Чтобы конденсатор не разряжался через катушку, его подключают через диод.

С.Фонарев

Ф1967. К звуковому генератору подключают последовательно соединенные конденсатор емкостью $C = 1$ мкФ и катушку индуктивностью $L = 1$ Гн. Частоту генератора меняют, измеряя при этом напряжение на катушке вольтметром, имеющим сопротивление $R = 20$ кОм. На какой частоте показания вольтметра будут наибольшими? Найдите максимальное напряжение, которое покажет вольтметр. Напряжение генератора все время равно $U = 1$ В (эффективное значение). А что будет, если вольтметр переключить и измерять напряжение на конденсаторе? Катушку и конденсатор считать идеальными, сопротивлением проводов и внутренним сопротивлением генератора пренебречь.

З.Рафаилов

Решения задач М1931–М1935, Ф1943–Ф1952

М1931. *Каждая целочисленная точка плоскости окрашена в один из трех цветов, причем все три цвета присутствуют. Докажите, что найдется прямоугольный треугольник с вершинами трех разных цветов.*

Назовем целочисленную точку узлом. Если на каждой вертикальной прямой все узлы одного цвета, то выберем любой узел – пусть он цвета 1. Проведем через него две перпендикулярные прямые, идущие под углом 45° к вертикали, и выберем на этих прямых точки цветов 2 и 3 (это возможно, постольку существуют вертикали этих цветов). Полученный треугольник будет искомым.

Аналогично, если все горизонтали одного цвета.

Пусть есть вертикаль v, на которой присутствуют ровно два цвета, скажем 1 и 2. Тогда выберем любой узел C цвета 3, узел A на v, находящийся с C на одной горизонтали, пусть узел A цвета 1, и узел B цвета 2 на v.

Если же есть вертикаль v, на которой встречаются все три цвета, то выберем горизонталь h, на которой не все точки одного цвета. Пусть точка A их пересечения имеет цвет 1, тогда выберем на h точку B цвета, отличного от 1, скажем второго, а на v – точку C третьего цвета.

С.Берлов

М1932. *Последовательность неотрицательных рациональных чисел $a_1, a_2, a_3, \ldots$ удовлетворяет соотношению $a_m + a_n = a_{mn}$ при любых натуральных m, n. Докажите, что не все ее члены различны.*

Предположим противное. Полагая $m = n = 1$, получаем $a_1 + a_1 = a_1$, т.е. $a_1 = 0$. Поэтому все остальные члены ненулевые. Пусть $a_2 = p/q$, $a_3 = r/s$. Заметим, что из условия $a_{m^k} = ka_m$; поэтому $a_{2^{qr}} = qr \cdot p/q = pr = ps \cdot r/s = a_{3^{ps}}$, но $2^{qr} \neq 3^{ps}$. Противоречие.

А.Протопопов

М1933. *В стране несколько городов, некоторые пары городов соединены двусторонними беспосадочными авиалиниями, принадлежащими k авиакомпаниям. Известно, что любые две линии одной авиакомпании имеют общий конец. Докажите, что все города можно разбить на $k + 2$ группы так, что никакие два города из одной группы не соединены авиалинией.*

Индукция по k. Если $k = 0$, утверждение тривиально: авиалиний нет.

Рассмотрим граф, вершины которого соответствуют городам, а ребра – авиалиниям. Пусть $E_1, E_2, \ldots, E_k$ – группы ребер, соответствующие авиалиниям первой, второй, ..., k-й авиакомпаний. Нетрудно понять, что для любого $i \in \{1, \ldots, k\}$ группа E_i – либо треугольник, либо «еж» – несколько ребер с одним концом. Если какая-то группа E_i – еж с центром в вершине A, то удалим A и все выходящие из нее ребра. В оставшемся графе ребра принадлежат $k - 1$ авиакомпании, его вершины мы разобьем на $k + 1$ группу так, чтобы вершины из одной группы не были соединены ребром, а вершина A составит $(k + 2)$-ю группу.

Остается рассмотреть случай, когда все группы $E_1, \ldots, E_k$ – треугольники. Тогда всего в графе $3k$ ребер. Разобьем вершины графа на минимальное возможное количество групп так, что никакие две вершины одной группы не смежны (т.е. не соединены ребром). Пусть это группы $B_1, \ldots, B_n$, причем $n \geq k + 3$. Отметим, что для любых двух групп B_i и B_j существует ребро между вершиной из B_i и вершиной из B_j, иначе можно объединить эти две группы в одну. Таким образом, всего в графе хотя бы $\frac{n(n-1)}{2}$ ребер. Отметим, что $\frac{n(n-1)}{2} \geq \frac{(k+3)(k+2)}{2} > 3k$ – противоречие, завершающее решение задачи.

