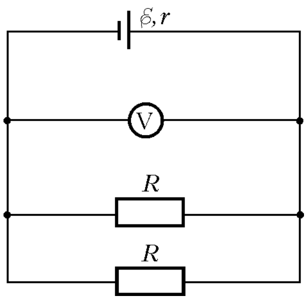

Рис. 20

9. Предмет помещен перед рассеивающей линзой перпендикулярно главной оптической оси линзы на расстоянии, равном двойному фокусному расстоянию. Определите увеличение, даваемое линзой.

10. Два одинаковых резистора сопротивлением $R = 8$ Ом каждый соединены параллельно и подключены к аккумуляторной батарее (рис.20). При этом вольтметр, подключенный к полюсам источника, показывает напряжение $U_1 = 12$ В. Если один из резисторов отключить, то вольтметр покажет $U_2 = 16$ В. Определите внутреннее сопротивление батареи. Вольтметр считать идеальным.

Публикацию подготовили В.Бенинг, П.Бородин, В.Воронин, Е.Григорьев,Д.Денисов, А.Зотеев, И.Иновенков, Н.Лёвшин, И.Ломов, Г.Медведев, А.Павликов, В.Панферов, В.Погожев, М.Потапов, А.Разгулин, И.Сергеев, А.Склянкин, В.Ушаков, М.Федотов, Е.Хайлов, С.Чесноков, О.Шалыгина, Б.Щедрин

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

КОНКУРС «МАТЕМАТИКА 6–8»

(см. «Квант» №4 за 2004 г.)

1. Пронумеруем монеты от начала ряда к концу. Разделим их на 5 кучек следующим образом:

номер кучки:	I	II	III	IV	V
	○○○	○	○○○	○	○ ○ ○
номер монеты:	1 2 3	4	5 6 7	8	9 10 11

Первым взвешиванием сравним вес второй и четвертой кучек (монет 4 и 8).

1. Если весы оказались в равновесии, то взвешиваемые монеты – настоящие, и фальшивые монеты находятся всей тройкой в какой-то из оставшихся кучек. Поэтому вторым взвешиванием сравним вес первой и третьей кучек.

а) Если вес первой и третьей кучек одинаков, то фальшивые монеты – в пятой кучке (9, 10 и 11).

б) Если вес первой и третьей кучек не одинаков, то фальшивые монеты – в более тяжелой кучке.

2. Если весы при первом взвешивании не оказались в равновесии, то более тяжелая монета (единственная в кучке) – фальшивая. Рассмотрим случай, когда это монета 4 (случай, когда фальшивая монета 8, рассматривается аналогично). Тогда про монеты с номером 1 и с номерами с 7 по 11 можно утверждать, что они настоящие. Поэтому вторым взвешиванием сравним вес монет 2 и 6.

а) Если их вес одинаков, то они настоящие, и фальшивые монеты 3, 4 и 5.

б) Если монета 2 оказалась тяжелей, то фальшивые монеты 2, 3 и 4.

в) Если монета 2 оказалась легче, то фальшивые монеты 4, 5 и 6.

Таким образом, двух взвешиваний достаточно, чтобы найти все фальшивые монеты, а одного, очевидно, недостаточно.

2. Исследуем остатки и недостатки, которые получаются при делении чисел вида 2^k на 9, где k – произвольное натуральное число.

Числа 2^1 и 2^2 имеют, соответственно, остатки 2 и 4, а число 2^3 имеет недостаток (–1), поскольку $2^3 = 9 - 1$. Из последнего факта следует, что для произвольного натурального n

$$2^{3n} = \left(2^3\right)^n = (9-1)^n = 9A + (-1)^n,$$

где A – некоторое целое число.

Отсюда также следуют равенства

$$2^{3n+1} = 2\cdot 9A + 2\cdot(-1)^n, \qquad 2^{3n+2} = 4\cdot 9A + 4\cdot(-1)^n.$$

Видно, что число 2^k имеет недостаток (–1) при делении на 9 только в том случае, если $k = 3n$, где n нечетное. Но среди чисел такого вида только одно простое: $k = 3$.

Итак, число $2^p + 1$ делится на 9 только при простом $p = 3$.

3. Проведя прямую, отмечаем на ней с помощью циркуля точки A и B (рис.1). В середине отрезка AB (точке O) восставляем перпендикуляр MN, при этом мы пользуемся циркулем с постоянным раствором, так что $AM = MB = AB$.

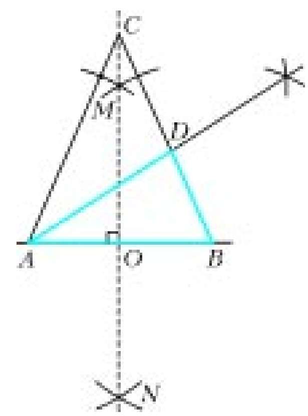

Рис. 1

На продолжении перпендикуляра берем точку C, соединяем ее с точками A и B и проводим биссектрису угла CAB.

Точка D пересечения этой биссектрисы с прямой BC, а также точки A и B являются вершинами искомого треугольника. Действительно, поскольку ΔACB равнобедренный, то $\angle CAB = \angle CBA$. По свойству биссектрисы, $\angle DAB = \frac{1}{2}\angle CAB = \frac{1}{2}\angle CBA$.

