ты выделится в резисторе? Какой заряд протечет через катушку, начиная с этого момента?

А.Зильберман

Ф1997. К точка A и $Б$ схемы, изображенной на рисунке 3, подключают источник переменного напряжения 36 В, 50 Гц. Что покажет вольтметр с большим внутренним сопротивлением, если включить его между точками $Б$ и $В$? Конденсаторы в схеме имеют емкости, например, 1 мкФ. Диоды можно считать идеальными. Придумайте также хорошее название для этой схемы.

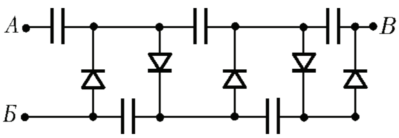


Рис. 3

У.Множителев

Решения задач М1961 – М1965, Ф1973 – Ф1982

М1961. *В параллелограмме $ABCD$ нашлась точка Q такая, что $\angle AQB + \angle CQD = 180°$. Докажите равенства углов: $\angle QBA = \angle QDA$ и $\angle QAD = \angle QCD$ (рис. 1).*

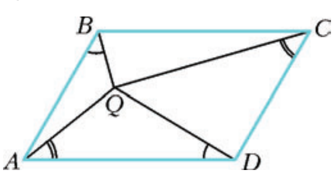


Рис. 1

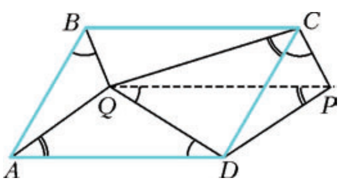


Рис. 2

Треугольник ABQ параллельно перенесем на вектор $\overline{BC}$, и новое положение точки Q обозначим через P (рис. 2). Ввиду условия задачи, около четырехугольника $QCPD$ можно описать окружность. Но тогда

$$\angle DCP (= \angle QBA) = \angle PQD = \angle QDA,$$

а также

$$\angle QCD = \angle QPD = \angle QAD,$$

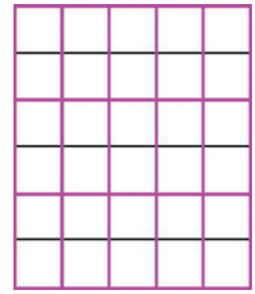
т.е. утверждение доказано.

В.Произволов

М1962. *Клетчатый прямоугольник полностью покрыт костями домино (каждая кость покрывает две соседние клетки). Назовем покрытие оригинальным, если для любого другого покрытия положение хотя бы одной кости совпадает с положением какой-либо кости оригинального покрытия. Для каких прямоугольников существует оригинальное покрытие?*

Ответ: оригинальное покрытие имеют те и только те прямоугольники, у которых вдоль одной стороны размещается четное число клеток, а вдоль другой – нечетное (иными словами – это все прямоугольники размером $2m \times (2n-1)$ клеток, где m и n – натуральные числа).

Сначала докажем, что для таких прямоугольников действительно имеется оригинальное покрытие. Для этого просто опишем такое покрытие. Оно очень простое: надо все кости расположить так, чтобы длинная их сторона была параллельна четной стороне прямоугольника (на рисунке дан пример оригинального покрытия прямоугольника 6×5). Чтобы убедиться, что это покрытие в самом деле оригинальное, расположим прямоугольник так, чтобы нечетные стороны были горизонтальны (как на рисунке). Рассмотрим любое другое покрытие этого прямоугольника костями домино и выделим кости, которые примыкают к нижней стороне прямоугольника. Так как эта сторона – нечетная, то хотя бы одна кость непременно будет расположена вертикально. Но тогда она совпадет с какой-то из костей оригинального покрытия, примыкающей к нижней стороне прямоугольника. Таким образом, указанное покрытие и впрямь оригинальное.



Осталось доказать, что если обе стороны прямоугольника – четные, то оригинального покрытия не существует. Иначе говоря, для любого покрытия можно указать другое покрытие – такое, что ни одна его кость не совпадет ни с одной костью исходного покрытия. Пусть прямоугольник с четными сторонами покрыт каким-то образом костями домино. Мысленно разобьем его на квадраты 2×2 (так как обе стороны четные, то это возможно). А теперь каждый такой квадрат покроем двумя костями. Это можно сделать двумя способами. Докажем, что хотя бы для одного из этих способов положение каждой из костей *не совпадет* ни с одной из костей исходного покрытия. Рассуждаем «от противного». Допустим, это не так и для любого из двух возможных расположений двух костей в квадрате 2×2 хотя бы одна из костей совпадет с какой-то костью исходного покрытия. Сориентируем квадрат так, чтобы одна из его сторон была горизонтальна, другая – вертикальна. Уложим на него две кости для начала *горизонтально.* Так как в исходном покрытии, согласно предположению, хотя бы одна кость совпадает с какой-то из этих двух костей, то можно сделать вывод: в исходном покрытии имеется кость, расположенная в этом квадрате *горизонтально.* Теперь уложим на тот же квадрат две кости по-иному – *вертикально.* Тогда, согласно тому же предположению, в исходном покрытии имеется кость, расположенная в этом квадрате *вертикально.* Таким образом, в одном и том же квадрате 2×2 исходного покрытия есть кость, расположенная вертикально, и есть кость, расположенная горизонтально. Но это, очевидно, невозможно. Противоречие!

Итак, для любого исходного покрытия мы можем разбить прямоугольник с четными сторонами на квадраты 2×2, а затем в каждом таком квадрате так уложить две кости, что ни одна из них не совпадет ни с одной из костей исходного покрытия. Отсюда следует, что оригинального покрытия не существует.

И.Акулич

М1963. *Натуральные числа x, y, z ($x > 2$, $y > 1$) удовлетворяют равенству $x^y + 1 = z^2$. Докажите, что число x имеет не менее 8 различных натуральных делителей.*

Достаточно доказать, что число x имеет не менее 3 различных простых делителей.

Из $p^t + 1 = z^2$, где $t > 1$, легко вывести, что $p = 2$. Именно, справедливо следующее утверждение.