В.Дольников

М1934. *Даны четыре последовательных натуральных члена арифметической прогрессии с ненулевой разностью. Эти четыре числа взаимно просты в совокупности. Не все они квадраты, однако произведение их – квадрат. Докажите, что это произведение делится на 2520^2.*

Пусть a, $a + d$, $a + 2d$, $a + 3d$ – прогрессия задачи. Из условия следует, что $(a, d) = 1$. Значит, если $b = (a + kd, a + ld) > 1$, где $0 \leq k < l \leq 3$, то либо $k = 0$, $b = l = 3$, либо $k = 0$, $b = l = 2$, либо $k = 1$, $l = 3$, $b = l - k = 2$. Поэтому достаточно рассмотреть прогрессии следующих трех видов.

1) $3x^2, y^2, z^2, 3t^2$, где, поскольку $(a, d) = 1$, y и z не делятся на 3. Имеем $3x^2 + z^2 = 2y^2$, откуда $1 \equiv 2 \pmod 3$.

2) $2x^2, y^2, 2z^2, t^2$, где y и t нечетны. Имеем $y^2 + t^2 = 4z^2$, откуда $2 \equiv 0 \pmod 4$.

3) $6x^2, y^2, 2z^2, 3t^2$. Имеем $3x^2 + z^2 = y^2$, $y^2 + 3t^2 = 4z^2$, откуда

$$x^2 + t^2 = z^2.$$

Пусть (x, t, z) – тройка натуральных чисел, удовлетворяющая последнему равенству. Докажем, что $xtz \vdots 60$.

Без ограничения общности будем считать, что $(x,t,z)=1$, x четно, t и z нечетны. Так как $t^2 \equiv 1 \pmod 8$, $z^2 \equiv 1 \pmod 8$, то $x^2 \vdots 8$, откуда $x \vdots 4$. Далее, если xt не делится на 3, то $x^2 \equiv 1 \pmod 3$, $t^2 \equiv 1 \pmod 3$. Отсюда $z^2 \equiv 2 \pmod 3$, что невозможно. Осталось доказать, что $xtz \vdots 5$. Если xt не делится на 5, то имеются 4 возможности: $x^2 \equiv \pm 1 \pmod 5$, $t^2 \equiv \pm 1 \pmod 5$. Отсюда, так как $z^2 \not\equiv \pm 2 \pmod 5$, получаем $z^2 \vdots 5$.

Теперь докажем делимость произведения на 49. Из равенства $y^2 + 3t^2 = 4z^2$ следует, что в случае, когда yzt не делится на 7, остатки от деления на 7 распределяются так:

y^2	$3t^2$	$2z^2$
1	3	2
2	6	4
4	5	1

Отсюда $6x^2 = 2y^2 - 2z^2$ делится на 7, а значит, и на 49.

Замечание. Справедлива следующая теорема.

Теорема. *Пусть* $a, b, c, d, e \in \boldsymbol{N}$, $abcd = e^2$, a,b,c,d *– арифметическая прогрессия. Тогда* $a = b = c = d$.

Эта теорема обобщает теорему Ферма, согласно которой не существует четырех различных квадратов натуральных чисел, составляющих арифметическую прогрессию.

Доказательство нашей теоремы довольно сложно. Оно основано на представлении каждой арифметической прогрессии, удовлетворяющей ее условиям, члены которой взаимно просты в совокупности, в одном из следующих трех видов:

$$x^2, y^2, z^2, t^2,$$

$$6x^2, y^2, 2z^2, 3t^2,$$

$$3x^2, 2y^2, z^2, 6t^2,$$

где $x, y, z, t \in \boldsymbol{N}$.

Из существования каждой из таких прогрессий с различными членами можно вывести существование натуральных чисел u, v, w таких, что $u \neq v$,

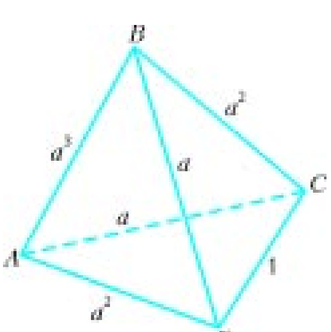
$$u^4 - u^2v^2 + v^4 = w^2$$

(подумайте, как в каждом из трех случаев получить эти числа). Однако полученное равенство при $u, v, w \in \boldsymbol{N}$, $u \neq v$ выполняться не может. Для доказательства этого надо воспользоваться «методом спуска»; прочтите о нем в статье В.Сендерова и А.Спивака «Уравнения Пелля» в «Кванте» №3 за 2002 год или в решении задачи М1883 в «Кванте» №2 за 2004 год и подумайте, как применить его к нашей задаче.

