кая тележка. Когда тележка едет по неподвижному клину – мы его удерживаем, приложив к нему горизонтальную силу, – она давит на его поверхность силой f. Увеличим горизонтальную силу, действующую на клин, так, чтобы он двигался по горизонтали с постоянным ускорением. Найдите величину этой силы, если известно, что сила, с которой тележка давит на поверхность клина, стала вчетверо больше по величине. Масса клина в 5 раз больше массы тележки.

З.Рафаилов

Ф2046. В двух одинаковых сосудах находятся одинаковые массы кислорода и гелия. Давление кислорода 1 атм, давление гелия 2 атм. Сосуды соединяют тонкой трубкой, и газы перемешиваются. Каким станет давление в системе после установления равновесия? Теплообмен с окружающей средой пренебрежимо мал. Молярная масса кислорода 32 г/моль, гелия 4 г/моль.

А.Повторов

Ф2047. Многопредельный ампер-вольтметр для измерений в цепях постоянного тока сделан на основе точного микроамперметра с током полного отклонения 100 мкА и сопротивлением 850 Ом. При помощи многопозиционного переключателя к нему подключаются точно подобранные резисторы — добавочные сопротивления для измерения напряжений и шунты для измерения токов. Пределы измерения напряжений 1 В, 10 В и 100 В, пределы измерения токов 1 мА, 10 мА и 100 мА. Хотелось бы иметь более «подробные» пределы измерений, но кардинально переделывать точный и удобный прибор совсем не хочется. На передней панели прибора есть отдельный, не используемый для его работы переключатель на два положения – у переключателя три контакта. В одном его положении соединены между собой контакты *1* и *2*, а контакт *3* отключен, при другом положении отключен контакт *2*, а соединены контакты *1* и *3*. Придумайте и рассчитайте простую схему, которая позволяла бы «растянуть» шкалы прибора ровно в три раза на всех пределах измерения (шкала измерения напряжений 10 В превращается в 30 В, шкала измерения тока 1 мА – в 3 мА и т.д.) в одном из положений этого переключателя, а в другом положении все должно оставаться «как было». Кстати, эти положения переключателя можно обозначить *x1* и *x2*.

Р.Александров

Решения задач М2011–М2020, Ф2028–Ф2032

М2011. *Натуральные числа от 1 до 200 разбили на 50 множеств. Докажите, что в одном из них найдутся три числа, являющиеся длинами сторон некоторого треугольника.*

Рассмотрим числа 100, 101, …, 200. Так как их всего 101, то какие-то три из них попадут в одно множество. Сумма любых двух из этих трех чисел больше 200, и, следовательно, больше третьего числа. Значит, существует треугольник с соответствующими длинами сторон, что и требовалось доказать.

М.Мурашкин

М2012. *В тетраэдре ABCD из вершины A опустили перпендикуляры AB', AC', AD' на плоскости, делящие двугранные углы при ребрах CD, BD, BC пополам. Докажите, что плоскость $B'C'D'$ параллельна плоскости BCD.*

Продолжим отрезок AB' до пересечения с плоскостью BCD в точке B''. Так как плоскости BCD и ACD симметричны относительно биссекторной плоскости, то $AB' = B'B''$. Аналогично по точкам C' и D' строим точки C'' и D''.

При гомотетии с центром A и коэффициентом $\frac{1}{2}$ плоскость $B''C''D'' = BCD$ переходит в плоскость $B'C'D'$, поэтому $B'C'D' \parallel BCD$, что и требовалось доказать.

А.Бадзян

М2013. *При каких натуральных n найдутся такие положительные рациональные, но не целые числа a и b, что оба числа $a + b$ и $a^n + b^n$ целые?*

Ответ: при всех нечетных n.