Лемма 1. *При $z > 3$ число $d = z^2 - 1$ имеет не менее 2 различных простых делителей.*

Для доказательства достаточно при четном z воспользоваться равенством

$$d = (z+1)(z-1), \text{ где } (z+1, z-1) = 1, \quad z - 1 > 1,$$

а при нечетном z – равенством

$$d = 4 \cdot \frac{z+1}{2} \cdot \frac{z-1}{2}, \text{ где } \left(\frac{z+1}{2}, \frac{z-1}{2}\right) = 1, \ \frac{z-1}{2} > 1.$$

Пусть теперь число $(z-1)(z+1)$, где $z > 1$, имеет ровно 2 различных простых делителя. Тогда в случае $(z-1, z+1) = 1$ имеем $\left(p^{\alpha}\right)^y - \left(q^{\beta}\right)^y = 2$, т.е. $a^y - b^y = 2$, где $y > 1$. Но $a^y - b^y = (a-b)\left(a^{y-1} + \ldots + b^{y-1}\right) \geq (a-b)\left(2^{y-1} + 1\right) \geq (a-b) \cdot 3 \geq 3$. Значит, $(z-1, z+1) = 2$, откуда либо $z - 1 = 2p^{\alpha y}$ и $z + 1 = 2^{\beta y - 1}$, либо $z - 1 = 2^{\beta y - 1}$ и $z + 1 = 2p^{\alpha y}$. В первом случае $2^{\beta y - 2} - p^{\alpha y} = 1$, во втором $p^{\alpha y} - 2^{\beta y - 2} = 1$.

Лемма 2. *Уравнение*

$$2^u - 1 = w^v,$$

где $u > 1$, $v > 1$, не имеет решений в натуральных числах.

Доказательство. Поскольку ни при каком целом c число $c^2 + 1$ не делится на 4, число v нечетно. Поэтому $2^u = (w+1)A$, где $A = w^{v-1} - w^{v-2} + \ldots - w + 1$ – сумма нечетного числа v нечетных слагаемых. Значит, и само число A нечетно. Но $(w+1)A = 2^u = w^v + 1 > w + 1$. Следовательно, A – больший единицы делитель числа 2^u, что невозможно.

Лемма 3. *Уравнение*

$$2^u + 1 = w^v,$$

где $v > 1$, имеет единственное решение в натуральных числах: $(u, v, w) = (3, 2, 3)$.

Доказательство. Единственность этого решения в случае четного v следует из леммы 1, а отсутствие решений в случае нечетного v – из рассуждений, аналогичных проведенным при доказательстве леммы 2.

Из лемм 2 и 3 получаем $y = 2$, $\beta y = 5$, что невозможно.

Замечание 1. Доказанное утверждение о наличии у числа x трех различных простых делителей можно обобщить следующим образом.

Предложение. Пусть число y разлагается в произведение n отличных от 1 натуральных чисел. Тогда x имеет не менее $n + 2$ различных простых делителей.

Доказательство основано на следующих важных утверждениях, которые часто бывают полезны при решении задач по теории чисел.

Лемма 4. *Пусть $a \geq 2$, p – нечетное простое число. Тогда число $a^p - 1$ имеет хотя бы один простой делитель, не являющийся делителем числа $a - 1$.*

Лемма 5. *Пусть $a \geq 2$, p – простое число и выполнено хотя бы одно из неравенств $a \neq 2$ и $p \neq 3$. Тогда число $a^p + 1$ имеет хотя бы один простой делитель, не являющийся делителем числа $a + 1$.*

Доказательство этих лемм можно прочесть в решении задачи М1867 («Квант» №6 за 2003 г.).

Сформулированная в том же решении теорема Биркгофа–Вандивера позволяет усилить Предложение: *если $y = p_1^{\alpha_1} \ldots p_m^{\alpha_m}$, то x имеет не менее $1 + (\alpha_1 + 1) \ldots (\alpha_m + 1)$ различных простых делителей.*

Замечание 2. Накладывая на числа задачи дополнительные ограничения, можно получить и более сильные следствия, нежели содержащееся в ее формулировке. Именно, нетрудно доказать следующие утверждения.

Если число $y - 2$ составное, то x имеет не менее 12 различных натуральных делителей.

Если к тому же число y не является числом Ферма[1], *то x имеет не менее 16 различных натуральных делителей.*

Доказательство этих утверждений также опирается на леммы 4 и 5.

Несколько по-иному доказывается следующее утверждение.

Пусть в условиях задачи $(x + 1, y) = 1$. Тогда x имеет не менее 16 различных натуральных делителей.

Замечание 3. Утверждение, близкое к утверждению задачи, справедливо и в случае равенства $2x^y + 1 = z^2$ ($x > 2$, $y > 1$). Именно, в этом случае *натуральное число x, $x \neq 12$, имеет не менее 8 различных натуральных делителей*. Доказательство этого факта близко к решению задачи. Ситуация $x = 12$ возможна: $2 \cdot 12^2 + 1 = 17^2$. Отметим, что при $y = 2$ рассматриваемый случай оказывается случаем уравнения Пелля $z^2 - 2x^2 = 1$. Об этих очень интересных и важных уравнениях можно прочесть, например, в статье В.Сендерова и А.Спивака «Уравнения Пелля» («Квант» №3 за 2002 г.).

В.Сендеров

М1964. *Вневписанная окружность неравнобедренного треугольника ABC касается стороны AB в точке C' и продолжений сторон AC, BC в точках B', A'. Прямые AA' и BB' пересекаются в точке K. Докажите, что K лежит на описанной окружности треугольника ABC тогда и только тогда, когда радиусы окружностей ABC и $A'B'C'$ равны.*

Пусть радиусы окружностей равны, O – центр описанной окружности, O' – центр вневписанной. Тогда, так

---

[1] *Т.е. $y \neq 2^{2^k} + 1$, где $k \geq 0$. Отметим, что случай $k = 0$ можно не рассматривать, поскольку уравнение $x^3 + 1 = z^2$ при $x > 2$ не имеет решений в натуральных числах. В самом деле, некоторые рассуждения из решения нашей задачи сразу сводят это уравнение к следующим: $u^3 - 2v^3 = 1$, $2v^3 - u^3 = 1$, где $u, v \in \mathbf{N}$. Однако, как доказал еще Л.Эйлер методом спуска, первое из получившихся уравнений не имеет решений, а второе имеет лишь одно решение (1, 1) – что немедленно и приводит к единственному решению (2, 3) в натуральных числах уравнения $x^3 + 1 = z^2$. Утверждение о неразрешимости этого уравнения при $x > 2$ можно переформулировать несколько неожиданным образом: ни при каком $n > 1$ сумма $1^3 + \ldots + n^2$ не является кубом натурального числа (докажите красивый факт – эквивалентность этих утверждений – самостоятельно!).*

как $\angle A'O'A = \angle O'AO = \angle B + \angle A/2$, четырехугольник $A'O'AO$ – равнобедренная трапеция и $AA' = OO'$. Значит, в треугольниках $AA'C$ и $BB'C$ $CA' = CB'$ и $AA' = BB'$, но $AC \neq BC$. Следовательно, $\angle CAA' + \angle CBB' = 180°$.