В.Сендеров

М1935. *Все грани тетраэдра – подобные треугольники. Верно ли, что они равны?*

Неверно, что видно из следующего контрпримера. Тетраэдр $ABCD$ имеет такие размеры: $AB = a^3$, $AD = BC = a^2$, $AC = BD = a$, $CD = 1$ и при этом $a = 1{,}1$ (см. рисунок). Нетрудно видеть, что все четыре его грани – подобные треугольники. Однако грань ABC, очевидно, не равна грани BCD.



В.Произволов

Ф1943. *По горизонтальному столу скользит плоский лист фанеры, на котором нарисована система координат xy. В данный момент скорость точки А с координатами (1; 3) направлена вдоль оси x и равна 1 м/с. Скорость точки Б с координатами (2; 1) составляет в тот же момент угол 45° с осью x. Где находятся точки листа, скорости которых по величине не превосходят 1 см/с?*

Будем считать лист фанеры жестким. В этом случае вектор скорости точки *Б* должен быть направлен, например, так, как показано на рисунке 1. Найдем положение точки, скорость которой в данный момент оказалась нулевой, т.е. мгновенный центр вращения – МЦВ. Ясно, что эта точка лежит на пересечении перпендикуляров к векторам скоростей $\vec{v}_A$ и $\vec{v}_B$ – получается точка МЦВ-1 (1;0). Угловая скорость вращения листа в данный момент равна

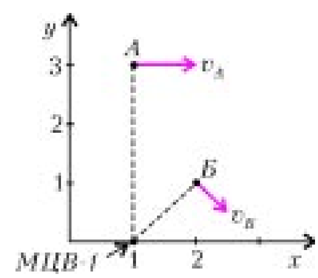


Рис. 1

$$\omega_1 = \frac{v_A}{h_1} = \frac{1\ \text{м/с}}{3\ \text{м}} = \frac{1}{3}\ \text{с}^{-1}.$$

Ясно, что мгновенные скорости малы у точек вблизи МЦВ-1: они лежат внутри круга с центром (1;0) и радиусом

$$r_1 = \frac{v}{\omega_1} = \frac{1\ \text{см/с}}{\frac{1}{3}\ \text{с}^{-1}} = 3\ \text{см}.$$

«Самые дальние» точки, скорости которых не превосходят 1 см/с, лежат на самой окружности.

Аналогично рассмотрим второй случай (рис.2; строго говоря, его можно и не обсуждать, поскольку здесь угол вектора $\vec{v}_Б$ с осью x составляет не 45°, а 135° – ну, да ладно!). В этом случае МЦВ-2 находится в точке с координатами (1;2), и угловая скорость равна

$$\omega_2 = \frac{v_A}{h_2} = \frac{1\ \text{м/с}}{1\ \text{м}} = 1\ \text{с}^{-1}.$$

Тогда радиус нужного нам круга с центром в точке МЦВ-2 будет

$$r_2 = \frac{v}{\omega_2} = \frac{1\ \text{см/с}}{1\ \text{с}^{-1}} = 1\ \text{см}.$$

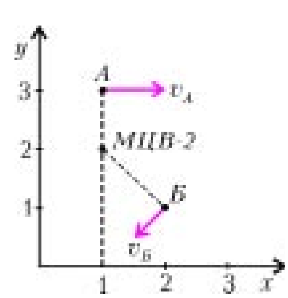


Рис. 2

А.Центров

Ф1944. *В системе на рисунке 1 все блоки одинаковы, их массы практически сосредоточены в тонких осях. Найдите ускорения блоков после того, как мы перережем нить в точке А. Нити считать нерастяжимы-*

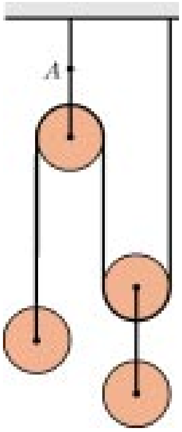


Рис. 1

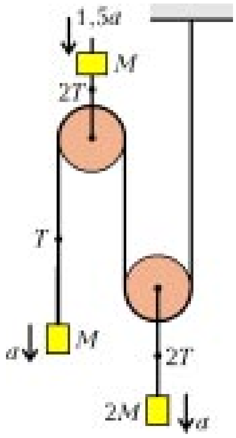


Рис. 2

ми и очень легкими. Свободные куски нитей вертикальны.

