

индукционного перехода нам требуется, чтобы $5^{2t-1}a + m$ делилось на 4. Заметим, что 5 в любой степени дает остаток 1 от деления на 4, поэтому если m дает остаток 1 от деления на 4, положим $a = 3$, а если m дает остаток 3 от деления на 4, положим $a = 1$.

Пусть k четно, $k = 2t$. Тогда $Y_{2t} = 2^{2t+1}m$. Получим полосатое число $Y_{2t+1}a\overline{Y_{2t}}$, подобрав четную цифру $a = 2b$. Имеем $Y_{2t+1} = 10^{2t}a + Y_{2t} = 2^{2t+1}(5^{2t}b + m)$. Нам нужно, чтобы $5^{2t}b + m$ не делилось на 2. Для этого положим $b = 1$ (т.е. $a = 2$), если m нечетно, и $b = 2$ (т.е. $a = 4$), если m четно.

Шаг 3. Существует нечетное полосатое число, делящееся на $5^k p$ ($k = 0, 1, 2, \dots$), где $\text{НОД}(p, 10) = 1$.

Пусть X – нечетное полосатое число из четного количества цифр (возможно, с первой цифрой 0), делящееся на 5^k (если $k = 0$, то положим $X = 01$, если k четно, то пусть $X = X_k$ из первого шага, если же k нечетно, то пусть $X = X_{k+1}$ из первого шага). Нужно полосатое число Z , делящееся на $5^k p$, найдем в виде $Z = \overbrace{XX\dots X}^{l+1} = X(1 + 10^k + 10^{2k} + \dots + 10^{lk})$, где k –

количество цифр в числе X . Достаточно доказать утверждение: найдется такое l , что $S_l = 1 + 10^k + 10^{2k} + \dots + 10^{lk} = \frac{10^{(l+1)k} - 1}{10^k - 1}$ делится на p . Для доказательства воспользуем-

ся теоремой Эйлера: если $\text{НОД}(a, b) = 1$, то $a^{\phi(b)} - 1$ делится на b , где $\phi(b)$ – количество натуральных чисел, меньших b и взаимно простых с b . Положим $l + 1 = \phi((10^k - 1)p)$, тогда $10^{(l+1)k} - 1$ делится на $10^{l+1} - 1$, а $10^{l+1} - 1$ в силу теоремы Эйлера делится на $(10^k - 1)p$. (Утверждение можно доказать и без помощи теоремы Эйлера: заметим, что найдутся такие различные $l_1 > l_2$, что S_{l_1} и S_{l_2} дают один и тот же остаток при делении на p . Тогда $S_{l_1} - S_{l_2} = 10^{(l_2+1)k} S_{l_1-l_2}$ делится на p , т.е. $S_{l_1-l_2}$ делится на p .)

Шаг 4. Существует полосатое число, делящееся на $2^k p$ ($k = 0, 1, 2, \dots$), где $\text{НОД}(p, 10) = 1$.

Доказательство аналогично третьему шагу с использованием построенного на втором шаге полосатого числа, делящегося на 2^k .

Шаг 5. Существует полосатое число, делящееся на $2 \cdot 5^k p$, где $\text{НОД}(p, 10) = 1$.

Достаточно приписать 0 в конце нечетного полосатого числа, делящегося на 5^k , полученного на третьем шаге.

Публикацию подготовили

Н.Агаханов, П.Кожевников, Д.Терешин

XXXV Международная физическая олимпиада

С 15 по 23 июля 2004 года в Южной Корее в городе Поханг проходила очередная международная физическая олимпиада школьников. В олимпиаде приняли участие команды из 73 стран, в том числе – команда Франции, которая 25 лет не участвовала в олимпиаде. Япония, ранее не принимавшая участие в олимпиаде, прислала своего наблюдателя; это означает, что Япония имеет намерение в следующем году присоединиться к олимпиадному движению. Общее число участников олимпиады составило 332 школьника.