Обратно: если K лежит на описанной окружности, то $AA' = BB'$. Предположим, что радиусы окружностей не равны, и отложим на отрезках OA и OB точки X, Y такие, что $AX = BY = OA'$. Так как $O'X = AA' = BB' = O'Y$ и $OX = OY$, треугольники $OO'X$ и $OO'Y$ равны, т.е. $\angle AOO' = \angle BOO'$, что для неравнобедренного треугольника неверно.

Отметим, что для равнобедренного треугольника утверждение задачи остается верным, в чем нетрудно убедиться прямой проверкой.

А.Заславский

М1965. *С крыши дома спущена лестница, содержащая n ступенек. С каждой ступеньки можно перешагнуть на соседнюю; кроме того, с самой верхней ступеньки можно переступить на крышу, а с самой нижней – на землю. На каждой ступеньке укреплен указатель-стрелка, направленный вверх либо вниз. В начальный момент на одной из ступенек лестницы стоит человек. В соответствии с указателем он передвигается на соседнюю ступеньку, и сразу после этого указатель меняет направление на противоположное. Со следующей ступеньки человек опять переступает на соседнюю в соответствии с ее указателем, и сразу после этого указатель также меняет положение на противоположное. Далее человек снова и снова переходит со ступеньки на ступеньку по таким же правилам. Какое наибольшее число шагов может сделать человек, пока не сойдет с лестницы на землю или на крышу?*

Ответ: максимальное возможное число шагов равно $\dfrac{n(n+1)}{2}$ (включая сюда и тот шаг, которым человек сошел с лестницы).

Прежде всего докажем, что человек не может находиться на лестнице бесконечно долго, т.е. ему рано или поздно придется сойти с лестницы на землю или на крышу.

Используем метод «от противного». Допустим, человек никогда не выйдет за пределы лестницы, даже если сделает бесконечное число шагов. Тогда на какую-то ступеньку A он наступит *бесконечное* число раз. Так как направление указателя при каждом «наступлении» на ступеньку меняется на противоположное, то при «наступлениях» на ступеньку A указатель бесконечное число раз будет показывать вверх. Поэтому, ступая в соответствии с указателем, человек бесконечное число раз наступит на ступеньку, соседнюю сверху со ступенькой A. Рассуждая таким же образом, можно сделать вывод, что он бесконечное число раз наступит на ступеньку, соседнюю с ней, и так далее, вплоть до самой верхней ступеньки. Но самое позднее при *втором* «наступлении» на самую верхнюю ступеньку он с нее будет вынужден подняться вверх на крышу (указатель-то каждый меняет направление!). Противоречие.

Но насколько долго сможет человек «продержаться» на лестнице? Пусть человек, стартуя с какой-то ступеньки, сделал в соответствии с правилами некоторое число шагов и последним из этих шагов покинул лестницу. Не нарушая общности, можно считать, что человек сошел с лестницы *на крышу,* т.е. покинул лестницу *через верхнюю ступеньку*.

Рассмотрим любую ступеньку, которую человек посетил неоднократно (хотя бы дважды). Так как сразу после ухода с нее указатель-стрелка на ступеньке меняет направление, то шаги, которые делал человек с этой ступеньки, попеременно направлены то вверх, то вниз, т.е. количества шагов, сделанные с какой-либо ступеньки вверх и вниз, различаются не больше чем на 1. Обозначим это рассуждение Р1. Далее, если *последний* шаг с какой-либо ступеньки человек сделал вверх, то суммарное число шагов вниз с этой ступеньки *не больше,* чем суммарное число ходов вверх (докажите это самостоятельно). Это рассуждение обозначим Р2.

А теперь докажем следующее утверждение.

У1. *С k-й снизу ступеньки (для всех $1 \le k \le n$) человек сделал не больше $(k-1)$ шагов вниз и не больше k шагов вверх.*

Доказательство проведем индукцией по k.

Для $k = 1$ (т.е. самой нижней ступеньки) утверждение практически очевидно.

Пусть для $k = m$ утверждение верно, т.е. человек с m-й ступеньки снизу сделал не больше $(m-1)$ шагов вниз и не больше m шагов вверх. Докажем, что со следующей, $(m+1)$-й ступеньки он сделал не больше m шагов вниз. Для этого между m-й и $(m+1)$-й ступеньками мысленно проведем *границу* и посмотрим, сколько раз человек пересек ее снизу вверх и сколько – сверху вниз. Снизу вверх – это ясно: не больше m раз. А сверху вниз? Рассмотрим два случая.

1) «Стартовая» ступенька находится выше границы, т.е. человек начал движение и финишировал над границей. Но тогда ясно, что он одинаковое число раз пересек границу сверху вниз и снизу вверх. Поэтому число шагов сверху вниз через границу не больше m.

2) «Стартовая» ступенька находится ниже границы, т.е. человек начал движение под границей, а финишировал над границей. Но тогда он пересек границу снизу вверх на 1 раз больше, чем сверху вниз. Поэтому число шагов сверху вниз через границу не больше $(m-1)$, что, конечно, тоже не больше m.

Итак, количество шагов с $(m+1)$-й ступеньки вниз не больше m. Тогда, в силу Р1, число шагов с $(m+1)$-й ступеньки вверх не больше $(m+1)$.

Утверждение У1 доказано: с k-й снизу ступеньки человек сделал не больше $(k-1)$ шагов вниз и не более k шагов вверх, а всего – не более $(2k-1)$ шагов.

Теперь проведем аналогичный анализ, отсчитывая ступеньки сверху, т.е. докажем второе утверждение.

У2. *С k-й сверху ступеньки (для всех $1 \le k \le n$) человек сделал не больше k шагов вниз и не больше k шагов вверх.*

Доказательство также можно провести индукцией по k (проделайте это, воспользовавшись утверждением Р2).

Получается, что с k-й сверху ступеньки человек сделал не больше k шагов вниз и не более k шагов вверх, а всего – не более $2k$ шагов.

