Неравенства с модулем

В.ГОЛУБЕВ

Основной метод (а зачастую и единственный) решения неравенств, предлагаемый авторами большинства учебников и пособий для поступающих, – метод интервалов. Однако есть неравенства (о них прекрасно знают авторы задач конкурсных экзаменов), которые невозможно решить методом интервалов. Например, попробуйте решить этим методом неравенство

$$\left|x^3 - x^2 + 4\right| + x^3 - x^2 - 2x - 2 \le 0 . \qquad (1)$$

Очевидно, что решение уравнения $x^3 - x^2 + 4 = 0$ недоступно школьнику.

Естественно выяснить два вопроса:

1) как иначе решать неравенства с модулем;

2) как порождать подобные неравенства?

Предварительно укажем вариант ответа на второй вопрос, чтобы узнать удивительные возможности, предоставляемые понятием «абсолютная величина числа» (или модуль числа).

Системы и совокупности неравенств

Пусть дана *система* одноименных неравенств

$$\begin{cases} f_1(x) < 0, \\ f_2(x) < 0, \\ \dots\dots\dots\dots \\ f_n(x) < 0. \end{cases} \qquad (2)$$

Если x_0 – решение этой системы, то все значения функций $f_1(x_0), f_2(x_0), \ldots, f_n(x_0)$ отрицательны, и наоборот.

Согласитесь, что если некоторое значение $f_k(x_0)$ есть наибольшее из чисел $f_1(x_0), f_2(x_0), \ldots, f_n(x_0)$ и оно отрицательно, то все остальные также отрицательны, и наоборот. Поэтому непонятно, почему, когда вместо решения системы (2) предлагают решить одно неравенство

$$\max\{f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)\} < 0 , \qquad (3)$$

многие попадают впросак, не осознавая возможности перехода от неравенства (3) к равносильной ему системе (2). Или другая формулировка: найдите все значения x, при которых наибольшее из значений функций $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ отрицательно.

Упражнение 1. Докажите следующие правила «минимакса»:

1) $\begin{cases} f_1 < 0, \\ f_2 < 0, \\ \dots\dots\dots \\ f_n < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \max\{f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)\} < 0$;

2) $\begin{cases} f_1 \le 0, \\ f_2 \le 0, \\ \dots\dots\dots \\ f_n \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \max\{f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)\} \le 0$;

3) $\begin{cases} f_1 \ge 0, \\ f_2 \ge 0, \\ \dots\dots\dots \\ f_n \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \min\{f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)\} \ge 0$;

4) $\begin{cases} f_1 > 0, \\ f_2 > 0, \\ \dots\dots\dots \\ f_n > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \min\{f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)\} > 0$.

Аналогично — для *совокупностей* одноименных неравенств.

Упражнение 2. Докажите, что

1) $\left[\begin{array}{l} f_1(x) < 0 \\ f_2(x) < 0 \\ \dots\dots\dots\dots \\ f_n(x) < 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \min\{f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)\} < 0$;

2) $\left[\begin{array}{l} f_1(x) \le 0 \\ f_2(x) \le 0 \\ \dots\dots\dots\dots \\ f_n(x) \le 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \min\{f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)\} \le 0$;

3) $\left[\begin{array}{l} f_1(x) \ge 0, \\ f_2(x) \ge 0 \\ \dots\dots\dots\dots \\ f_n(x) \ge 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \max\{f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)\} \ge 0$;

4) $\left[\begin{array}{l} f_1(x) > 0 \\ f_2(x) > 0 \\ \dots\dots\dots\dots \\ f_n(x) > 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \max\{f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)\} > 0$.

Правила «минимакса» объявляют равносильные переходы от произвольной системы или совокупности одноименных неравенств к одному неравенству того же вида. Осталось сказать, что система (как и совокупность) *любых*, не обязательно одноименных, уравнений и неравенств сводима к *любой* системе (или совокупности соответственно) одноименных неравенств, так как истинны следующие утверждения.