Как и в предыдущие годы, подготовка сборной команды России проводилась на базе Московского физико-технического института. Кандидаты в сборную были отобраны по результатам двух всероссийских олимпиад, а также одного квалификационного и двух учебно-тренировочных сборов. Во время проведения сборов с ребятами работали преподаватели кафедры общей физики, а также студенты Физтеха – победители международных олимпиад прошлых лет. В общей сложности продолжительность всех сборов составила четыре с половиной недели.

В сборную команду России на XXXV Международную физическую олимпиаду школьников были включены:

Глазырин Семен – гимназия 127, Снежинск Челябинской обл. (учитель физики – Е.М.Елькина),

Речистов Григорий – Многопрофильный лицей, Вологда (учителя – Л.Н.Суханов и А.Г.Дрижук),

Оферкин Игорь – школа 18, Новочебоксарск (учителя – Л.Н.Турковская и В.Д.Кочаков),

Лесничий Яков – лицей 3, Кропоткин Краснодарского кр. (учитель – Н.Г.Черная),

Андреев Иван – экспериментальная школа 82, Черноголовка Московской обл. (учителя – В.Г.Егоров и Г.В.Любимова).

Команду России возглавили профессор МФТИ С.М.Козел и доцент МФТИ В.П.Слободянин. В качестве наблюдателя от России на олимпиаде присутствовал Заслуженный учитель России (ФМЛ 31, Челябинск) И.А.Иоголевич, ученики которого на предыдущих международных олимпиадах завоевали четыре золотые медали.

Участникам олимпиады были предложены три теоретических задания, каждое из которых оценивалось в 10 баллов, и одно экспериментальное задание – 20 баллов. Таким образом, каждый из участников олимпиады мог набрать 50 баллов. Как теоретические, так и экспериментальные задания для большинства участников олимпиады оказались очень трудными. Средний балл за решение первого теоретического задания составил 5,0; второго задания – 4,9; третьего – 3,3; а средний балл за выполнение экспериментального задания был равен 9,1. Аналогичные баллы, полученные нашими ребятами, составили 7,7; 7,8; 8,2 и 11,6 соответственно. Эти результаты показывают, что ребята хорошо справились с заданиями теоретического тура (79%) и значительно хуже – с экспериментом (58%).

По итогам выступления на XXXV Международной физической олимпиаде были отмечены 215 участников. Золотые медали получил 31 ученик, серебряные – 35 и бронзовые – 68. Кроме того, 81 участник был награжден грамотами.

Члены сборной России показали следующие результаты: Глазырин Семен – 38,5 балла, Оферкин Игорь – 36,8 балла, Андреев Иван – 35,6 балла, Речистов Григорий – 34,3 балла (все они получили серебряные медали), Лесничий Яков – 31,0 балл (бронзовая медаль).

Сравнительные неофициальные результаты выступления на олимпиаде 13 лучших команд приведены в таблице:

№ Страна	Золотые медали	Серебряные медали	Бронзовые медали	Грамоты	Сумма баллов
1. Китай	5				222,1
2. Иран	3	1	1		196,7
3. Корея	4		1		193,9
4. Белоруссия	2	2	1		184,6
5. Украина	2	1	2		182,3
6. США	2	2	1		181,0
7. Венгрия	2	2		1	177,0
8. Россия		4	1		176,2
9. Тайвань	1	3	1		174,5
10. Индия	1	3	1		172,0
11. Таиланд	1	1	3		171,4
12. Румыния	1	2	2		170,7
13. Вьетнам		3	2		169,9

Как видно из таблицы, конкуренция между командами лидирующей группы стран была исключительно острой (исключение составила команда Китая, которая в последние годы оказывается вне конкуренции). В этих условиях решающим фактором в борьбе за более высокое место становятся различные «мелочи»: аккуратная запись результатов, указание размерностей измеренных величин, правильно выбранный масштаб графиков, четко выполненный рисунок или схема, грамотно оцененная ошибка измерений и т.д.