Чего же мы достигли? Мы ограничили сверху число шагов с каждой ступеньки, причем двумя способами. Например, число шагов с самой нижней ступеньки согласно У1 не превышает 1, а согласно У2 не превышает $2n$, т.е. «в целом» не превышает $\min(1, 2n)$ – так мы будем обозначать наименьшее из двух чисел. Для второй снизу ступеньки число шагов не больше $\min(3, 2n-2)$, для третьей – не больше $\min(5, 2n-4)$ и так далее, вплоть до самой верхней ступеньки, для которой число шагов не больше $\min(2n-1, 2)$. Ясно, что если перебирать ступеньки снизу вверх, то первое число в скобках будет монотонно возрастать, а второе – уменьшаться. Поэтому для какой-то «нижней части» ступенек минимальное значение – первое, а для остальных («верхней части») – второе. Определимся, где граница «водораздела». Рассмотрим k-ю ступеньку снизу. Ее номер, если отсчитывать сверху, равен $(n-k+1)$, поэтому можно записать, что с нее сделано не больше $\min(2k-1, 2n-2k+2)$ шагов. Если приравнять оба числа в скобках, то получим $2k-1 = 2n-2k+2$, откуда найдем «граничное значение»: $k_{\text{гр}} = \frac{2m+3}{4}$. Таким образом, если номер ступеньки (снизу) $k < \frac{2n+3}{4}$, то $\min(2k-1, 2n-2k+2) = 2k-1$, если же $k > \frac{2n+3}{4}$, то $\min(2k-1, 2n-2k+2) = 2n-2k+2$. Понятно, что равенство $k = \frac{2n+3}{4}$ невозможно, так как $\frac{2n+3}{4}$ – не целое число (числитель нечетный!).

Пусть n – четное число, т.е. $n = 2m$ (m – натуральное). Тогда $k_{\text{гр}} = \frac{2n+3}{4} = m + \frac{3}{4}$. Посему для $k \le m$ число шагов с k-й ступеньки не превышает $(2k-1)$, т.е. при возрастании k возрастает от 1 до $(2m-1)$ с увеличением на 2, а для $k \ge m+1$ число шагов с k-й ступеньки не превышает $2n-2k+2 = 4m-2k+2$, т.е. при возрастании k убывает от $2m$ до 2 с уменьшением на 2. Итого, суммарное число шагов, сделанных со всех ступенек, равно

$$S = \left(1+3+\ldots+(2m-1)\right) + \left(2m+(2m-2)+\ldots+2\right) =$$
$$= 1+2+\ldots+2m = 1+2+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Пусть теперь n – нечетное число, т.е. $n = 2m-1$ (m – натуральное). Тогда $k_{\text{гр}} = \frac{2n+3}{4} = m + \frac{1}{4}$. Поэтому для $k \le m$ число шагов с k-й ступеньки не превышает $(2k-1)$, т.е. при возрастании k возрастает от 1 до $(2m-1)$ с увеличением на 2, а для $k \ge m+1$ число шагов с k-й ступеньки не превышает $2n-2k+2-4m-2k+2$, т.е. при возрастании k убывает от $(2m-2)$ до 2 с уменьшением на 2. Итого, суммарное число шагов, сделанных со всех ступенек, равно

$$S = \left(1+3+\ldots+(2m-1)\right) + \left((2m-2)+(2m-4)+\ldots+2\right) =$$
$$= 1+2+\ldots+(2m-1) = 1+2+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Как видно, и для четного, и для нечетного n суммарное число шагов, сделанных человеком, не превышает $\frac{n(n+1)}{2}$. Остался последний штрих: для каждого n привести пример начального расположения указателей и исходного местонахождения человека на лестнице.

Примеры эти различны для четного и нечетного n.

Если n – четное (т.е. $n = 2m$), то следует на m нижних ступеньках установить указатели вверх, а на m верхних – вниз. «Стартовая» ступенька – любая из двух, находящихся вблизи центра лестницы (т.е. m-я или $(m+1)$-я снизу).

Убедимся, что число шагов здесь равно именно $\frac{n(n+1)}{2}$. Это сделать «в лоб» не так-то просто, поэтому вновь применим индукцию по n с увеличением 2, начиная от наименьшего значения 2.

Пусть лестница имеет только $n = 2$ ступеньки. Изобразим схематично, к чему это приведет. Удобнее условно расположить лестницу горизонтально (считая, что земля находится слева, а крыша – справа). При этом ступеньки (а также землю и крышу) изобразим в виде прямоугольников, и в каждом из них будем показывать направления стрелок-указателей (естественно, если стрелка показывает вправо, то это считается вверх, а если влево – то вниз). Знаком «+» отметим текущее положение человека. Тогда для $n - 2$ получится вот что:

	Земля	*1-я ст.*	*2-я ст.*	*Крыша*
Исходное положение		$\rightarrow$	+ $\leftarrow$	
После 1-го шага		+ $\rightarrow$	$\rightarrow$	
После 2-го шага		$\leftarrow$	+ $\rightarrow$	
После 3-го шага		$\leftarrow$	$\leftarrow$	+

Как видно, для двух ступенек число шагов действительно равно $\frac{2(2+1)}{2} = 3$. При этом после схода человека с лестницы на крышу все указатели-стрелки остались направлены вниз.

Пусть то же верно для $m = k$ ступенек, т.е. через $\frac{k(k+1)}{2}$ шагов человек сойдет на крышу, причем после этого все стрелки будут направлены вниз. Добавим к такой лестнице еще 2 ступеньки: одну снизу и одну сверху, причем на нижней ступеньке указатель направим вверх, а на верхней – вниз. Посмотрим, что получится. Так как впервые человек покинет пределы лестницы из k ступенек только на $\frac{k(k+1)}{2}$-м шаге, то до тех пор человек никак не затронет добавленные ступеньки, и лишь $\frac{k(k+1)}{2}$-м шагом станет на верхнюю из них (она «появилась» вместо крыши). Поэтому можно изобразить, как теперь выглядит вся картинка:

Земля	*1-я ст.*	*1-я ст.*	…	*(k+1)-я ст.*	*(k+1)-я ст.*	*Крыша*
	→	←	…	←	+ ←	
	Добавленная ступенька снизу	*«Прежняя» лестница из k ступенек стала серединой «наращенной» лестницы*			*Добавленная ступенька сверху*	

Далее, как видим, на лестнице $(k + 1)$ стрелок подряд (на всех ступеньках, кроме самой нижней) направлены вниз, и человек стоит на самой верхней ступеньке. Очевидно, теперь он, в соответствии со стрелками, сделает подряд $(k + 1)$ шагов вниз, перебравшись на самую нижнюю ступеньку, и вот что получится:

Земля	*1-я ст.*	*2-я ст.*	…	*(k+1)-я ст.*	*(k+2)-я ст.*	*Крыша*
	+ →	→	…	→	→	

Теперь все $(k + 2)$ стрелок указывают вверх, и человек стоит на самой нижней ступеньке. Ясно, что, сделав следующие $(k + 2)$ шагов, он выйдет на крышу. Таким образом, если нашу лестницу из k ступенек нарастить еще двумя (сверху и снизу), то всего человек сделает $\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)+(k+2)=\frac{(k+2)(k+3)}{2}$ шагов, что и требовалось.