У1: $f < 0 \Leftrightarrow \dfrac{f}{|f|} \le 0 \Leftrightarrow \dfrac{f}{|f|} + 1 = 0 \Leftrightarrow -\dfrac{f}{|f|} \ge 0 \Leftrightarrow -f > 0$;

У2: $f \le 0 \Leftrightarrow -\sqrt{-f} - 1 < 0 \Leftrightarrow |f| + f = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -f \ge 0 \Leftrightarrow \sqrt{-f} + 1 > 0$;

У3: $f = 0 \Leftrightarrow -\sqrt{-|f|} - 1 < 0 \Leftrightarrow |f| \le 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -|f| \ge 0 \Leftrightarrow \sqrt{-|f|} + 1 > 0$;

У4: $f \ge 0 \Leftrightarrow -\sqrt{f} - 1 < 0 \Leftrightarrow -f \le 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |f| - f = 0 \Leftrightarrow \sqrt{f} + 1 > 0$;

У5: $f > 0 \Leftrightarrow -f < 0 \Leftrightarrow -\dfrac{f}{|f|} \le 0 \Leftrightarrow \dfrac{f}{|f|} - 1 = 0 \Leftrightarrow \dfrac{f}{|f|} \ge 0$.

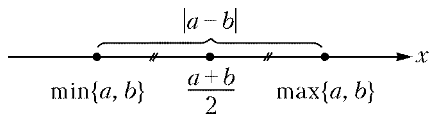
Упражнение 3. Докажите утверждения У1–У5, в которых показаны варианты перевода одного сравнения в любое (!) другое.

Напрашивается вывод: *любую* систему или совокупность можно представить в виде *одного* сравнения максимума, или, если хотите, минимума, с любой константой ($\max f(x) = -\min(-f(x))$).

А при чем тут модуль?

Ответ: любой максимум (минимум) можно выразить через модуль.

Пусть a и b – два произвольных числа. Очевидно, что одно из них есть наименьшее, а другое – наибольшее (если, например, $a \le b$, то $\min(a,b) = a$ и $\max(a,b) = b$). Им соответствуют две точки на числовой оси:



Известно, что расстояние между точками a и b есть $|a-b|$, середина между ними всегда соответствует числу $\frac{a+b}{2}$. Поэтому

$$\min\{a,b\} = \frac{1}{2}(a+b) - \frac{1}{2}|a-b|, \tag{4}$$

$$\max\{a,b\} = \frac{1}{2}(a+b) + \frac{1}{2}|a-b|. \tag{5}$$

Упражнение 4. Докажите, что

$$|a| = \max\{-a,a\} \text{ и } |a| = -\min\{-a,a\}.$$

Мы уже почти готовы неравенство (3) переписать в модулях. Для этого осталось заметить, что поиск максимума (минимума) среди n величин можно свести к последовательности шагов, на каждом из которых определяется максимум (минимум) среди двух.

Пусть

$$M_k = \max\{f_1, f_2, \ldots, f_k\}.$$

Тогда

$$M_{k+1} = \max\{M_k, f_{k+1}\}. \tag{6.1}$$

Аналогично для минимума:

$$m_{k+1} = \min\{m_k, f_{k+1}\}, \tag{6.2}$$

где $m_k = \min\{f_1, f_2, \ldots, f_k\}$.

Упражнение 5. Докажите, что

1) $\max\{f_1,f_2,f_3\} = \max\{f_3, \max\{f_1,f_2\}\}$;

2) $\max\{f_1,f_2,f_3\} = \frac{1}{4}\left(2f_3 + f_1 + f_2 + |f_1 - f_2| + \left|2f_3 - f_1 - f_2 - |f_1 - f_2|\right|\right)$;

3) $2f_3 + f_1 + f_2 + |f_1 - f_2| + \left|2f_3 - f_1 - f_2 - |f_1 - f_2|\right| \vee 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2f_1 + f_2 + f_3 + |f_2 - f_3| + \left|2f_1 - f_2 - f_3 - |f_2 - f_3|\right| \vee 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2f_2 + f_3 + f_1 + |f_3 - f_1| + \left|2f_2 - f_3 - f_1 - |f_3 - f_1|\right| \vee 0$.