Результаты, полученные нашими ребятами, следует признать удовлетворительными, но они могли быть значительно выше. Посредственное выступление на экспериментальном туре в значительной мере отражает общее ослабление экспериментальной подготовки российских школьников. На начальном этапе подготовки многие из кандидатов в сборную команду вообще не имели никаких экспериментальных навыков. Руководители сборной команды многие годы безуспешно пытаются доказать необходимость создания специализированной, хорошо оснащенной современными приборами физической лаборатории для подготовки сборной команды в области эксперимента. Такие лаборатории в рамках целевых программ подготовки национальных сборных команд созданы во многих странах, лидирующих на олимпиаде (Китай, США, Иран, Корея, Тайвань, Румыния, Индия и др.). Наша же команда проходит экспериментальную подготовку на базе физических лабораторий Московского физико-технического института, которые ориентированы на студентов 1 – 3 курсов, а не на выпускников средней школы.

Как и в прежние годы, успешно выступили на олимпиаде команды стран азиатского региона. Это не удивительно. В этих странах разработаны специальные государственные программы работы с одаренными детьми. Успешное выступление команды на олимпиаде школьников по физике правительствами этих стран рассматривается как дело государственного престижа. Созданы все условия для подготовки сборных команд (организационно-технические и финансовые). На период подготовки команды к олимпиаде ребята освобождаются от всех других занятий и экзаменов. К сожалению, подготовка сборной команды России проходит в более жестких условиях – без значительной финансовой поддержки со стороны государства и спонсоров и в более короткие сроки. Достаточно сказать, что у государства не нашлось валюты, чтобы вовремя оплатить поездку команды в Корею, и руководителям сборной пришлось «добывать» деньги у знакомых. Подготовка нашей сборной к участию в международной олимпиаде опирается главным образом на энтузиазм школьных учителей и небольшой группы преподавателей Московского физико-технического института.

Условия теоретических задач (и ответы к ним) приведены ниже. Здесь же кратко расскажем об экспериментальном

задании, в котором учащимся предлагалось исследовать механический «черный ящик», состоящий из длинной трубки, к торцам которой с помощью пружин разной жесткости был прикреплен металлический шар. При горизонтальном положении трубки равновесное положение шара не совпадало с серединой трубки. Конструкция «черного ящика» в общих чертах была описана в задании. Ребятам нужно было выполнить ряд экспериментов для того, чтобы определить параметры ящика: равновесное положение шарика относительно середины трубки, его массу, жесткости пружин. Для выполнения этой работы участникам олимпиады выдали прецизионные измерители скорости, электронные секундомеры с оптическим запуском, электронные весы и некоторые другие механические устройства и приспособления. Успех выполнения задания зависел от аккуратного выполнения длинной серии нескольких экспериментов, обработки экспериментальных данных, аккуратного построения графиков в правильно выбранных координатах и получения из этих графиков нужных параметров. Другими словами – требовалась значительная «черновая» работа, при которой творческий элемент отходил на второй план. Именно в этой части задания наши ребята проявили поспешность и даже небрежность (особенно при построении графиков).

В один из свободных дней олимпиады был проведен неофициальный креативный конкурс, в котором приняла участие 84 команды по 5 человек в каждой, из них 19 – корейские команды, сформированные из школьников города Поханг. Участникам конкурса предлагалось, используя только выданные материалы (воздушные шарики, картон, бумагу, теннисные мячи, скотч), построить «летательный аппарат, который был бы как можно тяжелее и как можно дольше продержался бы в воздухе». Наши ребята проявили чудеса изобретательности. Построенный ими аппарат оказался лучшим, и российская команда заняла первое место, а все ее участники получили по цифровой фотокамере.

ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ ТУР

Задача 1. Сопротивление «Пинг-понг»

Конденсатор состоит из двух параллельных пластин в форме кругов радиусом R , расположенных на расстоянии d ($d \ll R$) друг от друга (рис.1,а). Верхняя пластина присоединена к источнику постоянного напряжения с потенциалом U , а нижняя пластина заземлена. Затем тонкий маленький диск массой m , радиусом r ($r \ll R, d$) и пренебрежимо малой толщиной δ ($\delta \ll r$) помещают в центр нижней пластины (рис.1,б).