С четными n разобрались.

Если же n – нечетное (т.е. $n = 2m - 1$), то здесь стартовая ступенька – центральная ступенька лестницы (m-я снизу, она же m-я сверху). Указатели на ступеньках, находящихся ниже стартовой, первоначально показывают вверх, а на ступеньках, находящихся выше стартовой, – вниз. Направление указателя, расположенного на стартовой ступеньке, значения не имеет. Для определенности направим его тоже вниз и аналогичной индукцией по n убедимся, что человек сделает ровно $\frac{n(n+1)}{2}$ шагов.

Сначала – случай с наименьшим $n = 1$. Здесь все настолько очевидно, что рисовать схему и не надо: после $\frac{1(1+1)}{2}=1$ хода человек окажется на крыше, а стрелка на единственной ступеньке будет показывать вниз.

Пусть то же верно для $n = k$ ступенек, т.е. и для нечетного k через $\frac{k(k+1)}{2}$ шагов человек сойдет на крышу, причем после этого все стрелки будут направлены вниз. Добавим к такой лестнице еще 2 ступеньки: одну снизу и одну сверху, причем на нижней ступеньке указатель направим вверх, а на верхней – вниз. И получится та же картина, что и для четного k, т.е. в дальнейшем рассуждения здесь абсолютно такие же, что и для предыдущего случая, так что повторяться не будем.

Итак, пример приведен, все в порядке.

И.Акулич

Ф1973. *Камень бросают под углом α к горизонту, придав ему начальную скорость v_0. Точка падения камня на H ниже точки броска. Вектор скорости камня в полете поворачивается. Найдите максимальное и минимальное значения угловой скорости этого вращения. Земля, как известно, плоская; считайте, что воздуха на ней нет.*

Полное ускорение летящего камня все время направлено вниз и равно g. Вектор скорости $\vec{v}$ увеличивается по модулю за счет касательной проекции ускорения a_t, а поворачивает его нормальная составляющая ускорения a_n. При этом за малый интервал времени τ угол поворота составляет $\Delta\varphi = a_n\tau/v$ и угловая скорость вращения равна $\omega = \Delta\varphi/\tau = a_n/v$. Обозначим угол между вертикалью и направлением вектора скорости через β. Горизонтальная составляющая вектора скорости все время одна и та же, тогда $\sin\beta = \frac{v_0\cos\alpha}{v}$ и нормальная составляющая ускорения равна $a_n = g\sin\beta = \frac{gv_0\cos\alpha}{v}$. Значит, угловая скорость вращения вектора скорости составляет

$$\omega = \frac{a_n}{v} = \frac{gv_0\cos\alpha}{v^2}.$$

Максимальная величина этой угловой скорости получается в верхней точке траектории, где скорость тела минимальна – там есть только ее горизонтальная составляющая:

$$\omega_{\max} = \frac{g}{v_0\cos\alpha}.$$

Минимальное значение угловой скорости получится в самой нижней точке траектории, где квадрат полной скорости максимален и составляет $v^2 = v_0^2 + 2gH$, при этом

$$\omega_{\min} = \frac{gv_0\cos\alpha}{v_0^2 + 2gH}.$$

З.Рафаилов

Ф1974. *По гладкому горизонтальному столу может двигаться куб массой M. На нем находится другой куб – поменьше, его масса m. На кубы действуют горизонтальные силы: F – на нижний и f – на верхний. Силы эти параллельны, приложены к центрам кубов и направлены в одну сторону. Найдите ускорения кубов. Коэффициент трения между верхним и нижним телами μ. Кубы двигаются поступательно, не вращаясь.*

Направления сил трения – со стороны верхнего куба на нижний и со стороны нижнего куба на верхний – определяются простым соотношением: если $F/M > f/m$, то верхний куб при отсутствии трения отставал бы от нижнего; значит, на него сила трения действует «вперед» – в сторону силы f, а на большой куб действует сила трения, направленная назад. В этом случае при достаточно большом коэффициенте трения кубы едут вместе с ускорением

$$a = \frac{F+f}{M+m}.$$

Условие совместного движения кубов: $\mu \geq \mu_1$, где μ_1 – «граничное» значение коэффициента трения, определяется условием

$$\frac{F - \mu_1 mg}{M} = \frac{f + \mu_1 mg}{m},$$

откуда находим

$$\mu_1 = \frac{Fm - fM}{mg(M+m)}.$$

Если коэффициент трения меньше этого «граничного» значения, то ускорения кубов находятся совсем просто: нижний куб движется с ускорением

$$a_M = \frac{F - \mu_1 mg}{M},$$

верхний – с ускорением

$$a_m = \frac{f + \mu_1 mg}{m}.$$

Если же $F/M < f/m$, то верхний куб пытается обогнать нижний, направления сил трения меняются на противоположные, ускорение при совместном движении не изменяется, а при недостаточно большом трении ускорения составляют

$$a_M = \frac{F + \mu_2 mg}{M} \text{ и } a_m = \frac{f - \mu_2 mg}{m},$$

при этом «граничное» значение коэффициента трения равно

$$\mu_2 = \frac{fM - Fm}{mg(M+m)}.$$

Р.Александров

Ф1975. *В системе, изображенной на рисунке 1, грузы имеют одинаковые массы, блоки и нити очень легкие, нити нерастяжимы, свободные их куски вертикальны. Найдите ускорения блоков. Ось самого верхнего блока закреплена.*