Поскольку $90° > \angle CBO > \angle MBO = 60°$, то в ΔADB углы A и B острые. Острым является также и угол D:

$$\angle D = 180° - (\angle A + \angle B) < 180° - (60° + 30°) = 90°.$$

4. Воспользуемся тождеством

$$\left(u^2+v^2\right)\left(x^2+y^2\right) = (ux - vy)^2 + (vx + uy)^2.$$

С учетом условия задачи отсюда получаем

$$\left(u^2+v^2\right)\left(x^2+y^2\right) = 8. \qquad (*)$$

Возможны лишь следующие варианты:

а) один из сомножителей в левой части (*) 1, а другой 8;

б) один из сомножителей в левой части (*) 2, а другой 4.

Несложно убедиться, что в каждом из этих вариантов одна из переменных x, y, u, v равна нулю.

Рассмотрим случай $u = 0$. Тогда из (*) следует

$$\begin{cases} v^2 = 4, \\ x^2 = y^2 = 1 \end{cases} \quad \text{либо} \quad \begin{cases} v^2 = 1, \\ x^2 = y^2 = 4, \end{cases}$$

а исходные уравнения задачи запишутся так:

$$\begin{cases} vy = -2, \\ vx = 2. \end{cases}$$

Отсюда получаем возможные решения $(x,\ y,\ u,\ v)$:

$$(1, -1, 0, 2), (-1, 1, 0, -2), (2, -2, 0, 1), (-2, 2, 0, -1).$$

Для случая $v = 0$ аналогично получаем

$$(1, 1, 2, 0), (-1, -1, -2, 0), (2, 2, 1, 0), (-2, -2, -1, 0).$$

Еще 8 решений найдем заметив, что исходные уравнения не изменятся, если поменять местами переменные u и x, а также переменные v и y. Соответственно получаем

$$(0, 2, 1, -1), (0, -2, -1, 1), (0, 1, 2, -2), (0, -1, -2, 2),$$

$$(2, 0, 1, 1), (-2, 0, -1, -1), (1, 0, 2, 2), (-1, 0, -2, -2).$$

Итак, задача имеет 16 решений.

5. а) *Ответ*: $3n + [n/2]$.

Докажем сначала, что меньшего числа ходов точно будет недостаточно. Очевидно, что в какой-то момент перекладки первый стержень будет пуст. То же верно и для второго стержня. Пусть для определенности вначале опустошается первый. К этому моменту красные кольца сделали не менее n ходов. Но ни одно из этих колец в этот момент не находится на том месте, после которого оно уже не будет менять свое положение, ведь третий стержень в конце должен оказаться пустым, а из второго еще не ушло самое нижнее кольцо. Следовательно, красные сделают еще не менее n ходов.

Посмотрим, сколько ходов наверняка сделают синие кольца. Во-первых, для опустошения второго стержня они сходят не менее n раз, во-вторых, так как $[n/2]$ из них должны вернуться на этот стержень, то синие кольца сходят еще $[n/2]$ раз.

Итак, в процессе перекладки будет сделано не менее $n + n + n + [n/2] = 3n + [n/2]$ ходов.

Покажем теперь, как уложиться в это число ходов. Обозначим через $\langle x\rangle$ наименьшее целое число, большее или равное x. Перекладывание одного кольца с i-го стержня на j-й обозначим через $(i,\ j)$, тогда $k(i, j)$ будет означать, что операция $(i,\ j)$ повторяется k раз.

Пару операций (1, 3) (2, 3) повторяем $[n/2]$ раз. В случае нечетного n делаем еще один раз перекладку (1, 3). Пока красные кольца сходили $\langle n/2\rangle$ раз, а синие $[n/2]$ раз. На первом стержне находятся $[n/2]$ красных колец, на втором $\langle n/2\rangle$ синих, на третьем располагаются n колец. Их цвета чередуются, причем чередование начинается с красного (считая снизу). Всего сделано n ходов.

Далее случаи четного и нечетного n немного отличаются. Разберем их отдельно.

Пусть n четно. Перекладываем все кольца со второго стержня на третий. Это $n/2$ ходов. Теперь будем брать кольца поочередно то с первого стержня, то с третьего и класть их на второй до тех пор, пока на нем не станет n колец. Это займет еще n ходов. После этого первый стержень пуст, второй заполнен нужным нам образом, а на третьем кольца чередуются, причем чередование начинается с красного и заканчивается синим кольцом. Делаем (3, 1) n раз – вот и все. Общее количество ходов: $n + n/2 + n + n = 3n + [n/2]$.

Пусть n нечетно. Перекладываем все кольца с первого стержня на третий. Это $[n/2]$ ходов. Теперь будем брать кольца поочередно то со второго стержня, то с третьего и класть их на первый до тех пор, пока на нем не станет n колец. Это еще n ходов. После этого первый стержень заполнен нужным нам образом, второй пуст, а на третьем кольца чередуются, причем чередование начинается и заканчивается красным кольцом. Делаем (3, 2) n раз – готово! Сделано как раз $3n + [n/2]$ ходов.

б) *Ответ*: для любого n.