Если n нечетно, то положим $a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{2^n - 1}{2}$. Тогда $a + b$ целое, и

$$a^n + b^n = (a+b)\left(a^{n-1} - a^{n-2}b + \ldots + b^{n-1}\right) =$$
$$= 2^{n-1}\left(a^{n-1} - a^{n-2}b + \ldots + b^{n-1}\right);$$

знаменатели слагаемых в скобках равны 2^{n-1}, поэтому число $a^n + b^n$ также целое.

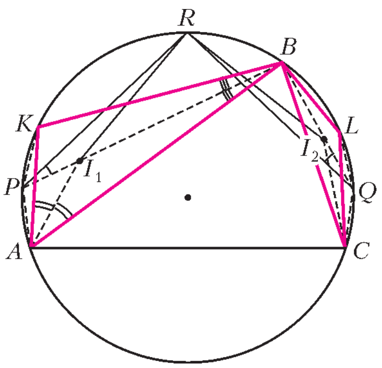
Пусть n четное, $n = 2k$ для некоторого натурального k. Предположим, что требуемые числа a, b нашлись. Так как их сумма целая, то знаменатели в их несократимой записи равны, т.е. $a = \frac{p}{d}$, $b = \frac{q}{d}$, где $d > 1$, $\text{НОД}(p,d) = \text{НОД}(q,d) = 1$; при этом $p + q$ кратно d. Тогда

$$p^n + q^n = \left(p^{2k} - q^{2k}\right) + 2q^{2k} =$$
$$= \left(p^2 - q^2\right)\left(p^{2k-2} + p^{2k-4}q^2 + \ldots + q^{2k-2}\right) + 2q^{2k} =$$
$$= (p+q)K + 2q^{2k},$$

где $K = (p-q)\left(p^{2k-2} + p^{2k-4}q^2 + \ldots + q^{2k-2}\right)$ – целое число. Поскольку $a^n + b^n = \frac{p^n + q^n}{d^n}$ целое, то $p^n + q^n$ делится на d^n. В частности, $p^n + q^n$ делится на d, а так как $p + q$ делится на d, то и $2q^{2k}$ делится на d. Так как $\text{НОД}(q,d) = 1$, то 2 делится на d, и возможно лишь $d = 2$. Если $d = 2$, то p^n и q^n – квадраты нечетных чисел, следовательно, дают остаток 1 при делении на 4. Поэтому $p^n + q^n$ не делится на 4, а должно делиться на 2^{2k}. Противоречие.

В.Сендеров

М2014. *На дугах AB и BC окружности, описанной около треугольника ABC, выбраны точки K и L соответственно так, что прямые KL и AC параллельны. Докажите, что центры вписанных окружно-*



стей треугольников ABK и CBL равноудалены от середины дуги ABC.

Если $AB = BC$, то утверждение задачи очевидно. Пусть для определенности $AB > BC$ (см. рисунок).

Обозначим через I_1, I_2 центры вписанных окружностей треугольников AKB и CLB соответственно, через P, Q – вторые точки пересечения прямых BI_1, BI_2 с описанной окружностью треугольника ABC, а через R – середину дуги ABC этой окружности. Тогда $PA = QC$ как хорды, стягивающие половины равных дуг AK и CL. Так как $\angle PAI_1 = \angle PAK + \angle KAI_1 = \angle PBK + \angle BAI_1 = \angle ABI_1 + \angle BAI_1 = \angle AI_1P$, то треугольник AI_1P равнобедренный, и $PA = PI_1$. Аналогично, $QC = QI_2$; следовательно, $PI_1 = QI_2$. Далее, $PR = QR$ как хорды, стягивающие равные дуги, а $\angle I_2QR = \angle I_1PR$ как углы, опирающиеся на одну дугу. Тогда треугольники RI_1P и RI_2Q равны по двум сторонам и углу между ними, откуда $RI_1 = RI_2$, что и требовалось.