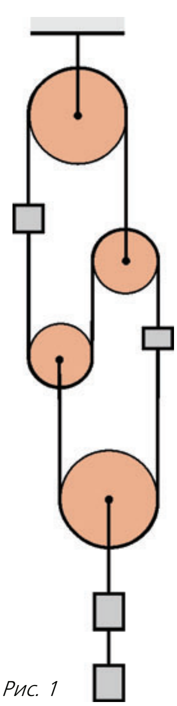


Рис. 1

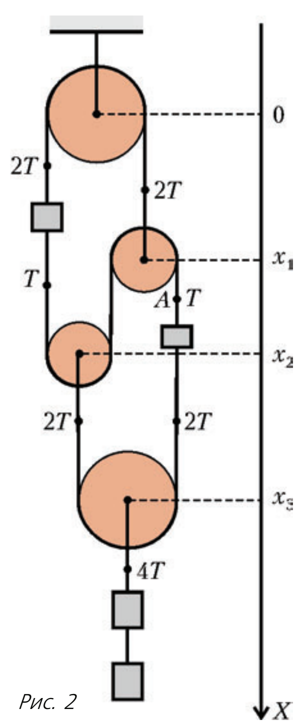


Рис. 2

Обозначим силу натяжения нити в точке A буквой T (рис.2). Тогда легко выразить все остальные силы натяжения – они показаны на чертеже. Направим вниз ось координат X, выберем начало координат на уровне оси верхнего блока, координаты осей остальных блоков обозначим x_1, x_2, x_3. Для того чтобы связать между собой ускорения осей блоков, воспользуемся условием нерастяжимости нити – сумма длин свободных кусков нити не меняется со временем (пока какой-нибудь груз не «упрется» в блок, так что решать задачу нужно быстро...). Выразим сумму длин свободных кусков нити через координаты осей блоков:

$$x_1 + x_2 + (x_2 - x_1) + (x_3 - x_1) + (x_3 - x_2) = \text{const},$$

или

$$-x_1 + x_2 + 2x_3 = \text{const}.$$

Отсюда видна связь между ускорениями осей:

$$a_1 = a_2 + 2a_3$$

(положительное направление – вниз).

Ускорение верхнего груза равно a_1, но направлено против положительного направления оси координат, ускорения двух нижних грузов такие же, как у блока, к которому они привязаны. Ускорение a правого груза также легко выразить через ускорения осей блоков:

$$a = a_1 - 2a_2.$$

Теперь запишем уравнения динамики для грузов:

$$T - mg = ma_1,$$

$$T + mg = ma = m(a_1 - 2a_2),$$

$$2mg - 4T = 2ma_3.$$

Отсюда находим

$$a_1 = -0{,}6g, \quad a_2 = -g, \quad a_3 = 0{,}2g.$$

Ускорения a_1 и a_2 направлены вверх, a_3 – вниз. Кстати, сила натяжения нити в точке A составляет $T = 0{,}4mg$.

А.Блоков

Ф1976. *Население Земного шара составляет в наши дни приблизительно 4,5 миллиарда человек. Сколько килограммов воздуха приходится на каждого человека?*

Атмосфера довольно тонкая (по сравнению с радиусом Земли), поэтому можно считать, что на площадку S действует сила давления $F = pS$, которая равна силе тяжести mg, где m – масса воздуха над площадкой. (Если бы существенная доля атмосферного воздуха располагалась на больших высотах, нам пришлось бы учитывать уменьшение ускорения тяготения на таких расстояниях.) Тогда массу атмосферы можно найти по формуле

$$m = \frac{pS}{g} = \frac{10^5}{9{,}8} \cdot 4\pi \left(\frac{4 \cdot 10^7}{2\pi}\right)^2 \text{ кг} \approx 5 \cdot 10^{18} \text{ кг}$$

(мы учли, что длина окружности Земли по экватору составляет 40000 км ровно!).

Значит, на каждого человека приходится

$$\Delta m = \frac{5 \cdot 10^{18}}{4{,}5 \cdot 10^{9}} \text{ кг} \approx 10^{9} \text{ кг}.$$

Довольно много…

А.Мальтусов

Ф1977. *Средняя квадратичная скорость молекул воздуха в комнате 500 м/с, длина свободного пробега 0,01 мм. В данный момент выбранная для наблюдения молекула находится посредине квадратной комнаты площадью 25 м^2. Оцените среднее время, необходимое для ее путешествия до одной из стен.*

Если бы частица не меняла направления движения при ударах о другие частицы, она добралась бы до стенки совсем быстро – за время

$$t = \frac{L}{v} = \frac{5 \text{ м}}{500 \text{ м/с}} = 0{,}01 \text{ с}.$$

(Мы взяли «среднее» расстояние до стенки – при площади комнаты 25 квадратных метров расстояние от центра комнаты до ближайшей точки стены 2,5 м, до угла, т.е. до самой удаленной точки этой стены, больше 8,5 м, возьмем для грубой оценки 5 м.)

Подсчитаем теперь, сколько нужно времени для пролета (вернее – проползания) этого расстояния с учетом соударений частиц. Для этого посмотрим, как добавляется к уже пройденному пути L_n очередной «кусочек» $d = 0{,}01$ мм – длина свободного пробега. Воспользуемся теоремой косинусов для нахождения расстояния L_{n+1} от начальной точки путешествия до точки расположения частицы после прохождения $(n+1)$ участка длиной d каждый:

$$L_{n+1}^2 = L_n^2 + d^2 - 2L_n d\cos\varphi,$$

где φ – угол между перемещением $\vec{L}_n$ до прибавления очередного участка и новым отрезком длиной d. Угол φ может быть любым в пределах от 0 до $180°$, среднее значение косинуса этого угла получается нулевым – это вполне очевидно, хотя и не очень просто доказать. (Статья, в которой этот вопрос разобран, опубликована примерно 100 лет назад. Попробуйте сами найти автора этой работы по учебникам или справочникам – гарантирую, что получите удовольствие…)

Будем считать, что

$$L_{n+1}^2 = L_n^2 + d^2,$$

тогда

$$L_n^2 = nd^2.$$

Отсюда число ударов при прохождении длинного пути L будет равно $n = L^2/d^2$, а время путешествия составит

$$T = \frac{nd}{v} = \frac{L^2}{dv} = \frac{(5 \text{ м})^2}{10^{-5} \text{ м} \cdot 500 \text{ м/с}} = 5000 \text{ с}.$$

Учитывая, что длина свободного пробега молекул в воздухе при обычных условиях во много раз меньше, чем 0,01 мм, получаем время путешествия молекулы из центра комнаты до стены просто огромным – на практике даже очень незначительные, практически неощутимые, потоки воздуха, которые всегда происходят в комнате, сокращают время перемешивания в десятки и сотни тысяч раз.