Предъявим такой алгоритм перекладки, при котором на любом стержне в любой момент будет располагаться не более n колец. Вот этот алгоритм:

$$\begin{array}{ccc} n(2,3) & n(1,2) & n(3,1) \\ (n-1)(2,3) & (n-1)(1,2) & (n-1)(3,1) \\ & \ldots & \\ 2(2,3) & 2(1,2) & 2(3,1) \\ (2,3) & (1,2) & (3,1) \end{array}$$

Этот метод позволяет достичь результата за $3n(n+1)/2$ ходов. Известен, однако, способ прийти к цели за $4n + \langle n/2\rangle$ ходов. Он проиллюстрирован на рисунке 2 для $n = 4$. Эксперимент

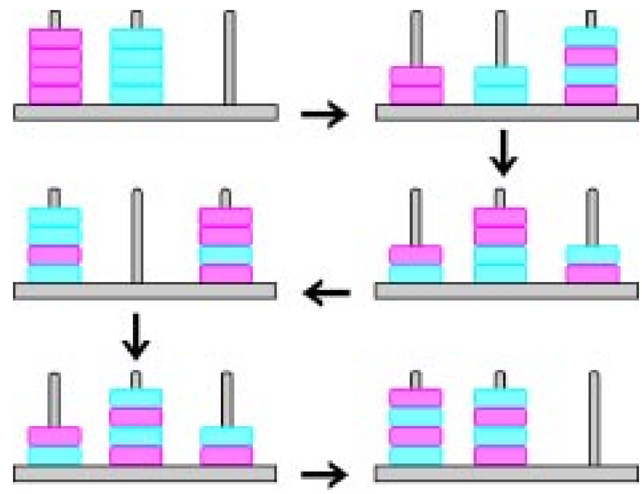

Рис. 2

показывает, что и это не самый кратчайший путь. Какое наименьшее число ходов требуется осуществить в общем случае – неизвестно.

ПОЧЕМУ НЕТ РЕШЕНИЙ?

1. *Указание.* Последняя цифра суммы чисел, стоящих в левой части равенства, должна делиться на 5.

2. Если делимое и делитель состоят из одинакового количества цифр, причем в старшем разряде у них стоят одинаковые цифры, то целочисленным частным может быть только 1. Но числа АЛГЕБРА и АПОФЕМА не равны друг другу.

3. *Указание.* Цифра Д в слове КОРД равна ненулевой последней цифре числа $8 \cdot К$. Но тогда число $ДРОК \cdot 8$ должно быть пятизначным.

4. *Указание.* Сумму чисел в левой части ребуса запишите в виде $100 \cdot (ВО + КО + МО + СО) + 4 \cdot ДА$, из которого следует, что она делится на 4. Число же 18014 на 4 не делится.

5. а) *Указание*. Поскольку $КИТ \ge 102$, $ТИК \ge 102$, то $КИТ + ТИК \ge 204$.

б) *Указание*. Поскольку $КОЛОДКА \le 9878695$, $ЛОДКА \le 98765$, то $КОЛОДКА + ЛОДКА \le 9977460$.

6. а) Запишем исходное равенство в виде $30 \cdot ДО + (К + Л + М) = 30 \cdot 40$, откуда $К + Л + М = 30 \cdot (40 - ДО)$. Последнее невозможно.

б) Цифра В может быть равной только 1, но равенство $ОДА \cdot 2 = 1000$ невозможно.

7. а) Нет.

б) *Указание*.

$$КАТАР - КАРАТ = ТАР - РАТ =$$
$$= 100 \cdot Т + 10 \cdot А + Р - (100 \cdot Р + 10 \cdot А + Т) = 99 \cdot (Т - Р).$$

8. а) Нет.

б) *Указание.* Проверьте, может ли быть $М < 9$, а $Г > 1$.

КАЛЕЙДОСКОП «КВАНТА»

Вопросы и задачи

1. Если токи равны, то вектор магнитной индукции равен нулю; если $I_1 > I_2$, то вектор магнитой индукции перпендикулярен плоскости рисунка и направлен от читателя; если $I_1 < I_2$, то его направление – противоположное.
2. В первом случае, в силу симметрии, магнитная индукция равна нулю; во втором случае вектор магнитной индукции перпендикулярен плоскости рисунка и направлен к читателю.
3. Для любого ребра куба можно найти в соответствующей диагональной плоскости другое параллельное ему ребро, в котором течет такой же по направлению и силе ток. Эти токи создают в центре куба равные и противоположно направленные магнитные поля, поэтому результирующая индукция магнитного поля будет равна нулю.
4. Поскольку в общем центре проводников векторы магнитной индукции, создаваемые токами по отдельности, равны по модулю и взаимно перпендикулярны, то величина каждого из них равна $B/\sqrt{2}$.
5. Ток в бесконечном прямом проводе не вносит вклада в магнитное поле в точке O, лежащей на оси провода. Ток, текущий по полуокружности, создает поле в два раза меньшей величины, чем круговой ток, т.е. $B/2$.
6. Провод примет форму окружности.
7. В обоих случаях витки соленоида будут притягиваться друг к другу.
8. Провода будут разворачиваться так, чтобы токи были направлены в одну сторону, и притягиваться друг к другу.
9. Тороидальная катушка создает в своем центре такое же по виду поле, как и один виток с током. Поэтому магнитная стрелка развернется перпендикулярно плоскости тороида.
10. Получаются расположенные рядом две обмотки, токи в которых противоположны, и магнитные поля этих токов взаимно уничтожаются.
11. Токи, текущие по трубке, параллельны и притягиваются друг к другу.
12. В случае а) рамка развернется перпендикулярно плоскости рисунка; в случаях б) и в) рамка развернется таким же образом и при этом втянется в область более сильного поля.
13. Кольцо соскочит с магнита, развернется на 180° и снова наденется на него другой стороной.
14. Чтобы амперовы силы могли удерживать кольцо, ток по его ближайшей к читателю стороне должен течь справа налево (или по часовой стрелке, если смотреть сверху).
15. Последовательно с магнитом можно включить реостат или сделать выдвижной сердечник.
16. Да, можно. Для этого нужно сделать большое число витков из тонкой проволоки.