С.Берлов

М2015. *Можно ли спаять проволочный каркас куба $2 \times 2 \times 2$, разбитого на кубики $1 \times 1 \times 1$ (рис.1), из восемнадцати деталей конструктора, в котором каждая деталь имеет вид:*

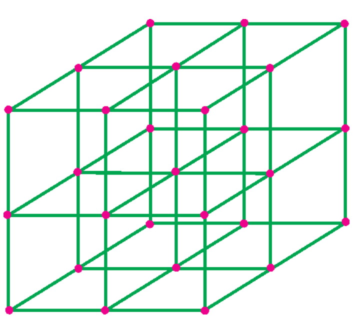


Рис. 1

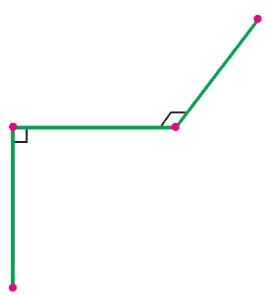


Рис. 2

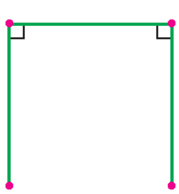


Рис. 3

а) скобки из трех попарно перпендикулярных спиц длины 1 (рис.2);
б) скобки из трех спиц длины 1 в виде буквы «П» (рис.3)?

Ответ: а) нельзя; б) нельзя.

Предположим, что каркас спаять удалось.

а) Так как каркас состоит из 54 единичных отрезков, то каждый единичный отрезок между узлами должен быть спицей ровно для одной детали. Из вершины куба выходят три отрезка (нечетное число), поэтому хотя бы одна деталь начинается в этой вершине. Если в одной из восьми вершин куба $2 \times 2 \times 2$ начинается деталь, то заканчивается она в центре куба. Отсюда следует, что центр является концом для 8 или более деталей. Но из центра куба выходят только 6 отрезков. Противоречие.

б) Из вершины куба выходят 3 отрезка, которые должны принадлежать не менее чем двум деталям. Из центра куба выходят 6 отрезков, которые должны принадлежать не менее чем трем деталям. Так как одна и та же деталь не может примыкать к двум вершинам или к вершине куба и к его центру, то необходимо не менее $2 \cdot 8 + 3 = 19$ деталей – противоречие.

Л.Емельянов

М2016. *У выпуклого многогранника $2n$ граней ($n \geq 3$), и все грани являются треугольниками. Какое наибольшее число вершин, в которых сходятся ровно 3 ребра, может быть у такого многогранника?*

Ответ: $\left[\dfrac{2n}{3}\right]$.

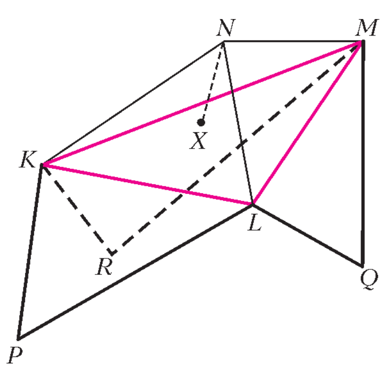
Назовем вершину, в которой сходятся ровно 3 ребра, *хорошей*.

Докажем, что никакие две хорошие вершины не лежат в одной грани. Предположим противное – пусть хорошие вершины A и B лежат в одной грани ABC. Ребро AB принадлежит еще одной грани – ABD. Поскольку вершина A хорошая, то кроме AB, AC, AD нет других ребер, выходящих из A. В вершине A сходятся ровно 3 грани – ABC, ABD и грань, содержащая ребра AC и AD, т.е. грань ACD. Аналогично получаем, что BCD является гранью многогранника. Получается, что многогранник является тетраэдром $ABCD$, что противоречит условию $n \geq 3$.

Из доказанного следует, что каждой хорошей вершине можно сопоставить три грани, сходящиеся в ней, причем различным хорошим вершинам сопоставлены разные грани. Отсюда следует, что количество хороших вершин не превосходит $\dfrac{2n}{3}$.

Остается описать построение выпуклого $2n$-гранника, для которого количество хороших вершин равно $\left[\dfrac{2n}{3}\right]$.