А.Томов

Ф1978. *Медная тонкостенная сфера радиусом R заряжена, полный заряд сферы Q. На расстоянии R/3 от центра сферы находится точечный заряд q, а на расстоянии 3R от центра сферы помещен точечный заряд 2q. Найдите потенциалы центра сферы и самой сферы. Какой заряд протечет по тонкому проводу, если этим проводом сферу заземлить?*

Найти потенциал центра сферы совсем просто – его создают два точечных заряда q и $2q$ и заряд Q, «размазанный» по сфере:

$$\varphi_{\text{ц}} = k\frac{q}{R/3} + k\frac{2q}{3R} + k\frac{Q}{R}.$$

Потенциал самой сферы найти чуть труднее, придется немного порассуждать. Действительно, на внутренней стороне сферы собирается заряд $-q$, силовые линии от внутреннего заряда q заканчиваются на внутренней поверхности сферы, заряд наружной поверхности сферы теперь равен $Q + q$. Если мы уберем заряды q и $-q$ внутри сферы, поле снаружи не изменится, не изменится и потенциал сферы. А посчитать его будет совсем просто – теперь внутри сферы поля нет, мы можем сделать расчет для любой внутренней точки, но удобно взять центр. Тогда потенциал сферы будет

$$\varphi_{\text{сф}} = k\frac{2q}{3R} + k\frac{Q+q}{R}.$$

Если мы заземлим сферу, ее потенциал станет равным нулю, так что рассчитать «утекший» заряд Q_x совсем просто:

$$0 = k\frac{2q}{3R} + k\frac{Q+q-Q_x}{R},$$

откуда

$$Q_x = Q + \frac{5}{3}q.$$

Ф.Изиков

Ф1979. *В изображенной на рисунке 1 цепи конденсаторы одинаковы, емкость каждого C = 100 мкФ, резистор имеет сопротивление R = 100 кОм, батарейка с ЭДС $\mathscr{E}$ = 10 В обладает внутренним сопротивлением r = 1 Ом. Цепь замыкают. Какой ток течет по резистору через время τ = 0,1 с после включения, и какой ток в этот же момент течет через батарейку? Какое количество теплоты выделится в резисторе за большое время?*

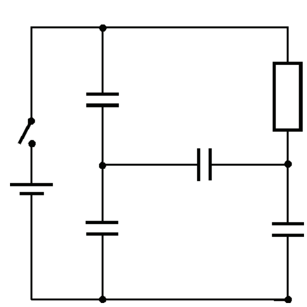


Рис. 1

После замыкания цепи конденсаторы быстро заряжаются, а ток через резистор очень мал. Действительно,

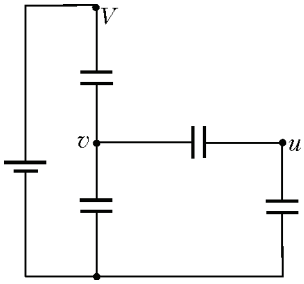


Рис. 2

токи заряда в самом начале определяются маленьким внутренним сопротивлением батарейки: «характерное время заряда» равно произведению общей емкости, можно примерно взять ее равной C, и сопротивления r – получится $rC = 10^{-4}$ с, что намного меньше 0,1 с, заданных в условии задачи. С другой стороны, $RC = 10^5 \cdot 10^{-4}$ с $= 10$ с – это намного больше заданного интервала 0,1 с.

Сделаем расчет – используем метод узловых потенциалов (рис.2). Пусть через резистор протек заряд q, потенциалы узлов обозначим v и u, потенциал верхней точки V – можно считать, что при малом внутреннем сопротивлении и малом токе батарейки $V = 10$ В. Если через резистор протек заряд q, то суммарный заряд обкладок, потенциал которых обозначен u, равен q:

$$C(v-u) + Cu = q .$$

Суммарный заряд обкладок с потенциалом v все время равен нулю:

$$Cv + C(v-u) + C(v-V) = 0 .$$

Из этих уравнений получаем

$$u = \frac{V}{5} + \frac{3q}{5C}, \quad v = \frac{2V}{5} + \frac{q}{5C} .$$

Видно, что при $q = 0$ – за время 0,1 с заряд через резистор практически «не прошел» – потенциал нижнего конца резистора составляет $0{,}2V = 2$ В, верхний вывод резистора имеет потенциал $V = 10$ В. Поэтому ток через резистор в интересующий нас момент равен

$$I_R = \frac{0{,}8V}{R} = 0{,}08 \text{ мА} .$$

За время прохождения заряда q через резистор суммарный заряд двух нижних конденсаторов увеличился на $\left(\frac{3q}{5C} + \frac{q}{5C}\right)C = 0{,}8q$. Ясно, что через батарейку протек именно этот заряд. Он получился меньше заряда q – верхний конденсатор немного разрядился, часть его заряда прошла через батарейку «назад». Значит, ток через батарейку равен

$$I_б = 0{,}8 I_R = 0{,}064 \text{ мА}.$$

Для расчета количества теплоты, которое выделится в резисторе, запишем разность потенциалов на нем как функцию протекшего через него заряда:

$$\Delta\varphi = 0{,}8V - \frac{0{,}6q}{C} .$$

Видно, что это линейная зависимость. Полный протекший за большое время заряд Q обращает разность потенциалов в ноль, откуда получаем

$$Q = \frac{4CV}{3} .$$

Таким образом, выделившееся в резисторе количество теплоты равно

$$W = \frac{1}{2}\Delta\varphi_{нач} Q = \frac{1}{2} \cdot 0{,}8V \cdot \frac{4CV}{3} = \frac{8}{15}CV^2 \approx 5 \text{ мДж} .$$

А.Зильберман

Ф1980. *В одной плоскости с длинным прямым проводом закреплено маленькое сверхпроводящее кольцо из очень тонкого провода. Диаметр кольца d = 1 см, центр кольца находится на расстоянии H = 1 м от провода, индуктивность кольца L = 10 мкГн. По проводу пропускают электрический ток – сила тока быстро возрастает от нуля до I = 10 А. Какой установившийся ток потечет по кольцу? Какая сила при этом будет действовать на кольцо?*

Магнитная индукция поля длинного прямого провода с током I на расстоянии x от него равна