Микроопыт

В обоих случаях по параллельным друг другу проводам или рельсам текут постоянные и противоположно направленные токи, поэтому они отталкиваются.

КАК ПОСТРОИТЬ ПАРАДОКСАЛЬНЫЙ ПРИМЕР

1. $x_1 = x_2 = x_4 = x_5 = x_6 = x_8 =$

$$= x_9 = x_{11} = x_{12} = x_{13} = x_{15} = x_{16} = 2a + 3b,$$

$x_3 = x_7 = x_{10} = x_{14} = -5a - 8b$.

2. Рассмотрим первую систему (вторая рассматривается аналогично). Если $\alpha \ne \beta$, где $\alpha = 1 - \frac{n}{a}$, $\beta = 1 - \frac{k}{b}$, то она эквивалентна двойному неравенству $\beta x > y > \alpha x$. Если $\beta > \alpha$, то это условие выполняется при всех положительных x и некоторых y; если же $\beta < \alpha$, то оно выполняется при всех отрицательных x и некоторых y.
Покажем, что случай $\alpha = \beta$ невозможен. Предположим противное, тогда $\frac{n}{k} = \frac{a}{b}$. В случае взаимно простых n и k, $a < n$, $b < k$ последнее равенство невозможно. Рассмотрим случай, когда числа n и k не взаимно просты. Пусть $n = a + a_1$, $k = b + b_1$. Тогда $\frac{n}{k} = \frac{a + a_1}{b + b_1} = \frac{a}{b}$, откуда $\frac{a}{b} = \frac{a_1}{b_1} = \frac{n}{k}$. Поскольку число n делится на a, то $n \ge 2a$, или $a + a_1 \ge 2a$, откуда $a_1 \ge a$. Поскольку число n делится на a_1, то $n \ge 2a_1$, или $a + a_1 \ge 2a_1$, откуда $a \ge a_1$. Значит, $a = a_1$.
Аналогично доказывается, что $b = b_1$.
Тогда исходная система неравенств запишется так:

$$\begin{cases} y + x > 0, \\ y + x < 0, \end{cases}$$

что невозможно.
3. Числа n и k не могут быть взаимно простыми, в противном случае выполнялось бы равенство (см. задачу 3 в тексте статьи) $23 = 10 + k - 2$, откуда $k = 15$, но тогда числа n и k не взаимно просты.
Пусть $d > 1$ – наибольший общий делитель (НОД) чисел n и k. Тогда $23 = 10 + k - d - 1$, $k - d = 14$. Имеем: $d = \text{НОД}(10, k - d) = \text{НОД}(10, 14) = 2$. Значит, $23 = 10 + k - 2 - 1$, $k = 16$.
С помощью изложенного в статье алгоритма строим последовательность

$$x, x, x, y, x, x, x, x, x, y, x, x, x, y, x, x, x, x, x, y, x, x, x.$$

Составим соответствующую систему неравенств:

$$\begin{cases} 13x + 3y > 0, \\ 2y + 8x < 0. \end{cases}$$

Для построения последовательности можно взять, например, $x = 7$ и $y = -29$.
4. Поскольку $n + k - d - 1 = 30$, то $n + k = 31 + d$. Наибольший общий делитель d не может быть больше 1, в противном случае 31 должно делиться на d, и тогда $d = 31$, $n = k$, чего не может быть.
Если $d = 1$, то $n + k = 32$. Тогда с помощью перебора получим: $\max|k - n| = 29 - 3 = 26$.
5. Такое может быть только в том случае, если функция $f(x)$ определена на отрезке $[0; 23]$.
6. Такие функции существуют. Например,

$$f(x) = \begin{cases} -6, & 0 \le x < 1, \\ 180x - 186, & 1 \le x < 1{,}1, \\ 12, & 1{,}1 \le x < 1{,}9, \\ -180x + 354, & 1{,}9 \le x < 2, \\ -6, & 2 \le x < 3, \\ -6, & 3 \le x < 4, \\ 180x - 726, & 4 \le x < 4{,}1, \\ 12, & 4{,}1 \le x < 4{,}9, \\ -180x + 894, & 4{,}9 \le x < 5, \\ -6, & 5 \le x \le 6. \end{cases}$$

СЛОЖЕНИЕ СКОРОСТЕЙ

1. Относительная скорость равна $v/2$ и сонаправлена со скоростью тепловоза.
2. 1) $v_1 \approx 50$ км/ч; 2) $v_2 = 29$ км/ч.
3. 1) $v_{\text{ш}} = v\sqrt{14}$; 2) $\mu_{\max} = \frac{\sqrt{70}}{2}\frac{v^2}{gd}$.

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ.М.В.ЛОМОНОСОВА

Математика

Вариант 1

1. $\frac{1}{2}$. **2.** $\left[\sqrt{2}-1;\,1\right)\cup\left(1;+\infty\right)$.