Теперь легко объяснить, как мы получили неравенство (1). Взяли два общедоступных неравенства $f_1 \le 0$ и $f_2 \le 0$, где $f_1 = x^3 - x^2 - x + 1$ и $f_2 = -x - 3$. Тогда, согласно (4) и упражнению 1,

$$\begin{cases} f_1 \le 0, \\ f_2 \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow f_1 + f_2 + |f_1 - f_2| \le 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left|x^3 - x^2 + 4\right| + x^3 - x^2 - 2x - 2 \le 0,$$

что и требовалось.

Дальнейшее «нагромождение» модулей можно осуществлять по такой схеме. Пусть $f \le 0$ и $g \le 0$ есть *любые* неравенства с модулями, которые мы умеем решать. Тогда для их системы или совокупности получаем, что

$$\begin{cases} f \le 0, \\ g \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow f + g + |f - g| \le 0, \tag{7}$$

$$\left[\begin{array}{l} f \le 0 \\ g \le 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow f + g - |f - g| \le 0. \tag{8}$$

Неравенства справа и есть искомые.

Например, пусть

$$f = \left|x^3 - x^2 + 4\right| + x^3 - x^2 - 2x - 2 \text{ и } g = x^2 - x - 6.$$

Тогда

$$\begin{cases} f \le 0, \\ g \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left|\left|x^3 - x^2 + 4\right| + x^3 - 2x^2 - x + 4\right| + $$

$$+ \left|x^3 - x^2 + 4\right| + x^3 - 3x - 8 \le 0. \tag{9}$$

Упражнение 6. Напишите, согласно (7) и (8), неравенства, равносильные следующим системам и совокупностям, используя в некоторых ситуациях утверждения У1–У5:

1) $\begin{cases} |5x-1| < 3, \\ |3-7x| < 1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} |5x-1| > 3, \\ |3-7x| > 1; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} |5x-1| < 3, \\ |3-7x| > 1; \end{cases}$

4) $\begin{cases} |5x-1| > 3, \\ |3-7x| < 1; \end{cases}$ 5) $\left[\begin{array}{l} \left|x^2+4x+3\right| > x+3 \\ \left|x^2-6x+8\right| > 4-x; \end{array}\right.$

6) $\left[\begin{array}{l} \left|x^2+4x+3\right| < x+3 \\ \left|x^2-6x+8\right| < 4-x; \end{array}\right.$ 7) $\left[\begin{array}{l} \left|x^2+4x+3\right| < x+3 \\ \left|x^2-6x+8\right| > 4-x; \end{array}\right.$

8) $\left[\begin{array}{l} \left|x^2+4x+3\right| > x+3 \\ \left|x^2-6x+8\right| < 4-x. \end{array}\right.$

Перейдем теперь к ответу на первый ранее сформулированный вопрос.

«Меньше», «меньше или равно» – система, «больше», «больше или равно» – совокупность

Чтобы заинтересовать читателя, рассмотрим без каких-либо обоснований такое решение неравенства (9):

$$\left|\left|x^3 - x^2 + 4\right| + x^3 - 2x^2 - x + 4\right| +$$

$$+ \left|x^3 - x^2 + 4\right| + x^3 - 3x - 8 \le 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(\left|x^3 - x^2 + 4\right| + x^3 - 2x^2 - x + 4\right) + \\ \qquad + \left|x^3 - x^2 + 4\right| + x^3 - 3x - 8 \le 0, \\ -\left(\left|x^3 - x^2 + 4\right| + x^3 - 2x^2 - x + 4\right) + \\ \qquad + \left|x^3 - x^2 + 4\right| + x^3 - 3x - 8 \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left|x^3 - x^2 + 4\right| + x^3 - x^2 - 2x - 2 \le 0, \\ x^2 - x - 6 \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(x^3 - x^2 + 4\right) + x^3 - x^2 - 2x - 2 \le 0, \\ -\left(x^3 - x^2 + 4\right) + x^3 - x^2 - 2x - 2 \le 0, \\ -2 \le x \le 3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - x^2 - x + 1 \le 0, \\ -x - 3 \le 0, \\ -2 \le x \le 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le -1 \text{ ,л, } x = 1, \\ x \ge -3, \\ -2 \le x \le 3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2 \le x \le -1 \text{ или } x = 1.$$

Ответ: $-2 \le x \le -1$, $x = 1$.