Перерисуем чертеж, выделив массы осей и заменив их обычными грузами (рис.2; если бы массы не были сосредоточены в осях блоков, задача была бы намного сложнее!). Данные в условии подобраны так, что ускорения нижних грузов получаются одинаковыми: легкий груз массой M движется под действием сил T и Mg, тяжелый – под действием сил $2T$ и $2Mg$, а его масса $2M$. Запишем уравнения для верхнего груза – его ускорение равно $1{,}5a$ – и легкого нижнего:

$$Mg + 2T = M \cdot 1{,}5a ,$$

$$Mg - T = Ma .$$

Отсюда находим

$$a = \frac{6}{7} g .$$

Ускорение верхнего груза равно

$$1{,}5a = \frac{9}{7} g > g ,$$

значит, нити действительно натянуты (иначе все грузы имели бы ускорение g).

А.Зильберман

Ф1945. *На горизонтальном гладком столе покоится клин массой M с углом α при основании. На него наезжает со скоростью v_0 маленькое тело массой m и начинает подниматься вверх по клину (удара при этом не происходит – у основания клина сделан плавный «въезд»). При какой высоте клина H маленькое тело поднимется по нему на самый верх? С какой скоростью будет двигаться клин после того, как маленькое тело его покинет?*

Это довольно простая задача – тело и клин едут вместе в тот момент, когда максимальная высота достигнута. Скорость этого движения по горизонтали равна

$$u = \frac{mv_0}{M + m} .$$

Теперь запишем баланс энергий:

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{(M+m)u^2}{2} + mgH .$$

Отсюда сразу находим необходимую высоту клина:

$$H = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{(M+m)}{2mg}\left(\frac{mv_0}{M+m}\right)^2 = \frac{v_0^2}{2g}\frac{1}{1+m/M} .$$

Тут есть только одна маленькая тонкость – на коротком плавном «въезде» на клин (и на обратном пути!) скорость тела (и клина) заметно меняется; там между телом и клином действуют большие силы, необходимые для быстрого «разворота» вектора скорости тела. Скорость клина легко найти, если тело не перескочит через него, а съедет назад. Обозначим скорости после этого u_1 и u_2 (рис.1) и запишем законы сохранения импульса и энергии:

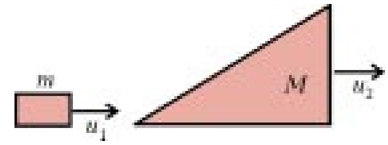


Рис. 1

$$mv_0 = mu_1 + Mu_2 ,$$

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{mu_1^2}{2} + \frac{Mu_2^2}{2} .$$

Получились обычные уравнения – такие же, как при расчете абсолютно упругого удара двух тел. Отсюда находим

$$u_2 = \frac{2v_0}{1 + M/m} .$$

А вот когда высота клина недостаточна или тело слишком быстро наезжает – придется потруднее. В этом случае удобно представить движение тела в виде

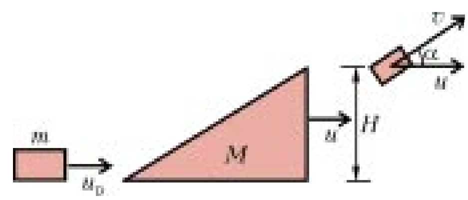


Рис. 2

суммы двух движений – вместе с клином плюс относительно клина (рис.2):

$$mv_0 = Mu + m(u + v\cos\alpha) ,$$

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{Mu^2}{2} + \frac{m\left((u + v\cos\alpha)^2 + (v\sin\alpha)^2\right)}{2} + mgH .$$

Из этих уравнений и найдется скорость клина u.

А.Повторов

Ф1946. *В сосуде под поршнем находится моль гелия. Медленно нагреваем газ, при этом его объем увеличивается, однако частота ударов частиц о неподвижное дно сосуда остается неизменной. Найдите теплоемкость газа в таком процессе.*

При увеличении температуры T газа его частицы двигаются быстрее, и при той же концентрации газа n частота ударов $\nu_{уд} \sim v_{тепл} \sim \sqrt{T}$. Но $\nu_{уд} \sim n$. Значит,

$$n\sqrt{T} = \text{const} , \text{ или } \frac{N}{V}\sqrt{T} = \text{const} .$$

Отсюда получаем $T \sim V^2$. Но для 1 моля газа $pV = RT$. Следовательно, $p \sim V$.