3. $-\frac{21}{5}$; $-\frac{11}{4}$. *Указание.* Чтобы числа $a_1,a_2,\ldots,a_n$ образовывали убывающую арифметическую прогрессию, необходимо и достаточно, чтобы ее разность $d=a_2-a_1$ и натуральное n удовлетворяли системе $d<0$, $a_n-a_1=(n-1)d$, т.е. $m^2-6m<0$, …, $6m-m^2=3n-4$. Откуда либо $(m-3)^2=1$, $n=4$, либо $(m-3)^2=4$, $n=3$.

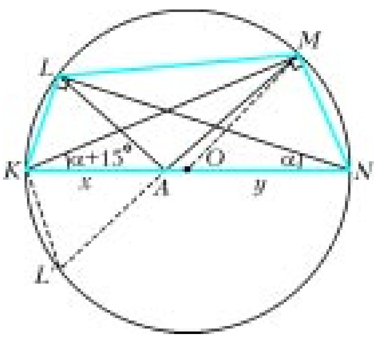

Рис. 3

4. $\sqrt{6}\left(\sqrt{3}+1\right)$, $3\left(3+\sqrt{3}\right)$. *Указание.* Точки L и M лежат на окружности с диаметром KN (рис.3). Пусть L' – точка, симметричная точке L относительно KN, $\angle KNL=\alpha$. Тогда $\angle MKN=\alpha+15^\circ$, $\angle LKN=\angle L'KN=90^\circ-\alpha$, $\angle L'KM=105^\circ$. По теореме синусов, $L'M=L'A+AM=KN\cdot\sin\angle L'KM=\sqrt{6}\left(\sqrt{3}+1\right)$, причем $L'A=LA=\sqrt{6}$, $AM=3\sqrt{2}$. Пусть $KA=x$, $AN=y$. Имеем $x+y=4\sqrt{3}$, $xy=L'A\cdot AM=6\sqrt{3}$. Из этой системы находим, что $x=3\sqrt{3}-3$, $y=3+\sqrt{3}$, $AO=3-\sqrt{3}$. Из треугольника AOM по теореме косинусов находим, что $\cos\angle MAO=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\angle MAO=45^\circ$, откуда $\angle LAM=90^\circ$. Осталось заметить, что $S_{KLMN}=S_{AKL}+S_{MAN}+S_{LAM}$.

5. $\left(-\frac{1}{2};-\frac{1}{4}\right]\cup\left[\frac{1}{4};\frac{1}{3}\right)\cup\left(\frac{1}{3};\frac{1}{2}\right)$. *Указание.* Уравнение равносильно системе

$$\begin{cases}(3a-1)\sin^2 x-(3a-1)\left(a^2+1\right)\sin x=0,\\ |ax-a\pi|<\frac{\pi}{2}.\end{cases}$$

Если $a=0$ или $a=\frac{1}{3}$, система имеет бесконечно много решений. При $a\neq 0$, $a\neq\frac{1}{3}$ получаем систему

$$\begin{cases}\sin x=0,\\ |x-\pi|<\frac{\pi}{2|a|},\end{cases}$$

имеющую ровно три решения тогда и только тогда, когда

$$1<\frac{1}{2|a|}\le 2.$$

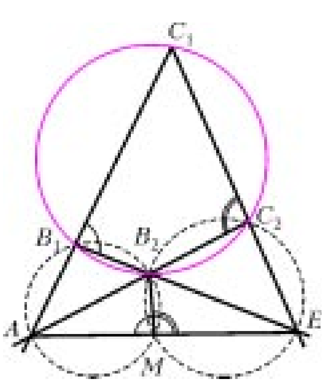

Рис. 4

6. $\frac{35}{24}$. *Указание.* Рассмотрим сечение сферы плоскостью $B_1B_2C_1C_2$ (рис.4). Пусть M – вторая точка пересечения окружностей, описанных около треугольников AB_1B_2 и EC_2B_2. Из цепочки равенств

$$\angle AMB_2=180^\circ-\angle AB_1B_2=$$
$$=\angle C_1B_1B_2=180^\circ-\angle C_1C_2B_2=\angle EC_2B_2=180^\circ-\angle EMB_2$$

следует, что точка M лежит на отрезке AE. По теореме о равенстве произведений отрезков секущих,

$$AM\cdot AE=AB_2\cdot AC_2=(AO-r)(AO+r)=AO^2-r^2=3$$

(здесь $r=1$ – радиус сферы). Точно так же $EM\cdot EA=EO^2-r^2=8$. Отсюда $AE^2=AE(AM+EM)=11$. Аналогично получаем $AF^2=11$.

Грани AOE и AOF равны по трем сторонам и имеют площадь $S=\frac{\sqrt{140}}{4}$. Осталось найти высоту грани OEA, а затем высоту пирамиды и ее объем.

Вариант 2

1. $(0;1)\cup(1;2)$.

2. $\left(-\infty;-2-\sqrt{3}\right]\cup\left(-0{,}3;-2+\sqrt{3}\right)\cup\{1\}\cup(2;+\infty)$.

3. 13. *Указание.* Воспользуйтесь тем, что высота пирамиды $MABCD$ равна среднему арифметическому высот пирамид $EABLK$ и $FCDKL$.