Всем известно, что

$$|f| < g \Leftrightarrow -g < f < g,$$

$$|f| \le g \Leftrightarrow -g \le f \le g\,,$$

$$|f| \ge g \Leftrightarrow f \le -g \text{ или } f \ge g\,,$$

$$|f| > g \Leftrightarrow f < -g \text{ или } f > g.$$

Однако, переписав данные утверждения в виде

$$|f| < g \Leftrightarrow \begin{cases} f < g, \\ -f < g, \end{cases}$$

$$|f| \le g \Leftrightarrow \begin{cases} f \le g, \\ -f \le g, \end{cases}$$

$$|f| \ge g \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f \ge g \\ -f \ge g, \end{array}\right.$$

$$|f| > g \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f > g \\ -f > g, \end{array}\right.$$

мы обнаруживаем, что при решении *любого* основного неравенства с модулем можно перейти к двум неравенствам, *просто заменив* модуль на плюс-минус подмодульное выражение, а затем перейти в зависимости от знака неравенства либо к системе, либо к совокупности. В этом весь фокус!

Для удобства восприятия сведем полученные сведения в таблицу равносильных преобразований основных неравенств с модулем:

(1)	(2)	(3)	(4)
$\|f\| < g \Updownarrow \begin{cases} f < g, \\ -f < g \end{cases}$	$\|f\| \le g \Updownarrow \begin{cases} f \le g, \\ -f \le g \end{cases}$	$\|f\| \ge g \Updownarrow \left[\begin{array}{l} f \ge g \\ -f \ge g \end{array}\right.$	$\|f\| > g \Updownarrow \left[\begin{array}{l} f > g \\ -f > g \end{array}\right.$

Для всех сравнений $|f|$ заменяется на f или $-f$, в сравнениях типа «меньше», «меньше или равно» берется система, а в сравнениях типа «больше», «больше или равно» – совокупность.

Упражнение 7. Решите методом интервалов и методом равносильных преобразований (согласно таблице) следующие неравенства:

1) $|2x^3 - x^2 + 3| \le 2x^3 - 3$;
2) $|2x^3 - x^2 + 3| \ge 3 - 2x^3$;
3) $|3x^4 - 12x^3 - 17x^2 - 2x| \le 3x^4 - 3$;
4) $|x^4 + 2x^3 - 24x^2 - 18x + 135| > x^4 - 81$;
5) $||x^2 - 4x + 3| - 3| \ge x + 2$;
6) $||x^2 + 6x + 5| - 3| \le -x - 2$.

Так как $|m|^2 = m^2$, то для сравнений $|f| \vee |g|$ очевидно наиболее эффективной схемой является такая:

$$|f| \vee |g| \Leftrightarrow f^2 \vee g^2 \Leftrightarrow (f-g)(f+g) \vee 0\,.$$

Упражнение 8. Решите неравенства

1) $|x^2 + 5x + 6| > |3x + 6|$;
2) $|x^2 - 7x + 6| \le |4x - 4|$;
3) $|3x^2 + x + 26| > |x + 2|$;
4) $|5x^3 + x^2 + 4| \le |x^2 + 3x + 2|$;
5) $|x^3 - 3x + 1| \le |x^3 + x^2 - 1|$.

Таблица равносильных преобразований позволяет сформулировать два очень эффективных правила.