На малом участке этого процесса получаемое газом количество теплоты равно

$$Q = \frac{3}{2}R\Delta T + p\Delta T = \frac{3}{2}R\Delta T + \frac{RT}{V}\Delta V .$$

Для зависимости $T \sim V^2$ получим $\frac{\Delta T}{T} = 2\frac{\Delta V}{V}$. Тогда

$$Q = \frac{3}{2}R\Delta T + R\Delta T\frac{\Delta V}{V}\frac{T}{\Delta T} = \left(\frac{3}{2}R + \frac{R}{2}\right)\Delta T = 2R\Delta T .$$

Отсюда теплоемкость газа равна

$$C = \frac{Q}{\Delta T} = 2R \approx 16{,}6\ \text{Дж/(моль}\cdot\text{К)} .$$

З.Рафаилов

Ф1947. *В легком тонкостенном сосуде мы нагреваем при помощи кипятильника 1 литр воды. Температура достигает 60 °С и никак дальше не растет. Нам надоело, и мы выключаем нагреватель. За первые 20 секунд вода остывает на 2 градуса. На упаковке кипятильника было написано: «500 ватт, сделано в Китае». Сколько ватт содержит «китайский ватт»?*

При предельной температуре мощность потерь равна мощности кипятильника. Если считать изменение температуры $\Delta T = 2$ градуса небольшим (чтобы не изменилась заметно мощность потерь), то эту мощность можно посчитать:

$$P = \frac{cm\Delta T}{\tau} = \frac{4200\ \text{Дж/(кг}\cdot\text{К)}\cdot 1\ \text{кг}\cdot 2\ \text{К}}{20\ \text{с}} = 420\ \text{В2} .$$

Итак, один «китайский ватт» содержит $\frac{420}{500} = 0{,}84$ ватта.

О.Простов

Ф1948. *Три тонкие пластины в виде кругов диаметром D расположены параллельно друг другу, расстояние между соседними пластинами d ($d \ll D$). Средняя пластина равномерно заряжена по поверхности зарядом 2Q, крайние – также равномерно, но зарядами противоположного знака по −Q каждая. Найдите потенциалы центров пластин. Других тел рядом нет.*

Рассмотрим вначале простую систему из двух таких пластин, заряженных равномерно по поверхности зарядами Q и $-Q$ (рис.1). Возьмем точку A – она находится в самом центре системы. Ясно, что ее потенциал $\varphi_A = 0$ (потенциалы от всех зарядов системы компенсируются точно именно для этой точки). Поле на оси системы можно считать однородным (при $d \ll D$), его напряженность равна $E = \frac{Q}{\varepsilon_0 S}$, и потенциал пластины с зарядом Q равен теперь

$$\varphi_A + E\frac{d}{2} = 0 + \frac{Qd}{2\varepsilon_0 S} .$$

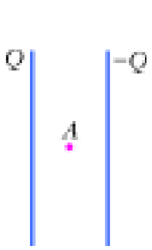


Рис. 1

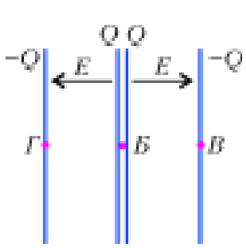


Рис. 2

Система пластин, описанная в условии задачи, представляет «сумму» двух рассмотренных нами систем из двух пластин каждая – потенциал центра средней пластины равен сумме потенциалов каждого из двух полей. Тогда (рис.2)

$$\varphi_Б = 2\frac{Qd}{2\varepsilon_0 S} = \frac{Qd}{\varepsilon_0 S} .$$

Поля в промежутках между пластинами такие же, как в описанном выше случае. Поэтому

$$\varphi_В = \varphi_Г = \varphi_Б - Ed = 0 .$$

Итак, потенциалы центров крайних пластин равны нулю, потенциал центра средней пластины равен

$$\varphi_Б = \frac{Qd}{\varepsilon_0 S} = \frac{4Qd}{\varepsilon_0 \pi D^2} .$$

Видно, что в описанной системе поля на ее оси снаружи получаются совсем малыми – поля пластин очень хорошо друг друга компенсируют.

А.Повторов

Ф1949. *Мостик из четырех резисторов подключен к батарейке. К диагонали мостика подключили последовательно соединенные другую батарейку – ее напряжение известно и составляет 12 В – и амперметр. Показания прибора при этом составили 5 мА. После того, как мы поменяли местами выводы батарейки на 12 В, ток через амперметр поменял направление и стал равен 35 мА. Потом поменяли местами батарейки – ток амперметра упал до нуля. Что покажет прибор, если одну из батареек теперь включить «наоборот» (поменять местами выводы)?*