Пластины и диск, изготовленные из хорошо проводящего материала, находятся в вакууме. Всеми электростатическими краевыми эффектами и индуцированными зарядами, а также индуктивностью всей цепи и связанными с ней эффектами можно пренебречь. Диэлектрическая постоянная ϵ_0 считается известной.

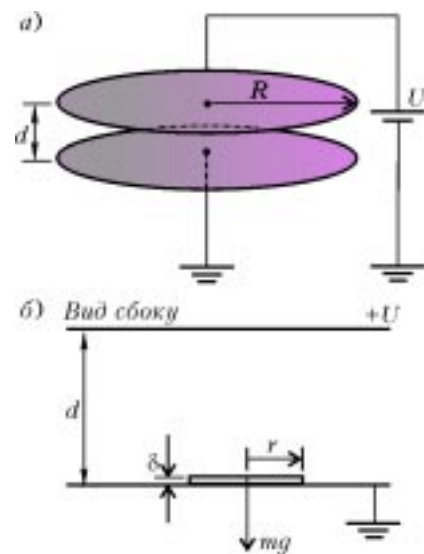


Рис. 1

а) Рассчитайте электростатическую силу F взаимодействия между пластинами, находящимися на расстоянии d , до помещения диска между ними. (1,2 балла)

б) Когда диск помещен на нижнюю пластину, он приобретает заряд q , пропорциональный напряжению U на конденсаторе: $q = \chi U$. Выразите χ через r , d и ϵ_0 . (0,8 б.)

с) Параллельные пластины конденсатора расположены перпендикулярно гравитационному полю \vec{g} . Чтобы диск в первый раз поднялся вверх из исходного положения, необходимо приложить напряжение, превышающее пороговое значение U^* . Выразите U^* через m , g , d и χ . (0,5 б.)

д) При $U > U^*$ диск движется вверх-вниз между пластинами. (Предполагается, что диск движется строго вертикально, без качания.) Столкновения между диском и каждой пластиной неупругие с коэффициентом восстановления $\eta = v_2/v_1$, где v_1 и v_2 – скорости диска до и после столкновения соответственно. Пластины закреплены неподвижно. После большого количества столкновений скорость диска сразу после очередного столкновения с нижней пластиной стремится к значению, которое назовем «скоростью в установившемся режиме» v_y . Величина v_y зависит от U по формуле

$$v_y = \sqrt{\alpha U^2 + \beta}.$$

Выразите коэффициенты α и β через m , g , χ , d и η . Предполагается, что диск касается пластины одновременно всей поверхностью, так что полная перезарядка происходит мгновенно при каждом столкновении. (2,3 б.)

е) В установившемся режиме средний по времени ток I через обкладки конденсатора при условии $qU \gg mgd$ может быть представлен в виде $I = \gamma U^2$. Выразите коэффициент γ через m , χ , d и η . (2,2 б.)

ф) При очень медленном уменьшении приложенного напряжения U существует критическое значение напряжения U_k , ниже которого ток скачком прекращает течь. Выразите U_k и соответствующий ему ток I_k через m , g , χ , d и η . Сравнив U_k с пороговым значением U^* , определенным в пункте с), приближенно изобразите зависимости I от U при увеличении и при уменьшении U в пределах от 0 до $3U^*$. (3 б.)

Задача 2. Поднимающийся шар

Резиновый шар, наполненный гелием, поднимается в небо. Давление и температура атмосферного воздуха уменьшаются с высотой. В дальнейшем будем предполагать, что сферическая форма шара сохраняется, несмотря на прикрепленный к нему груз, и пренебрежем объемом самой оболочки и груза. Будем также предполагать, что температура гелия внутри шара совпадает с температурой окружающего воздуха, и считать гелий и воздух идеальными газами. Универсальная газовая постоянная $R = 8,31$ Дж/(моль · К), молярные массы гелия и воздуха $M_r = 4,00 \cdot 10^{-3}$ кг/моль и $M_b = 28,9 \cdot 10^{-3}$ кг/моль соответственно, ускорение свободного падения $g = 9,8$ м/с².