Определим вначале процедуру *наращивания грани* многогранника T с треугольными гранями. Пусть KLM – одна из граней (см. рисунок), KLP, LMQ, MKR – грани, отличные от KLM, содержащие ребра KL, LM, MK соответственно (точки P, Q, R не обязательно различны). Пусть X – некоторая внутренняя точка треугольника KLM. На перпендикуляре к плоскости KLM, восставленном в точке X, вне многогранника T выберем такую точку N, что точки K и N лежат по одну сторону от плоскости LMQ, L и N – по одну сторону от MKR, M и N – по одну сторону от KLP (этого можно добиться, выбирая длину XN достаточно малой). Рассмотрим многогранник T', получаемый добавлением к T пирамиды $KLMN$. По построе-



нию многогранник T' выпуклый. Будем говорить, что T' получен из T наращиванием грани KLM.

Если $n = 3$, то, нарастив одну из граней тетраэдра, получим пример шестигранника с двумя хорошими вершинами.

Пусть $n \geq 4$. В зависимости от остатка при делении на 3 представим n в виде $n = 3k$, $n = 3k - 1$ или $n = 3k - 2$ для некоторого натурального $k \geq 2$. Рассмотрим тетраэдр и нарастим некоторую его грань, у полученного многогранника нарастим еще одну грань и т.д. Повторим эту операцию $(k - 2)$ раз. При каждой операции количество граней увеличивается на 2, поэтому через $(k - 2)$ операции мы получим выпуклый $2k$-гранник, все грани которого треугольные. Отметим $n - k$ граней этого многогранника и последовательно их нарастим. При этом образуется выпуклый $2n$-гранник с $n - k = \left[\frac{2n}{3}\right]$ новыми вершинами, каждая из которых является хорошей.

А.Гарбер

М2017. *Квадрат 3000×3000 произвольным образом разбит на доминошки (т.е. прямоугольники 1×2 клетки).*

а) Докажите, что доминошки можно раскрасить в 3 цвета так, чтобы доминошек каждого цвета было поровну и у каждой доминошки было не более двух соседей ее цвета (доминошки считаются соседними, если они содержат клетки, соседние по стороне).

б) Докажите, что доминошки можно раскрасить в 4 цвета так, чтобы доминошек каждого цвета было поровну и ни у какой доминошки не было соседей ее цвета.

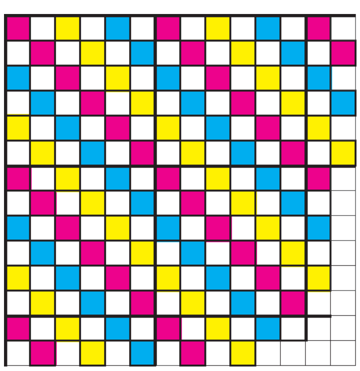


Рис. 1

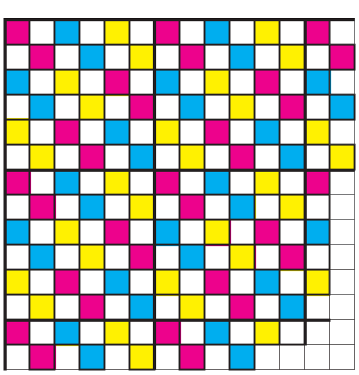


Рис. 2

Раскрасим клетки квадрата в черный и белый цвета в шахматном порядке. Каждая доминошка покрывает ровно одну черную клетку.

а) Разобьем квадрат 3000×3000 на квадраты 6×6 и в каждом квадрате перекрасим черные клетки в 3 цвета, как показано на рисунках 1 или 2. Окрасим доминошки в красный, синий и желтый цвета так, чтобы доминошка накрывала клетку своего цвета. В квадрате 6×6 поровну клеток каждого цвета, значит, и в квадрате 3000×3000 тоже. Следовательно, доминошек каждого цвета поровну. Пусть две клетки одного цвета покрыты соседними доминошками. Легко видеть, что для наших раскрасок это возможно только если эти две клетки имеют общую вершину. На рисунке 1 для фиксированной клетки имеется не более двух клеток того же цвета, имеющих с ней общую вершину, а на рисунок 2 – не более одной такой клетки.