4. $\frac{\pi}{4}+(-1)^{n+1}\frac{\pi}{4}+\pi n$, $\frac{\pi}{4}+(-1)^{n+1}\frac{\pi}{3}+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$. *Указание.* Заменой $y=\sin x-\cos x$ приведите уравнение к виду

$$\sqrt{3\left(y^2-1\right)}=2\left(y^2-1\right)-(y+1).$$

5. 16 км. Изобразим графики движения автомобилиста $AEFGH$ (рис.5), велосипедиста $BEJH$ и мотоциклиста BIF. Так как $\Delta ABF\sim\Delta EIF$, $\Delta BEI\sim\Delta BJF$ и $\Delta FHJ\sim\Delta CHB$, то, обозначив $KL=x$, соответственно получаем

$$AL=x\cdot\frac{24}{6}=4x=LM,\quad FJ=6\cdot\frac{4x}{3x}=8\ \text{ и }\ BC=8\cdot\frac{8x}{4x}=16.$$

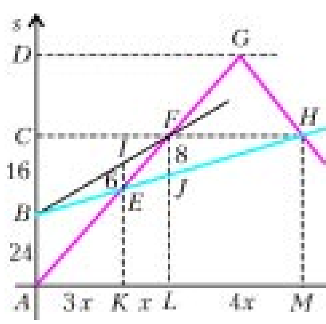

Рис. 5

6. $\frac{2\sqrt{3}+1}{\sqrt{15}}$. Медианы AM и BL делятся точкой O в отношении 2:1, поэтому проекции этих медиан – отрезки KL и NM (рис.6) – делятся проекциями точки O в таком же отношении. Другими словами, O – точка пересечения прямых n_1 и n_2, перпендикулярных отрезкам KL и NM соответственно и делящих эти отрезки в отношении 2:1, считая от точек K и N соответственно. Но таким же свойством обладает точка, лежащая на отрезке HO' (где O' – центр окружности, описанной около треугольника ABC) и делящая его в отношении 2:1, считая от точки H. Следовательно, точка O лежит на отрезке HO' и $HO:OO'=2:1$.

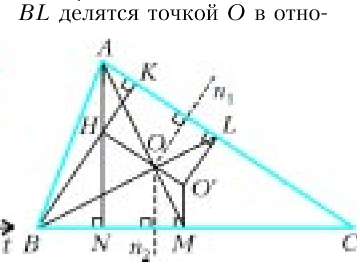

Рис. 6

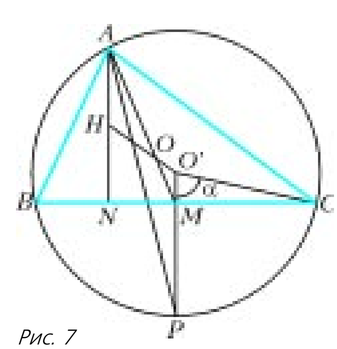

Рис. 7

Биссектриса угла A пересекает описанную окружность в такой точке P, что дуги BP и PC равны (по теореме о вписанном угле, см. рис.7), т.е. радиус $O'P$ проходит через середину M стороны BC. Из подобия треугольников получаем $O'P : AH = 2 : 1$, $AH : O'M = 2 : 1 \Rightarrow O'P : O'M = 4$. Треугольник ABC остроугольный по условию, поэтому точка O' лежит внутри треугольника, а точка M – на радиусе $O'P = R$. Положим $\angle MO'C = \angle BAC = \alpha$, тогда

$$O'M = O'C \cdot \cos\alpha = R\cos\alpha,$$

откуда

$$4 = \frac{O'P}{O'M} = \frac{R}{R\cos\alpha} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{1}{4}.$$

Если β и $\beta + 30°$ – углы B и C треугольника, то

$$\frac{1}{4} = \cos\alpha = \cos(150° - 2\beta).$$

Окончательно получаем

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}BC \cdot \left(\frac{BC}{\sin\alpha} \cdot \sin\beta\right) \cdot \sin(\beta + 30°) = \frac{2\sqrt{3}+1}{\sqrt{15}}.$$

Вариант 3

1. 2, 4, 8, 16.

2. $\{2; 3\}$. *Указание.* Замена: $t = x^2 - 5x + 7 > 0$.

3. -15. *Указание.* Поскольку квадратный корень из натурального числа может быть либо целым числом, либо иррациональным, то при целых n число $11 - 8\sqrt{1-8n}$ является или целым, или иррациональным, а число $\frac{5n^2+4n+13}{n+1}$ рациональное, т.е. должно быть целым. Поскольку

$$\frac{5n^2+4n+13}{n+1} = 5n - 1 + \frac{14}{n+1},$$

число $n + 1$ – делитель числа 14, причем $1 - 8n \ge 0$, откуда $n \le 0$.

Таким образом, число $n + 1$ может принимать одно из следующих значений: ± 1; -2; -7; -14. Остается непосредственной проверкой убедиться, что только $n = -15$ удовлетворяет уравнению.

4. $\left\{4; \frac{1}{4}\right\}$. *Указание.* После замены $y = \log_2 x$, $t = \cos\frac{\pi(47-8x)}{45}$, $|t| \le 1$, исходное неравенство принимает вид

$$9y^2 + 4\left(8t^2 - 8t - 7\right)y + 36 \le 0,$$

причем дискриминант D этого квадратного относительно y трехчлена

$$\frac{D}{4} = 64(t+1)(t-2)(2t-1)^2 \le 0$$

при $|t| \le 1$.

