+3)^4$$

не имеет решений в натуральных числах.

А.Иванов (Болгария)

Ф1998. Автомобиль едет по прямой дороге. За первый час пути его средняя скорость составила 50 км/ч, еще час он ехал со средней скоростью 70 км/ч, затем ровно час простоял в пробке. Остаток пути он ехал с постоянной скоростью 40 км/ч. Найдите среднюю скорость автомобиля на всем пути.

О.Простов

Ф1999. Спутник вращается вокруг Земли по круговой орбите, все время находясь над одной и той же точкой экватора («суточный» спутник). По совершенно непонятной причине спутник вдруг остановился (его скорость относительно центра Земли стала нулевой). Оцените время падения спутника на Землю с точностью не хуже 1%.

Р.Александров

Ф2000. В горизонтальном цилиндрическом сосуде находится порция гелия. Сосуд закрыт массивным поршнем, который может двигаться по горизонтали без трения. С газом в сосуде проводят два опыта: наружное давление увеличивают в три раза – один раз очень быстро, другой раз очень медленно. В каком из опытов конечный объем газа окажется меньше? Во сколько раз?

А.Газов

Ф2001. Очень тонкий непроводящий стержень длиной L равномерно заряжен по длине полным зарядом Q. Маленькое проводящее кольцо радиусом R сделано из очень тонкой проволоки, его центр совпадает с одним из концов стержня, а плоскость кольца перпендикулярна стержню. Заряд кольца q. С какой силой стержень действует на кольцо?

З.Рафаилов

Ф2002. К батарейке с ЭДС $\mathcal{E}$ и внутренним сопротивлением r подключают параллельно соединенные резистор сопротивлением R и катушку индуктивностью L. Какое количество теплоты выделится в резисторе за большое время?

А.Теплов

Решения задач M1966–M1975, Ф1983–Ф1987

M1966. *Докажите, что если число* $\underbrace{11\ldots11}_{n\text{ единиц}}2\underbrace{11\ldots11}_{n\text{ единиц}}$ *делится на 11, то оно также делится и на 121.*

Воспользуемся признаком делимости на 11: число делится на 11 тогда и только тогда, когда разность сумм цифр, стоящих на четных и на нечетных местах, делится на 11. Имеем $\underbrace{1\ldots1}_{n}2\underbrace{1\ldots1}_{n}=\underbrace{1\ldots1}_{n+1}\cdot 10^n+\underbrace{1\ldots1}_{n+1}=$ $=\underbrace{1\ldots1}_{n+1}\cdot 1\underbrace{0\ldots0}_{n-1}1$. Получаем, что как первый, так и второй сомножители делятся на 11 тогда и только тогда, когда n нечетно. Таким образом, если n нечетно, то оба сомножителя делятся на 11, и их произведение делится на 121. Если же n четно, то исходное число на 11 не делится.

В.Сендеров

M1967. *В наборе из одиннадцати попарно различных гирь каждая весит натуральное число граммов. Известно, что суммарный вес любых семи гирь больше суммарного веса четырех оставшихся. Найдите наименьший возможный суммарный вес всех гирь набора.*

Ответ: 109.

Упорядочим веса гирь по возрастанию: $a_1 < a_2 < \ldots$ $\ldots < a_{11}$. Пусть $a_7 = x$, тогда $a_6 \le x-1$, $a_5 \le x-2,\ldots$ $\ldots, a_1 \le x-6$, $a_8 \ge x+1,\ldots,a_{11} \ge x+4$. Так как $a_1+\ldots+a_7 > a_8+a_9+a_{10}+a_{11}$, то $7x-21 > 4x+10$, т.е. $3x > 31$, значит, $x \ge 11$. Тогда $a_1+\ldots+a_7 > a_8+\ldots$ $\ldots+a_{11} \ge 4\cdot 11+10=54$, откуда $a_1+\ldots+a_7 \ge 55$, и $a_1+\ldots+a_{11} \ge 55+54=109$.

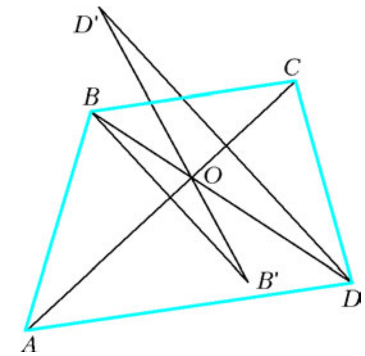
Суммарный вес 109 реализуется на наборе гирь {4, 6, 7, 8, 9,10,11,12,13,14,15}.

О.Подлипский, И.Богданов

M1968. *Каждую вершину выпуклого четырехугольника Q отразили симметрично относительно диагонали, не содержащей эту вершину. Полученные точки являются вершинами четырехугольника* Q'.

а) Докажите, что если Q – трапеция, то Q' также является трапецией.

б) Докажите, что отношение площади Q' к площади Q меньше 3.



Пусть $ABCD$ – исходный четырехугольник, и пусть при отражении получаются точки A', B', C' и D'. Тогда отрезки BD и $B'D'$ симметричны относительно AC, поэтому они равны и пересекаются на прямой AC, а именно в точке O пересечения диагоналей четырехугольника $ABCD$ (см. рисунок). Кроме того, $\dfrac{BO}{OD}=\dfrac{B'O}{OD'}$. Аналогично, AC проходит через O и $\dfrac{CO}{OA}=\dfrac{C'O}{OA'}$.

а) Если $ABCD$ – трапеция с основаниями AD и BC, то $\dfrac{BC}{AD}=\dfrac{BO}{OD}=\dfrac{CO}{OA}=k$ из подобия треугольников AOD и COB. Поэтому $\dfrac{B'O}{OD'}=\dfrac{C'O}{OA'}=k$, следовательно, треугольники $A'OD'$ и $C'OB'$ также подобны. Из их подобия получаем, что $B'C' \parallel A'D'$. Кроме того, заметим, что $\dfrac{B'C'}{A'D'}=k=\dfrac{BC}{AD}$, значит, Q' – не параллелограмм, если Q – не параллелограмм.

б) Пусть меньший угол между диагоналями был равен α, $\alpha \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right]$, тогда после отражения один из углов между диагоналями становится равным либо 3α, либо $3\alpha-\pi$, поэтому отношение площадей равно

$$\frac{S'}{S}=\frac{A'C'\cdot B'D'\cdot|\sin 3\alpha|}{AC\cdot BD\cdot \sin\alpha}=\frac{|\sin 3\alpha|}{\sin\alpha}=$$
$$=\frac{\left|3\sin\alpha-4\sin^3\alpha\right|}{\sin\alpha}=\left|3-4\sin^2\alpha\right|.$$

Но $\sin^2\alpha \in (0;1]$, следовательно, $3-4\sin^2\alpha \in [-1;3)$, и $\dfrac{S'}{S}=\left|3-4\sin^2\alpha\right|<3$.

Л.Емельянов

M1969. *На оборотных сторонах 2005 карточек написаны различные числа (на каждой по одному). За один вопрос разрешается указать на любые три карточки и узнать множество чисел, написанных на них. За какое наименьшее число вопросов можно узнать, какие числа записаны на каждой карточке?*

Ответ: за 1003 вопроса.

Пусть было задано N вопросов. Ясно, что каждая карточка участвует хотя бы в одном вопросе, иначе число на ней мы не определим. Пусть есть k карточек, участвующих ровно в одном вопросе. Тогда в одном вопросе не может встретиться двух таких карточек. Действительно, если бы две такие карточки участвовали в одном вопросе, то, поменяв местами числа на этих