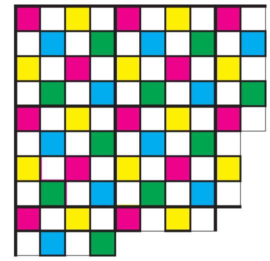


Рис. 3

Отсюда следует, что если использовать раскраску рисунка 1, то для любой доминошки имеется не более двух соседних доминошек того же цвета, а если использовать раскраску рисунка 2, то даже не более одной соседней доминошки того же цвета.

б) Разобьем квадрат 3000×3000 на квадраты 4×4 и в каждом квадрате перекрасим черные клетки в 4 цвета, как показано на рисунке 3. Окрасим доминошки в красный, синий, желтый и зеленый цвета так, чтобы доминошка накрывала клетку своего цвета. В квадрате 4×4 поровну клеток каждого цвета, значит, и в квадрате 3000×3000 тоже. Легко видеть, что две клетки одного цвета не могут быть покрыты соседними доминошками. Следовательно, при такой раскраске нет одноцветных соседних доминошек.

П.Кожевников

М2018. *Докажите, что если натуральное число N представляется в виде суммы трех квадратов целых чисел, делящихся на 3, то оно также представляется в виде суммы трех квадратов целых чисел, не делящихся на 3.*

Из условия следует, что число N можно представить в виде

$$9^n\left(a^2 + b^2 + c^2\right), \qquad (*)$$

где $n \in \mathbf{N}$, $a, b, c \in \mathbf{Z}$, a не делится на 3.

Лемма. *Всякое число вида $(*)$ можно представить в виде $9^{n-1}\left(x^2 + y^2 + z^2\right)$, где $x, y, z \in \mathbf{Z}$, x, y, z не делятся на 3.*

Без ограничения общности будем считать, что $a + b + c$ не делится на 3 (иначе число a можно заменить на $-a$). Имеем

$$9\left(a^2 + b^2 + c^2\right) =$$

$$= \left(4a^2 + 4b^2 + c^2\right) + \left(4b^2 + 4c^2 + a^2\right) + \left(4c^2 + 4a^2 + b^2\right) =$$

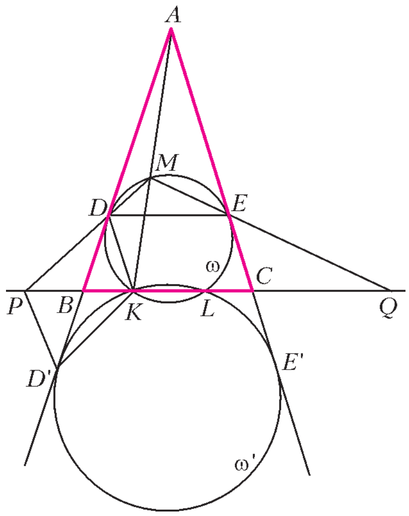
$$= (2a + 2b - c)^2 + (2b + 2c - a)^2 + (2c + 2a - b)^2.$$

Каждое из чисел $2a + 2b - c = 2(a + b + c) - 3c$, $2b + 2c - a = 2(a + b + c) - 3a$, $2c + 2a - b = 2(a + b + c) - 3b$ не делится на 3, так как $2(a + b + c)$ не делится на 3. Лемма доказана.

Для завершения решения осталось применить эту лемму n раз.

П.Козлов

М2019. *Окружность ω касается равных сторон AB и AC равнобедренного треугольника ABC и пересекает сторону BC в точках K и L. Отрезок AK пересе-*



кает ω *второй раз в точке M. Точки P и Q симметричны точке K относительно точек B и C соответственно. Докажите, что описанная окружность треугольника PMQ касается окружности* ω.