Итак, решения данного неравенства получаются из системы

$$\begin{cases} D = 0, \\ y = -\frac{2}{9}\left(8t^2 - 8t - 7\right). \end{cases}$$

5. $\frac{1}{4}$ или $\frac{5}{4}$ (существуют два различных треугольника AB_1C_1).

Пусть O – точка пересечения диагоналей параллелограмма $ABCD$. Так как по условию задачи $AC : BD = 2 : \sqrt{3}$, а диагонали параллелограмма точкой O делятся пополам, положим $AO = CO = 2a$ и $BO = DO = \sqrt{3}a$. Тогда площадь параллелограмма $ABCD$ равна

$$S_{ABCD} = 2\sqrt{3}a^2.$$

Возможны два случая.

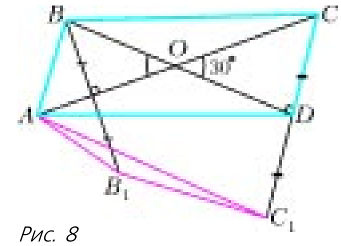

Рис. 8

1 случай (рис.8). Угол AOB равен 30°. По теореме косинусов из треугольника AOB, $AB = a$. Поскольку справедливо равенство $AO^2 = AB^2 + BO^2$, угол ABO прямой, угол OAB равен 60°. Так как точка B_1 симметрична точке B относительно прямой AC, то $AB_1 = a$ и $\angle CAB_1 = 60°$.

Из равенства треугольников ABO и CDO следует, что угол CDO прямой и точка C_1 лежит на прямой CD, а точка D является серединой отрезка CC_1.

В треугольнике ACC_1 отрезок OD является средней линией. Значит, $AC_1 = 2 \cdot OD = 2\sqrt{3}a$, и $\angle CAC_1 = \angle COD = 30°$. Угол B_1AC_1 равен разности углов CAB_1 и CAC_1, т.е. равен 30°.

Итак, площадь треугольника AB_1C_1 равна $\frac{\sqrt{3}a^2}{2}$, а отношение площадей треугольника AB_1C_1 и параллелограмма $ABCD$ равно $\frac{1}{4}$.

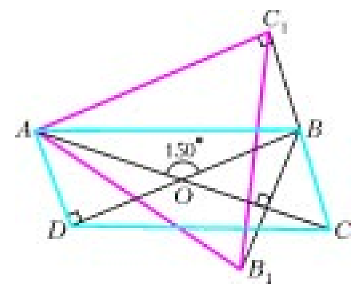

Рис. 9

2 случай (рис.9). Угол AOB равен 150°. Рассуждая, как в первом случае, получите, что площадь ΔAB_1C_1 равна $\frac{5\sqrt{3}a^2}{2}$, а отношение площадей треугольника AB_1C_1 и параллелограмма $ABCD$ равно $\frac{5}{4}$.

6. При $a \in (-\infty; 0) \cup \left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$ решений нет;

при $a \in \left(0; \frac{3-\sqrt{3}}{4}\right)$ два решения: $x = 1 \pm 2\sqrt{\frac{a}{1-2a}}$;

при $a = \frac{3-\sqrt{3}}{4}$ три решения: $x = 2 + \sqrt{3}$ и $x = 1 \pm \sqrt[4]{12}$;

при $a \in \left(\frac{3-\sqrt{3}}{4}; \frac{1}{3}\right)$ четыре решения:

$x = \frac{2(a-1) \pm \sqrt{-8a^2+12a-3}}{2a-1}$, $x = 1 \pm 2\sqrt{\frac{a}{1-2a}}$; при $a = \frac{1}{3}$ три решения: $x = -1$, $x = 3$, $x = 5$; при $a \in \left(\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right)$ два решения: $x = 1 - 2\sqrt{\frac{a}{1-2a}}$, $x = \frac{2(a-1) - \sqrt{-8a^2+12a-3}}{2a-1}$.

Указание. Перепишем данное уравнение в виде $f(u) = f(v)$, где $f(t) = t - \sin t$:

$$u = |x-3| + 6a - 4, \quad v = (1-2a)x^2 - (3-4a)x.$$

Функция $f(t)$ строго возрастает. В самом деле, для $t_1 < t_2$ имеем

$$f(t_2) - f(t_1) = t_2 - t_1 - (\sin t_2 - \sin t_1) > 0,$$

так как

$$\sin t_2 - \sin t_1 = 2\sin\frac{t_2 - t_1}{2}\cos\frac{t_2 + t_1}{2} \le$$

$$\le 2\left|\sin\frac{t_2-t_1}{2}\cos\frac{t_2+t_1}{2}\right| \le 2\left|\sin\frac{t_2-t_1}{2}\right| < 2\left|\frac{t_2-t_1}{2}\right| = t_2 - t_1$$

в силу неравенства $|\sin\alpha| < |\alpha|$ при $\alpha \ne 0$.

Отсюда получаем

$$f(u) = f(v) \Leftrightarrow u = v,$$

т.е.

$$(2a-1)x^2-(4a-3)x+|x-3|+6a-4=0 .$$

Итак, задача свелась к решению для всех значений параметра a этого уравнения.

Вариант 4

1. $\boldsymbol{R}$. **2.** $(-3;-2]\cup\left[\frac{3-\sqrt{31}}{2};\frac{\sqrt{23}-1}{2}\right]\cup[2;5)$.