Правило «меньше, меньше или равно – система» ($<, \le \to \{$): *если относительно данного модуля неравенство является неравенством вида «меньше», «меньше или равно», то замените модуль на плюс-минус подмодульное выражение и полученные неравенства рассматривайте одновременно, т.е. в системе.*

Правило «больше, больше или равно – совокупность» ($>, \ge \to [$): *если относительно данного модуля неравенство является неравенством вида «больше», «больше или равно», то замените модуль на плюс-минус подмодульное выражение и полученные неравенства рассматривайте в совокупности.*

Посмотрите, как лихо решается, например, такая задача.

Задача 1. *Для всех значений параметра p решите неравенство*

$$3|x-p| + 5|x-3p| + 4x + 6p + 12 \le 0\,. \qquad (*)$$

Решение.

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} 3(x-p) + 5(x-3p) + 4x + 6p + 12 \le 0, & (10.1) \\ 3(x-p) - 5(x-3p) + 4x + 6p + 12 \le 0, & (10.2) \\ -3(x-p) + 5(x-3p) + 4x + 6p + 12 \le 0, & (10.3) \\ -3(x-p) - 5(x-3p) + 4x + 6p + 12 \le 0 & (10.4) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 12x - 12p + 12 \le 0, \\ 2x + 18p + 12 \le 0, \\ 6x - 6p + 12 \le 0, \\ -4x + 24p + 12 \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le p - 1, \\ x \le -9p - 6, \\ x \le p - 2, \\ 6p + 3 \le x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le p - 2, \\ x \le -9p - 6, \\ 6p + 3 \le x \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} p \le -1, \\ 6p + 3 \le x \le p - 2 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} p > -1, \\ x \in \varnothing, \end{cases}$$

поскольку

$$\begin{cases} 6p + 3 \le p - 2, \\ 6p + 3 \le -9 - 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p \le -1, \\ p \le -0,6 \end{cases} \Leftrightarrow p \le -1 \Rightarrow p - 2 < -9 - 6\,.$$

Ответ: если $p \le -1$, то $6p + 3 \le x \le p - 2$; если $p > -1$, то решений нет.

Неравенство ($*$) относительно любого из двух модулей имеет вид $|f| \le g$. Поэтому при любом раскрытии модуля (четыре комбинации знаков подмодульных выражений: (+ +), (+ –), (– +) и (– –)) все получаемые неравенства согласно первому правилу надо рассматривать одновременно, то есть в системе. Этим и объясняется первый равносильный переход, остальное очевидно.

Аналогично решается неравенство следующей задачи.

Задача 2. *Решите неравенство*

$$|3x + 2| + |2x - 3| < 11\,.$$

Решение. Относительно любого модуля данное неравенство имеет вид $|f| < g$. Поэтому перебрав все четыре комбинации знаков двух подмодульных выражений, имеем

$$|3x + 2| + |2x - 3| < 11 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (3x+2) + (2x-3) < 11, \\ (3x+2) - (2x-3) < 11, \\ -(3x+2) + (2x-3) < 11, \\ -(3x+2) - (2x-3) < 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 2,4, \\ x < 6, \\ x > -16, \\ x > -2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \max\{-16, -2\} < x < \max\left\{6, \frac{12}{5}\right\} \Leftrightarrow -2 < x < 2,4\,.$$

Ответ: (–2; 2,4).

Естественно, читатель заметит, что эту задачу можно решить и методом интервалов, и исходя из геометрического смысла модуля и т.д. Но наша цель – указать на *простоту* переходов к системам или совокупностям, играя знаками подмодульных выражений. Тем более, что в задачах с параметрами эта техника обеспечивает явные преимущества (см. задачу 1).

Еще один пример.

Задача 3. *Для любого значения параметра p решите неравенство*

$$|2x+21p|-2\cdot|2x-21p|<x-21p\ .\ (**)$$

Решение. Относительно первого модуля неравенство имеет вид $|f|<g$, а относительно второго $|f|>g$. Поэтому, раскрывая первый модуль, перейдем к системе, а второй – к совокупности. Начинать можно с любого.