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi x} .$$

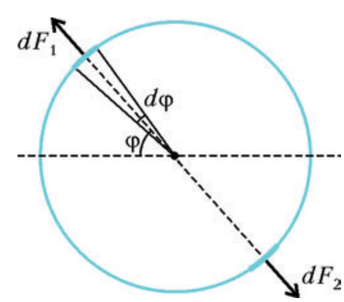
Кольцо маленькое – по сравнению с расстоянием H от провода, для расчета магнитного потока будем считать поле однородным в пределах кольца. Контур сверхпроводящий, поэтому полный магнитный поток через него должен остаться нулевым. Тогда получим

$$LI_к = \frac{\mu_0 I}{2\pi H}\frac{\pi d^2}{4} .$$

Отсюда найдем установившийся ток в кольце:

$$I_к = \frac{\mu_0 I d^2}{8HL} \approx 1{,}5 \cdot 10^{-5} \text{ А} .$$

Для расчета силы, действующей на кольцо, поле уже нельзя считать однородным – в этом случае сила получилась бы точно равной нулю. Удобно взять малые диаметрально противоположные кусочки кольца (см. рисунок) – проекции сил на направление вдоль провода нас не интересуют, понятно, что в сумме они дадут ноль. В проекции на перпендикулярное к проводу направление получим



$$dF_1 = B_1 I_к R d\varphi, \quad dF_2 = B_2 I_к R d\varphi ,$$

$$(dF_1 - dF_2)\cos\varphi = \mu_0 I I_к R \cos\varphi \, d\varphi \cdot \left(\frac{1}{2\pi(H - R\cos\varphi)} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2\pi(H + R\cos\varphi)}\right) = \frac{\mu_0 I I_к R^2 \cos^2\varphi \, d\varphi}{\pi\left(H^2 - R^2\cos^2\varphi\right)} .$$

Учтем, что радиус кольца R намного меньше H, и упростим выражение:

$$(dF_1 - dF_2)\cos\varphi \approx \frac{\mu_0 I I_к R^2 \cos^2\varphi \, d\varphi}{\pi H^2} .$$

Нужно просуммировать полученные силы по всем частям окружности, тогда полная сила будет

$$F = \frac{\mu_0 I I_к R^2}{\pi H^2} \int \cos^2 \varphi \, d\varphi = \frac{\mu_0 I I_к R^2}{2H^2} = \\ = \frac{\mu_0^2 I^2 d^4}{64 H^3 L} \approx 2,5 \cdot 10^{-15} \text{ Н}.$$

З.Сильнов

Ф1981. *К источнику переменного напряжения (звуковой генератор) подключена последовательная цепь, состоящая из катушки индуктивностью L = 1 Гн, конденсатора емкостью C = 1 мкФ и резистора сопротивлением R. Будем увеличивать частоту напряжения источника, сохраняя неизменной его амплитуду. При каких условиях напряжение, измеренное идеальным вольтметром на выводах конденсатора, будет при увеличении частоты вначале увеличиваться, а затем уменьшаться? На какой частоте напряжение конденсатора окажется максимальным при R = 100 Ом?*

При малых величинах R будет явно выраженный резонанс, при больших сопротивлениях получится монотонная частотная характеристика. Сделаем расчет.
Амплитуда тока в цепи равна

$$I = \frac{U}{\sqrt{\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2 + R^2}},$$

а амплитуда напряжения на конденсаторе составляет

$$U_C = \frac{I}{\omega C} = \frac{U}{\sqrt{\left(\omega^2 LC - 1\right)^2 + R^2 \omega^2 C^2}}.$$

Исследуем полученное выражение. Максимум получится, если знаменатель имеет минимум в диапазоне частот. Можно исследовать и квадрат знаменателя – возьмем производную по частоте ω и приравняем ее нулю:

$$\left(L^2 C^2 \omega^4 + \omega^2 \left(R^2 C^2 - 2LC\right) + 1\right)' = \\ = 4L^2 C^2 \omega^3 + 2\omega\left(R^2 C^2 - 2LC\right) = 0,$$

откуда

$$\omega^2 = \frac{2LC - R^2 C^2}{2L^2 C^2}.$$

Видно, что при $R > \sqrt{2L/C} \approx 1,4$ кОм максимума для напряжения на конденсаторе не получается.
Для малого сопротивления 100 Ом из выведенной формулы получится частота $\omega_1 = 997,5 \text{ с}^{-1}$ – чуть ниже «чистой» резонансной частоты $\omega_0 = 1000 \text{ с}^{-1}$.

А.Повторов

Ф1982. *Источник света, имеющий очень маленькие размеры, движется вдоль главной оптической оси собирающей линзы с постоянной скоростью v, а линза движется навстречу ему с неизменной скоростью 2v. В некоторый момент скорость изображения оказалась по величине равной v (все три скорости заданы относительно неподвижной системы отсчета). Найдите увеличение, которое дает линза в этот момент. С каким ускорением движется в этот момент изображение? Изображение получают на экране, расположенном перпендикулярно главной оптической оси линзы, фокусное расстояние линзы F.*

Речь идет об изображении на экране – задача при этом упрощается, не нужно рассматривать случаи мнимых изображений. Ясно, что стоит «пересесть на линзу»: в этом случае источник движется со скоростью $3v$ в сторону линзу, а скорость изображения либо равна $3v$ и направлена в сторону от линзы, либо равна v – в зависимости от исходного направления движения.
В первом случае очевидно, что расстояние от источника до линзы в интересующий нас момент составляет $2F$, размер изображения равен размеру источника, т.е. увеличение линзы равно

$$\Gamma = -1.$$

Во втором случае придется немного посчитать. Из формулы линзы

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F}$$

следует, что

$$\frac{-d'}{d^2} = \frac{f'}{f^2},$$

где «штрихом» обозначена производная по времени. Расстояние от линзы до источника отсчитывается в противоположную сторону, значит, $d' = -3v$. Если скорость изображения равна v, то $f = d/\sqrt{3}$, и увеличение в этом случае равно

$$\Gamma = -\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

(Кстати, и первый случай с равными скоростями можно было анализировать при помощи полученной формулы, но там было легко догадаться и так.)
Для расчета ускорения запишем в удобном виде выражение для f:

$$f = \frac{dF}{d - F} = F + \frac{F^2}{d - F}.$$

Первая производная по времени равна

$$f' = -\frac{F^2 d'}{(d - F)^2}$$

(можно было использовать эту формулу и в первой части решения!). Вторая производная по времени дает

$$f'' = -\frac{2F^2 d'^2}{(d - F)^3}$$

– мы учли, что ускорение источника равно нулю. Для первого случая (скорость изображения равна $3v$) получим ускорение изображения

$$f'' = -\frac{18v^2}{F},$$

для второго случая –

$$f'' = -\frac{2\sqrt{3}v^2}{F}.$$

Система отсчета, в которую мы пересели, инерциальная – ускорения в ней такие же, как и в исходной.

А.Старов