Обозначим через D и E точки касания ω со сторонами AB и AC. Из симметрии относительно биссектрисы угла BAC следует, что $DE \parallel BC$ (см. рисунок). Пусть при гомотетии с центром A и коэффициентом $\dfrac{AK}{AM}$ окружность ω переходит в окружность ω'. Окружность ω' проходит через точку K, а следовательно, и через L (из симметрии относительно биссектрисы угла BAC), а также ω' касается лучей AB и AC в некоторых точках D' и E'.

Из свойств гомотетии следует, что $MD \parallel KD'$. Далее, по теореме о произведении отрезков касательных $BD^2 = BK \cdot BL = BD'^2$, откуда $BD = BD'$. По построению $BK = BP$, поэтому $DKD'P$ – параллелограмм, а значит, $PD \parallel KD'$. Отсюда вытекает, что точки M, D, P лежат на одной прямой. Аналогично, точки M, E и Q лежат на одной прямой. Треугольники MDE и MPQ гомотетичны с центром M, следовательно, их описанные окружности также гомотетичны, т.е. касаются в точке M.

В.Филимонов

М2020*. *Известно, что многочлен* $(x+1)^n - 1$ *делится на некоторый многочлен* $P(x) = x^k + c_{k-1}x^{k-1} + c_{k-2}x^{k-2} + \ldots + c_1 x + c_0$ *четной степени k, у которого все коэффициенты* $c_0, c_1, \ldots, c_{k-1}$ *– целые нечетные числа. Докажите, что n делится на k + 1.*

Из условия следует, что $(x+1)^n - 1 = P(x)Q(x)$, где $Q(x)$ – некоторый многочлен. Степень $Q(x)$ равна $n - k$, и все его коэффициенты целые (это вытекает, например, из алгоритма деления многочленов «столбиком»).

Будем называть два многочлена $f(x)$ и $g(x)$ *похожими* и обозначать $f(x) \equiv g(x)$, если коэффициенты при одинаковых степенях у многочленов $f(x)$ и $g(x)$ имеют одинаковую четность. Тогда $P(x) \equiv x^k + x^{k-1} + \ldots + 1$ и

$$(x+1)^n - 1 \equiv \left(x^k + x^{k-1} + \ldots + 1\right)Q(x). \qquad (1)$$

Заменив в (1) переменную x на $\dfrac{1}{x}$ и домножив обе части на x^n, получаем

$$(x+1)^n - x^n \equiv \left(x^k + x^{k-1} + \ldots + 1\right)x^{n-k}Q\left(\frac{1}{x}\right). \qquad (2)$$

При этом $x^{n-k}Q\left(\dfrac{1}{x}\right)$ – это некоторый многочлен от x с целыми коэффициентами степени, не превосходящей $n - k$. Вычитая (2) из (1), имеем

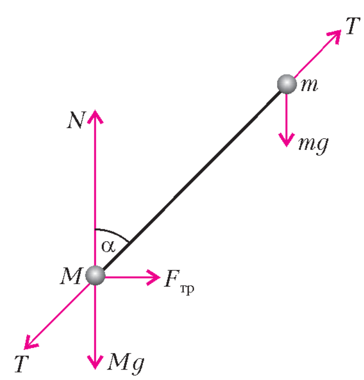
$$x^n - 1 \equiv \left(x^k + x^{k-1} + \ldots + 1\right)R(x)$$

для некоторого многочлена $R(x)$ с целыми коэффициентами. Пусть n не делится на $k + 1$ и $n = q(k+1) + r$, $0 < r < k + 1$. Тогда многочлен $x^n - x^r = x^r\left(x^{q(k+1)} - 1\right)$ делится на $x^{k+1} - 1 = \left(x^k + \ldots + 1\right)(x - 1)$, а значит, $x^r - 1 = \left(x^n - 1\right) - \left(x^n - x^r\right) \equiv \left(x^k + \ldots + 1\right)R_1(x)$ для некоторого многочлена $R_1(x)$ с целыми коэффициентами. Это невозможно, ибо степень многочлена $x^r - 1$ не больше степени многочлена $x^k + \ldots + 1$, и они непохожи.