Первый вариант освобождения от модулей:

$$|2x+21p|-2\cdot|2x-21p|<x-21p\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}|2x+21p|-2(2x-21p)<x-21p\\ |2x+21p|+2(2x-21p)<x-21p\end{array}\right.\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}(2x+21p)-2(2x-21p)<x-21p,\\ -(2x+21p)-2(2x-21p)<x-21p\end{cases}\\ \begin{cases}(2x+21p)+2(2x-21p)<x-21p,\\ -(2x+21p)+2(2x-21p)<x-21p\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x>28p,\\ x>6p\end{cases}\text{ или }\begin{cases}x<0,\\ x<42p.\end{cases}$$

Иными словами,

$$(**)\Leftrightarrow\begin{cases}x>28p,\\ x>6p\end{cases}\text{ или }\begin{cases}x<0,\\ x<42p.\end{cases}$$

Второй вариант освобождения от модулей:

$$|2x+21p|-2\cdot|2x-21p|<x-21p\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(2x+21p)-2|2x-21p|<x-21p,\\ -(2x+21p)-2|2x-21p|<x-21p,\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}(2x+21p)-2(2x-21p)<x-21p\\ (2x+21p)+2(2x-21p)<x-21p,\end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l}-(2x+21p)-2(2x-21p)<x-21p\\ -(2x+21p)+2(2x-21p)<x-21p,\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x>28p\\ x<0,\end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l}x>6p\\ x<42p.\end{array}\right.\end{cases}$$

Иными словами,

$$(**)\Leftrightarrow\begin{cases}x<0\ ,\text{л},\ \ x>28\ p\\ x<42p\ ,\text{л},\ \ x>6\ p\end{cases}$$

Дальнейшие действия определяются знаком параметра p, так как только от него зависит расположение на числовой оси точек $x=0$, $x=6p$, $x=28p$, $x=42p$:

если $p<0$, то $42p<28p<6p<0$;

если $p=0$, то $0=6p=28p=42p$;

если $p>0$, то $0<6p<28p<42p$.

Поэтому быстро устанавливаем, что

если $p<0$, то $x\in(-\infty;42p)\cup(6p;\infty)$;

если $p=0$, то $x\in(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$;

если $p>0$, то $x\in(-\infty;0)\cup(28p;+\infty)$.

Это и есть ответ неравенства $(**)$.

Удобно или нет?

Все приведенные решения вызывают естественный вопрос, насколько громоздкой будет работа при наличии в неравенстве трех и более модулей по отношению к другим способам решений.

Вернемся к задаче 1 и решим ее стандартным методом – методом интервалов.

Определяем значения x, при которых обращаются в ноль подмодульные выражения неравенства $(*)$: $x_1=p$ и $x_2=3p$. Далее мы обязаны разобраться со взаимным расположением x_1 и x_2 на числовой оси. Вынуждены рассматривать три случая:

1) $x_1<x_2\Leftrightarrow p>0$,

2) $x_1=x_2\Leftrightarrow p=0$,

3) $x_2<x_1\Leftrightarrow p<0$.

Для случая 1 числовая ось переменной x разбивается на три промежутка знакопостоянства подмодульных выражений $x-p$ и $x-3p$:

$$x\le x_1=p\ ,\ \ x_1<x\le x_2=3p\ \text{ и }\ x>x_2\,.$$

Поэтому исходное неравенство $(*)$ при $p>0$ равносильно следующей совокупности трех систем:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\le p,\\ -3(x-p)-5(x-3p)+4x+6p+12\le 0\end{cases}\\ \begin{cases}p<x\le 3p,\\ 3(x-p)-5(x-3p)+4x+6p+12\le 0\end{cases}\\ \begin{cases}x>3p,\\ 3(x-p)+5(x-3p)+4x+6p+12\le 0.\end{cases}\end{array}\right.$$

Очевидно, вы узнали неравенства (10.4), (10.2), (10.1), которые приходится решать теперь при $p>0$ на соответствующих промежутках.