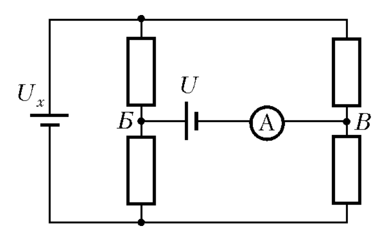


Рис. 1

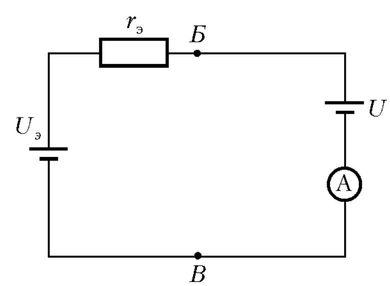


Рис. 2

Представим цепь из батарейки напряжением U_x и резисторов мостика (рис.1) в виде «эквивалентного источника» с напряжением $U_э$ и внутренним сопротивлением $r_э$ (рис.2). Ясно, что $U_э = kU_x$. Понятно, что при изменении ЭДС батареек (например – изменение полярности, замена одной батарейки на другую) внутреннее сопротивление $r_э$ не меняется. Тогда

$$\frac{|U_э + U|}{r_э} = I_1 ,\quad \frac{|U_э - U|}{r_э} = I_2 ,$$

где $U = 12$ В и $U_э < 12$ В (ток менял направление). Получаем

$$\frac{U + U_э}{U - U_э} = \frac{35\ \text{мА}}{5\ \text{мА}} = 7 ,\quad U_э = 9\ \text{В} ,\quad kU_x = 9\ \text{В} .$$

После смены батареек местами ток стал ненулевым, поэтому $kU = U_x$, и можно найти k и U_x:

$$k \cdot 12 = U_x ,\quad kU_x = 9 ,$$

$$k^2 = \frac{3}{4} ,\quad k = \frac{\sqrt{3}}{2} ,\quad U_x = kU = 6\sqrt{3}\ \text{В} .$$

Теперь найдем ток после «переполюсовки»:

$$I = \frac{kU + U_э}{r_э} = \frac{kU + U_x}{U - kU_x} I_2 = 20\sqrt{3}\ \text{мА} \approx 34{,}6\ \text{мА} .$$

Р.Александров

Ф1950. *Из куска тонкого провода, имеющего сопротивление $r = 100$ Ом, сделали квадратный контур и охватили им длинный соленоид, по которому пропускают изменяющийся со временем по линейному закону ток. Ток в контуре составил при этом $I = 5$ мА. Какое напряжение покажет вольтметр, включенный вместо одной из сторон квадрата? Что будет показывать этот вольтметр в другом случае – если сторону квадратного контура не убирать, а просто подключить вольтметр короткими проводами к концам этой стороны? Сопротивление вольтметра $R = 1000$ Ом.*

Будем считать, что токи, текущие по проводникам, сами не создают заметных магнитных полей (большое сопротивление контура), и пренебрежем дополнительным магнитным потоком от этих токов – мы пренебрегаем при этом самоиндукцией. Найдем ЭДС индукции:

$$\frac{\mathscr{E}}{r} = I\ ,\quad \mathscr{E} = rI = 0{,}5\ \text{В} .$$

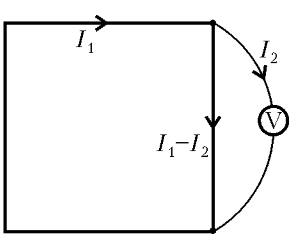
Когда мы включили вместо «четвертушки» контура вольтметр, ток в цепи стал равным

$$I_1 = \frac{\mathscr{E}}{\frac{3}{4}r + R} = I\frac{r}{\frac{3}{4}r + R} = 0{,}465\ \text{мА} .$$

Вольтметр при этом покажет

$$U_1 = I_1 R = 0{,}465\ \text{В} .$$

Рассмотрим последний случай (см. рисунок): через вольтметр течет ток I_2, ток во внешней цепи I_1. Тогда



$$\mathscr{E} = \frac{3}{4}rI_1 + \frac{r}{4}(I_1 - I_2)\ ,$$

$$\mathscr{E} = \frac{3}{4}rI_1 + RI_2 .$$

Собственно, нам нужно найти RI_2. Перепишем уравнения в виде

$$\mathscr{E} = rI_1 - \frac{r}{4}I_2\ ,\quad \mathscr{E} = \frac{3}{4}rI_1 + RI_2$$

и исключим из них I_1:

$$\mathscr{E} = 4RI_2 + \frac{3}{4}rI_2 = RI_2\left(4 + \frac{3}{4}\frac{r}{R}\right),$$

откуда

$$U_2 = RI_2 = 0{,}1227\ \text{В} .$$

Можно посчитать ответ и проще – заменить параллельно соединенные сопротивления $\frac{r}{4}$ и R одним резистором и найти токи. Ответ получится тот же.