Часть А

а) Предположим, что окружающий воздух имеет давление p и температуру T . Давление внутри шара выше наружного из-за упругих свойств оболочки. Пусть шар содержит n молей гелия и давление внутри него равно $p + \Delta p$. Определите выталкивающую силу F , действующую на шар, как функцию от p и Δp . (1,5 б.)

б) В Корее в один из летних дней было обнаружено, что температура T воздуха на высоте z над уровнем моря задается соотношением

$$T(z) = T_0(1 - z/z_0)$$

в диапазоне $0 < z < 15$ км, где $z_0 = 49$ км и $T_0 = 303$ К.

Давление и плотность воздуха на уровне моря равны $p_0 = 1$ атм = $1,01 \cdot 10^5$ Па и $\rho_0 = 1,16$ кг/м³ соответственно. В указанном диапазоне высот давление изменяется с высотой по закону

$$p(z) = p_0(1 - z/z_0)^\eta.$$

Выразите постоянную η через величины z_0, ρ_0, p_0, g и определите ее значение с точностью до двух значащих цифр. Считайте ускорение свободного падения g постоянным, не зависящим от высоты. (2 б.)

Часть В

Когда резиновый шар (с радиусом r_0 в нерастянутом состоянии) раздувается до сферы радиусом r ($\geq r_0$), его оболочка из-за растяжения приобретает упругую энергию. В упрощенной теории упругая энергия U надутой сферической оболочки при постоянной температуре T описывается выражением

$$U = 4\pi r_0^2 kRT \left(2\lambda^2 + \frac{1}{\lambda^4} - 3 \right),$$

где $\lambda = r/r_0$ (≥ 1) – коэффициент растяжения (по радиусу), а k – некоторая константа, выраженная в моль/м².

с) Выразите Δp через параметры, входящие в выражение для U , и изобразите графически зависимость Δp от λ . (2 б.)

д) Постоянная величина k может быть определена через количество молей гелия, необходимых для надувания шара. При $T_0 = 303$ К и $p_0 = 1,0$ атм нерастянутый шар (при $r = r_0$) содержит $n_0 = 12,5$ моль гелия. Для раздувания шара до значения $\lambda = 1,5$ при неизменных температуре T_0 и внешнем давлении p_0 в нем должно находиться в общей сложности $n = 3,6n_0 = 45$ моль гелия. Выразите параметр a оболочки, определяемый как $a = k/k_0$, где $k_0 = \frac{r_0 p_0}{4RT_0}$, через n , n_0 и λ . Вычислите его значение с точностью до двух значащих цифр. (1,5 б.)

Часть С

Шар накачали на уровне моря, как в пункте д) (коэффициент растяжения по радиусу $\lambda = 1,5$, число молей гелия внутри $n = 3,6n_0 = 45$ моль), при температуре $T_0 = 303$ К и давлении $p_0 = 1,0$ атм = $1,01 \cdot 10^5$ Па. Общая масса шара, включая газ, оболочку и груз, равна $M = 1,12$ кг. Такой шар начинает подниматься от уровня моря.

е) Пусть этот шар поднялся до такой высоты z^* , на которой выталкивающая сила уравновешивается суммарной силой тяжести. Определите z^* и коэффициент растяжения λ^* на этой высоте. Рассчитайте их числовые значения с точностью до двух значащих цифр. Утечкой газа и боковым смещением из-за ветра пренебрегите. (3 б.)

Задача 3. Атомный зондирующий микроскоп

Атомный зондирующий микроскоп (АЗМ) является мощным исследовательским инструментом в области нанофизики. Движение датчика АЗМ регистрируется с помощью фотодетектора, принимающего отраженный луч лазера, как показано на рисунке 2. Датчик закреплен на упругой горизонтальной пластинке и может колебаться только в вертикальном направлении. Его смещение z , зависящее от времени t , описывается уравнением

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} + b \frac{dz}{dt} + kz = F,$$

где m – масса датчика, $k = m\omega_0^2$ – коэффициент упругости пластинки, b – малый коэффициент затухания, удовлетворяющий условию $\omega_0 \gg (b/m) > 0$, F – внешняя сила, действующая на датчик со стороны пьезоэлемента.