И.Богданов

Ф2028. *Легкий жесткий стержень длиной L с двумя маленькими массивными шариками на концах – масса нижнего шарика M, верхнего m – поставили на шероховатую горизонтальную поверхность под углом* α *к вертикали и отпустили. При каких значениях коэффициента трения* μ *между стержнем и столом проскальзывание начнется сразу после того, как мы отпустим стержень? Найдите ускорения шариков сразу после отпускания для конкретного случая:* $M = m$, $\alpha = 30°$, $\mu = 0{,}2$.

Рассмотрим «граничное» значение коэффициента трения: уже при чуть меньшем значении проскальзывание начнется сразу после того, как мы отпустим стержень. В этом случае (см. рисунок) $F_{тр} = \mu N$, и ускорение нижнего шарика массой M равно нулю. Тогда для этого шарика можно записать уравнение движения по горизонтали:



$$T\sin\alpha = \mu N$$

и по вертикали:

$$Mg + T\cos\alpha - N = 0.$$

Для верхнего шарика можно сказать следующее: его начальная скорость равна нулю, поэтому нормальная составляющая его ускорения (направленная вдоль стержня) также равна нулю, т.е.

$$mg\cos\alpha - T = 0.$$

Из этих уравнений легко найти «граничное» значение коэффициента трения μ:

$$\mu = \frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha + M/m}.$$

Для частного случая $M = m$ и $\alpha = 30°$ это значение равно $\sqrt{3}/7 \approx 0{,}25 > 0{,}2$ – это значит, что проскальзывание начинается сразу. Тогда ускорение верхнего шарика равно

$$a_1 = g\sin\alpha = \frac{g}{2} \approx 5\text{м/с}^2$$

и направлено перпендикулярно стержню (это – касательная составляющая, нормальная же составляющая равна нулю). Для нижнего шарика ускорение направлено горизонтально и составляет

$$a_2 = \frac{mg\cos\alpha\sin\alpha - \mu\left(Mg + mg\cos^2\alpha\right)}{M} =$$

$$= g\left(\cos 30°\sin 30° - 0{,}2\left(1+\cos^2 30°\right)\right) \approx$$

$$\approx 0{,}084g \approx 0{,}84\ \text{м/с}^2.$$

А.Стержнев

Ф2029. *В глубоком космосе летает сосуд, содержащий кислород при температуре 300 К и давлении 1 атм. Непонятно откуда взявшаяся пуля пробивает в стенке сосуда небольшое отверстие, и газ начинает вытекать из сосуда. Рассмотрим момент, когда масса газа в сосуде уменьшилась на 1%. Оцените среднюю кинетическую энергию вылетевших наружу молекул.*

При такой концентрации частиц длина свободного пробега в сосуде очень мала, частицы двигаются к дырке практически не обгоняя друг друга. Это позволяет выделить в сосуде около дырки некоторую область, в которой находятся те частицы, которые вылетят наружу. Пусть объем этой части ΔV, тогда «окружающий» газ совершит работу $A = p\Delta V$, вытеснив эту часть наружу (мы учли, что наружу вышла небольшая часть газа – давление в сосуде при этом можно считать неизменным). Пренебрежем теплообменом выходящей порции газа с остальными частицами. В таком случае внутренняя энергия этой порции увеличится на $A = p\Delta V = \nu RT$ (где ν – количество газа в выходящей порции) и составит