А.Старов

Ф1951. *Одинаковые конденсаторы емкостью C каждый соединяют последовательно, а крайние выводы получившейся цепочки подключают к зажимам последовательно соединенных батареек напряжением U слева и 2U справа (рис.1). Немного подождав, между точками А и Б включают катушку индуктивностью L. Найдите максимальное значение силы тока через катушку. Найдите также максимальные заряды конденсаторов. Сопротивление проводов считать малым (но не нулевым!). Батарейки, конденсаторы и катушку считать идеальными.*

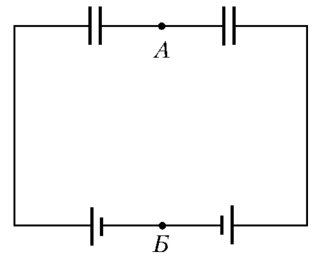


Рис. 1

При подключении конденсаторов к батарейкам произойдет быстрый процесс – в результате заряды конденсаторов установятся до $q_0 = 0{,}5CU$, в цепи выделится некоторое количество теплоты (в сопротивлении проводов, его можно посчитать, но для решения этой задачи это не нужно). После подключения катушки заряды конденсаторов будут меняться, но сумма их напряжений останется неизменной – значит, дополнительные заряды будут одинаковы, мы их обозначим Q (рис.2). Токи в цепи теперь ограниченные (не такие большие, как при начальном этапе), и можно пренебречь тепловыми потерями за первый период колебаний (все интересное произойдет за этот период!). Работа батареек равна

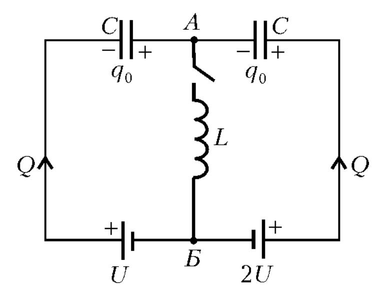


Рис. 2

$$A_1 + A_2 = QU + Q\cdot 2U = 3QU .$$

Начальная энергия была

$$W_н = 2\frac{q_0^2}{2C} .$$

Обозначим ток катушки I, тогда, в соответствии с законом сохранения энергии, можно записать

$$W_н + A_1 + A_2 = \frac{(-0{,}5CU + Q)^2}{2C} + \frac{(0{,}5CU + Q)^2}{2C} + \frac{LI^2}{2} .$$

Теперь найдем максимальный ток катушки. При максимальном токе I_m ЭДС индукции обратится в ноль, напряжения конденсаторов составят U и $2U$, тогда $Q_1 = 1{,}5CU$, и энергетическое уравнение запишется так:

$$0{,}25CU^2 + 1{,}5CU^2 + 3CU^2 = \frac{CU^2}{2} + 2CU^2 + \frac{LI_m^2}{2} .$$

Отсюда

$$I_m^2 = \frac{9}{2}\frac{C}{L}U^2\ ,\ \text{и}\ \ I_m = 3U\sqrt{\frac{C}{2L}} .$$

Максимальные заряды (и минимальные тоже) получаются при $I = 0$. Тогда запишем

$$0{,}25CU^2 + Q_2U + Q_2\cdot 2U = \frac{(-0{,}5CU + Q_2)^2}{2C} + \frac{(0{,}5CU + Q_2)^2}{2C} .$$

После простых преобразований получим

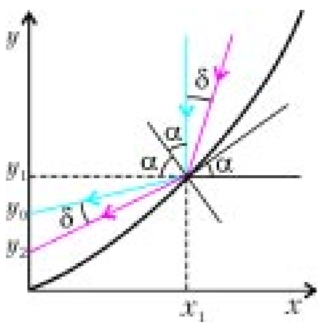
$$Q_2^2 = 3CUQ_2\text{, откуда } Q_2 = 0 \text{ или } Q_2 = 3CU .$$

Первый корень дает $Q_{\min}$, второй – $Q_{\max}$. Следовательно, максимальные заряды конденсаторов будут равны $2{,}5CU$ и $3{,}5CU$.

Примечание. Ответ $Q_2 = 3CU$ можно было угадать: ясно, что в цепи происходят гармонические колебания, максимальный ток соответствует заряду $1{,}5CU$ – до «максимума» должен пройти еще такой же заряд.