Полученная совокупность после упрощений принимает вид ($p>0$!)

$$\left[\begin{array}{l}6p+3\le x\le p\\ \begin{cases}p<x\le 3p,\\ x\le -9p-6\end{cases}\\ 3p<x\le p-1.\end{array}\right.\qquad(11)$$

Упражнение 9. Для всех положительных значений параметра p найдите множество решений совокупности (11).

Для случая 2 ($x_1=x_2=p=0$) мы получаем неравенство $8|x|+4x+12\le 0$, которое обязаны решить отдельно на промежутках $x\le 0$ и $x>0$ (проделайте самостоятельно). Заметим, что при этом мы будем рассматривать частные случаи неравенств (10.4) и (10.1) соответственно.

Аналогично случаю 1, для случая 3 ($p<0$ и $x_2<x_1$) мы получаем такую совокупность трех систем:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\le x_2=3p,\\ -3(x-p)-5(x-3p)+4x+6p+12\le 0\end{cases}\\ \begin{cases}3p<x\le x_1=p,\\ -3(x-p)+5(x-3p)+4x+6p+12\le 0\end{cases}\\ \begin{cases}x>x_1=p,\\ 3(x-p)+5(x-3p)+4x+6p+12\le 0.\end{cases}\end{array}\right.$$

Эта совокупность после упрощений принимает вид

$$\left[\begin{array}{l}6p+3\le x\le 3p\\ \begin{cases}3p<x\le p,\\ x\le p-2\end{cases}\\ p<x\le p-1.\end{array}\right.\qquad(12)$$

Совокупность (12) мы должны решать для всех $p < 0$. Наверняка большинство читателей испытают при этом серьезные трудности.

Упражнение 10. Для всех отрицательных значений параметра p найдите множество решений совокупности (12).

Объединяя ответы всех трех случаев, получим ответ задачи.

Легко видеть, что решение задачи 1 методом интервалов по эффективности существенно уступает первоначальному решению.

Рискнем утверждать, что в неравенствах с параметром первоначальное решение всегда более эффективно, чем любое другое.

Разберем теперь ситуацию, когда подмодульные выражения в неравенствах не содержат параметр.

Задача 4. *Решите неравенство*

$$\left|x + 6 - \left|3x + 6\right|\right| + \left|x + 2\right| - x - 4 \le 0 . \qquad (13)$$

Решение. Если не увидеть, что $|3x + 6| = 3|x + 2|$ и относительно $|3x + 6|$ неравенство не является основным (т.е. не $|f| \vee g$), то формальное освобождение от модулей по предлагаемой технологии приведет к системе, в которую войдут две совокупности по два неравенства в каждой и еще четыре неравенства.

Однако, реагируя на взаимосвязь $|3x + 6|$ и $|x + 2|$, можно быстро получить ответ:

$$(13) \Leftrightarrow \begin{cases} \left(x + 6 - 3|x + 2|\right) + |x + 2| - x - 4 \le 0, \\ -\left(x + 6 - 3|x + 2|\right) + |x + 2| - x - 4 \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |x + 2| \ge 1, \\ 2|x + 2| - x - 5 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le -3 \ \ ,\text{л}, \quad x \ge 4, \\ 2(x + 2) - x - 5 \le 0, \\ -2(x + 2) - x - 5 \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \le -3 \text{ или } x \ge -1, \\ x \le 1, \\ x \ge -3 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -3 \\ -1 \le x \le 1. \end{array}\right.$$

Ответ: $x = -3$ или $-1 \le x \le 1$.

Приведенное решение неравенства (13) явно быстрее дает ответ, чем решение методом интервалов. В этом вы можете убедиться самостоятельно.

Упражнение 11 (не простое!). В чем заключается ошибочность преобразования

$$\left|f_1 + 2|f_2|\right| + |f_2| + f_3 \le 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (f_1 + 2f_2) + f_2 + f_3 \le 0, \\ (f_1 - 2f_2) - f_2 + f_3 \le 0, \\ -(f_1 + 2f_2) + f_2 + f_3 \le 0, \\ -(f_1 - 2f_2) - f_2 + f_3 \le 0 \end{cases}$$

(мы соблазнились объявлять один и тот же знак f_2 в обоих присутствующих $|f_2|$)?