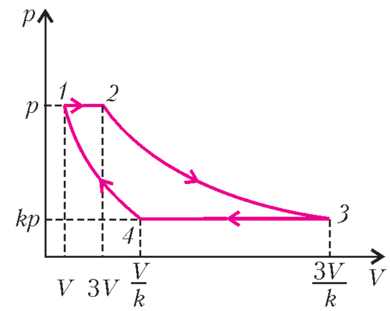
$$U = 1{,}5\nu RT + A = 1{,}5\nu RT + \nu RT = 2{,}5\nu RT.$$

Ясно, что средняя кинетическая энергия вылетевших наружу частиц составит $2{,}5\,kT \approx 10^{-20}$ Дж, т.е. она в $5/3$ раза больше средней кинетической энергии частиц в сосуде. Мы видим, что эта энергия соответствует большей температуре, хотя говорить о температуре вылетевших молекул было бы неправильно.

Р.Сложнов

Ф2030. *Цикл тепловой машины состоит из двух изотермических участков – сжатия при температуре T и расширения при температуре 3T, а также двух изобарических участков. Известно, что на участке изотермического расширения газ, а именно гелий, получает вдвое больше тепла, чем на участке изобарического расширения. Определите термодинамический КПД этого цикла.*

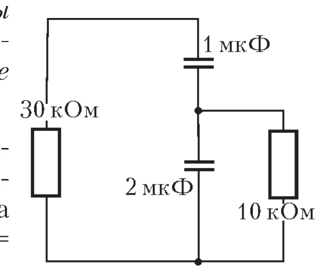
Обозначим (см. рисунок) давление в точке *1* буквой p, объем газа в этом состоянии – буквой V. Ясно, что в точке *2* объем увеличился в три раза. Пусть нижняя изобара соответствует давлению kp, тогда объем в точке *4* равен V/k, а в точке *3* он составит $3V/k$. На изобаре *1–2* газ совершает некоторую работу, такую же по модулю работу он совершает, сжимаясь по изобаре *3–4*, значит, сумма работ на обеих изобарах в сумме равна нулю. Если обозначить количество теплоты, полученное на изобаре *1–2*, буквой Q, то по условию задачи на изотерме *2–3* газ получит количество теплоты $2Q$. Именно такую работу он совершит, расширяясь от состояния *2* до состояния *3*. Теперь найдем работу, совершенную над газом при изотермическом сжатии *3–4*. Для этого заметим, что при равных давлениях на изотермах объемы всюду относятся как 3:1 – ясно, что работа $A_{41} = -A_{23}/3 = -2Q/3$. Окончательно получим, что термодинамический КПД цикла равен



$$\eta = \frac{A_{\text{общ}}}{Q_{\text{получ}}} = \frac{A_{12} + A_{41}}{Q + 2Q} = \frac{2Q - 2Q/3}{3Q} = \frac{4}{9} \approx 44\%.$$

Р.Простов

Ф2031. *Конденсаторы с емкостями 1 мкФ и 2 мкФ соединили последовательно и подключили к источнику напряжения 300 В. После этого источник отключили, а вместо него включили резистор сопротивлением 30 кОм. Одновременно резистор сопротивлением 10 кОм подключили параллельно выводам конденсатора большей емкости. Найдите заряды, протекшие через каждый из резисторов за большое время. Какое количество теплоты выделилось в меньшем из резисторов? Сопротивление проводов мало.*



Сразу после отключения батарейки напряжения конденсаторов составляют 100 В на конденсаторе емкостью $2C$ = 2 мкФ и 200 В на конденсаторе емкостью C = 1 мкФ. Тогда при подключении резисторов (см. рисунок) по ним потекут токи I_1 = 300 В/30 кОм = 10мА и I_2 = 100 В/10 кОм = 10мА. Видно, что конденсатор емкостью $2C$ разряжается током $I_1 + I_2 = 20$ мА, его заряд убывает вдвое быстрее, чем у конденсатора емкостью C, и напряжения на конденсаторах изменяются одинаково.

Заряды, протекшие через резисторы, можно найти, анализируя начальные и конечные заряды конденсато-