З.Рафаилов

Ф1952. *В фокусе большого параболического отражателя находится точечный источник радиоволн частотой f = 1000 МГц, диаметр параболического отражателя D = 6 м. Из-за дифракции система излучает расходящийся пучок волн. На сколько нужно отодвинуть источник вдоль оси параболоида, чтобы расходимость пучка увеличилась примерно в три раза?*



Пусть парабола (параболоид в разрезе) описывается выражением $y = Ax^2$ (см. рисунок). Рассмотрим луч, падающий в точку x_1. Наклон параболы в этой точке (он нам нужен для определения угла падения луча) определится производной:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2Ax_1 = \operatorname{tg}\alpha .$$

Найдем теперь положение точки y_0:

$$y_0 = y_1 - x_1 \operatorname{tg}(2\alpha - 90°) = Ax_1^2 - x_1 \operatorname{ctg} 2\alpha =$$

$$= Ax_1^2 - x_1 \frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{2\operatorname{tg}\alpha} = Ax_1^2 - x_1\frac{1-(2Ax_1)^2}{4Ax_1} = \frac{1}{4A} = F .$$

Видно, что все лучи, идущие параллельно главной оси параболоида, сходятся в точку F (фокус), и ясно, – где он находится. Вообще-то, нам нужно излучать радиоволны, а не принимать, но обратимость лучей позволяет нам выбрать любой из этих случаев.

Итак, пусть луч падает в ту же точку параболоида, но под малым углом δ к его оси. Найдем положение точки y_2, точнее – длину отрезка y_0y_2:

$$\Delta = y_0 - y_2 = x_1 \operatorname{tg}(2\alpha - 90°) - x_1 \operatorname{tg}(2\alpha - 90° + \delta) =$$

$$= x_1\left(\operatorname{ctg}2\alpha - \operatorname{ctg}(2\alpha+\delta)\right) \approx \frac{x_1\delta}{\sin^2 2\alpha}$$

(для нахождения малого приращения функции мы использовали производную). Видно, что при падении луча под данным углом δ в разные точки параболоида мы получаем различные значения смещения Δ. Нам нужно найти такое место падения луча, чтобы сделать Δ наименьшим для данного угла δ. Это и будет смещение источника радиоволн относительно фокуса параболоида, обеспечивающего данный угол расхождения пучка. Выразим величину Δ через угол α:

$$2Ax_1 = \operatorname{tg}\alpha, \quad x_1 = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{2A},$$

$$\Delta = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{2A}\delta\frac{1}{4\sin^2\alpha\cos^2\alpha} = \frac{\delta}{8A\sin\alpha\cos^3\alpha} .$$

Найдем максимальное значение знаменателя:

$$\left(\sin\alpha\cos^3\alpha\right)'_\alpha = \cos^4\alpha - 3\cos^2\alpha\sin^2\alpha =$$

$$= \cos^2\alpha\left(\cos^2\alpha - 3\sin^2\alpha\right) = 0 ,$$

откуда, ясно, что $\operatorname{tg}\alpha \approx \frac{1}{\sqrt{3}}$. Таким образом, самое большое расхождение пучка получится при отражении от точки, где $\alpha = 30°$:

$$\Delta = \frac{\delta}{8A\cdot 0{,}5\cdot\left(\sqrt{3}/2\right)^3} = \delta\frac{1}{4A}\frac{8}{3\sqrt{3}} = \delta F\frac{8}{3\sqrt{3}} .$$

Определим теперь угол δ: дифракционное расхождение пучка, исходящего из фокуса параболоида, составляет $\delta_0 \approx \frac{\lambda}{D} = \frac{0{,}3}{6} = \frac{1}{20}$ радиана (для круглого отверстия в экране угол немного другой: $\delta^* \approx \frac{1{,}22\lambda}{D}$, но нам достаточно и грубой оценки). Тогда $\delta = 2\delta_0 \approx 0{,}1$, и смещение $\Delta = 0{,}1F\frac{8}{3\sqrt{3}} \approx 0{,}15F$.

Итак, особенно точной установки излучателя в фокус антенны не потребуется.

З.Волнов

НАМ ПИШУТ

В «Кванте» №4 за 1999 год была опубликована следующая задача.

М1692. *Числа a, b и c – длины сторон треугольника. Докажите неравенство*

$$\frac{a^2+2bc}{b^2+c^2} + \frac{b^2+2ac}{c^2+a^2} + \frac{c^2+2ab}{a^2+b^2} > 3 .$$

Возникает естественный вопрос о верхней границе. Использовав теорему косинусов и тождество

$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 1 + 4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}$$

при $\alpha+\beta+\gamma = \pi$, получаем, что

$$\frac{a^2+2bc}{b^2+c^2} + \frac{b^2+2ac}{c^2+a^2} + \frac{c^2+2ab}{a^2+b^2} =$$

$$= \frac{2bc}{b^2+c^2}(1-\cos\alpha) + \frac{2ac}{c^2+a^2}(1-\cos\beta) +$$

$$+ \frac{2ab}{a^2+b^2}(1-\cos\gamma) + 3 \le 5 - 4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} < 5 .$$

Отметим, что обе оценки – нижняя и верхняя – точны: для доказательства достаточно рассмотреть семейство треугольников с длинами сторон 1, 1, x.

Г.Карнаух