Упражнение 11 предупреждает читателя, что «играть знаками» подмодульных выражений можно только(!) для модулей, относительно которых данное неравенство является *основным* (см. таблицу).

Примеры

В заключение приведем решения еще нескольких задач из вступительных экзаменов.

Задача 5. *При каких значениях параметра a неравенство*

$$x^2 - |x - a| - |x - 1| + 3 \ge 0 \qquad (14)$$

выполняется при всех значениях x?

Решение. Относительно обоих модулей неравенство (14) имеет вид $|f| \le g$. Поэтому

$$(14) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - (x - a) - (x - 1) + 3 \ge 0, \\ x^2 - (x - a) + (x - 1) + 3 \ge 0, \\ x^2 + (x - a) - (x - 1) + 3 \ge 0, \\ x^2 + (x - a) + (x - 1) + 3 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x + a + 4 \ge 0, \\ x^2 + a + 2 \ge 0, \\ x^2 - a + 4 \ge 0, \\ x^2 + 2x - a + 2 \ge 0. \end{cases}$$

Выполнение для всех x неравенства (14) равносильно выполнению для всех x всех неравенств последней системы. А это равносильно тому, что дискриминанты *всех* четырех квадратных трехчленов неположительны:

$$\begin{cases} D_1 \le 0, \\ D_2 \le 0, \\ D_3 \le 0, \\ D_4 \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^2 - 4(a + 4) \le 0, \\ -4(a + 2) \le 0, \\ -4(-a + 4) \le 0, \\ 2^2 - 4(-a + 2) \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow -2 \le a \le 1.$$

Ответ: $-2 \le a \le 1$.

Задача 6. *Найдите все значения параметра a, для которых наименьшее значение функции*

$$y = x^2 + |x - a| + |x - 1|$$

больше 2.

Решение. Задача равносильна тому, что для всех x выполняется неравенство

$$x^2 + |x - a| + |x - 1| > 2 . \qquad (15)$$

Относительно обоих модулей это неравенство имеет вид $|f| > g$. Поэтому, согласно таблице, при замене модулей на плюс-минус подмодульные выражения ((+ +), (+ −), (− +), (− −)) получаемые четыре неравенства в совокупности будут равносильны неравенству (15).

С целью повторения проделаем это более подробно. Раскрывать модули начинаем со второго:

$$(15) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 + |x - a| + (x - 1) > 2 \\ x^2 + |x - a| - (x - 1) > 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x^2 + (x - a) + (x - 1) > 2 \\ x^2 - (x - a) + (x - 1) > 2 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x^2 + (x - a) - (x - 1) > 2 \\ x^2 - (x - a) - (x - 1) > 2 \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 + 2x - a - 3 > 0 \\ x^2 + a - 3 > 0 \\ x^2 - a - 1 > 0 \\ x^2 - 2x + a - 1 > 0. \end{array}\right.$$

Неравенство (15) должно выполняться для всех x. Это равносильно тому, что для всех x выполняется *хотя бы одно* квадратное неравенство последней совокупности, т.е. *хотя бы один* из четырех дискриминантов отрицательный:

$$\left[\begin{array}{l} D_1 < 0 \\ D_2 < 0 \\ D_3 < 0 \\ D_4 < 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2^2 - 4(-a - 3) < 0 \\ -4(a - 3) < 0 \\ -4(-a - 1) < 0 \\ (-2)^2 - 4(a - 1) < 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a + 4 < 0 \\ a - 3 > 0 \\ a + 1 < 0 \\ -a + 2 < 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a < -1 \\ a > 2. \end{array}\right.$$

Ответ: $a \in (-\infty; -1) \cup (2; +\infty)$.

Задача 7. *Найдите все значения параметра p, при каждом из которых число целочисленных решений неравенства*

$$4x^2 - 20(x - 1) + 3 \cdot |4x - p| - p \le 0 \qquad (16)$$

максимально.

(Продолжение см. на с. 50)