3. $\frac{15\pi}{16}+2\pi k$, $k\in\boldsymbol{Z}$. *Указание.* Уравнение преобразуется к виду

$$\sin\left(3x-\frac{5\pi}{16}\right)-\sin 8x=2\Leftrightarrow\begin{cases}\sin\left(3x-\frac{5\pi}{16}\right)=1,\\ \sin 8x=-1.\end{cases}$$

4. 65:144. *Указание.* Пусть E – точка, в которой окружность с центром N касается прямой BO, D – точка пересечения прямых OM и AB (рис.10). Докажите, что треугольники OEN и BDO равны.

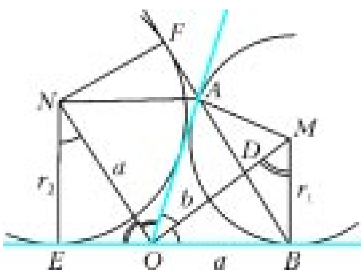

Рис. 10

Тогда, если $MB=r_1$, $NE=r_2$, $ON=a$, $OM=b$, то в треугольнике OBD имеем $OB=a$, $OD=r_2$.

Из прямоугольного треугольника OBM получаем $r_1=\sqrt{b^2-a^2}$, а из подобия треугольников OBD и OMB следует равенство

$$\frac{OB}{OM}=\frac{OD}{OB},\text{ т.е. }\frac{a}{b}=\frac{r_2}{a}.$$

Отсюда искомое отношение равно

$$\frac{r_1}{r_2}=\frac{b}{a}\sqrt{\frac{b^2}{a^2}-1} .$$

5. При $a\in\left(-\infty;-\frac{5}{4}\right)$ одно решение; при $a=-\frac{5}{4}$ два решения; при $a\in\left(-\frac{5}{4};-1\right)$ три решения; при $a\in\left[-1;1-\sqrt{2}\right)$ два решения; при $a=1-\sqrt{2}$ одно решение; при $a\in\left(1-\sqrt{2};5\right)$ два решения; при $a\in[5;+\infty)$ одно решение.

Указание. Выполнив замену $t=2^{-x}$, $t>0$, получим

$$2t^4-t^3-(a+8)t^2+(4-2a)t-a^2+4a+5=0 .$$

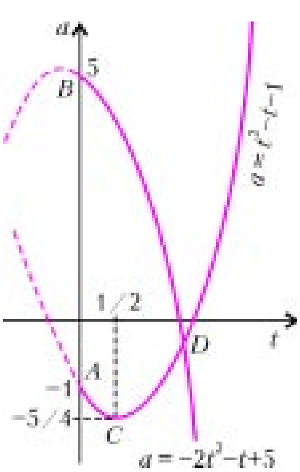

Рис. 11

Рассмотрим уравнение как квадратное относительно переменной a:

$$a^2+\left(t^2+2t-4\right)a-$$
$$-2t^4+t^3+8t^2-4t-5=0 .$$

Его дискриминант представляет собою полный квадрат:

$$D=9\left(t^2-2\right)^2,$$

поэтому либо $a=t^2-t-1$, либо $a=-2t^2-t+5$. Для того чтобы получить ответ, достаточно изучить взаимное расположение графиков полученных квадратных трехчленов на плоскости $(t;a)$ в области $t>0$ (рис.11). При этом нам интересны точки пересечения графиков с осью ординат $A(0;-1)$, $B(0;5)$, вершина первой параболы $C\left(\frac{1}{2};-\frac{5}{4}\right)$, а также общая точка парабол $D\left(\sqrt{2};1-\sqrt{2}\right)$.

Поскольку зависимость между переменными x и t, задаваемая равенством $t=2^{-x}$, взаимно однозначная, исходная задача при каждом значении a имеет столько решений, сколько общих точек с параболами в области $t>0$ имеет соответствующая прямая, параллельная оси абсцисс.

6. 1 : 2. *Указание.* Плоскость $\mathcal{P}$ пересекает плоскость основания $ABCD$ по прямой KN (рис.12). Пусть $BC=DK=a$, $AK=b$. Так как $AD>BC$, прямая KN пересекает прямую BC в точке E, лежащей на продолжении отрезка BC за точку C. Следовательно, точка M лежит между точками C и C_1 (рис.13). Так как $KN>DN$, то $\angle NDK>\angle NKD$. В равнобокой трапеции $\angle BAD=\angle ADC$, поэтому $\angle BAK+\angle AKN>\pi$. Следовательно, прямая KN пересекает прямую AB в некоторой точке F, лежащей на продолжении отрезка AB за точку A. Поэтому точка L лежит между точками A и A_1. Таким образом, плоскость $\mathcal{P}$ отсекает от призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ шестигранник $ABCNKLB_1M$, гранями которого являются два пятиугольника $ABCNK$ и LB_1MNK с общим ребром KN, два прямоугольных треугольника ALK и CMN, две прямоугольные трапеции ABB_1L и CBB_1M.

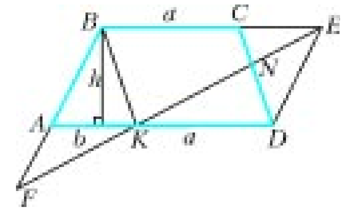

Рис. 12

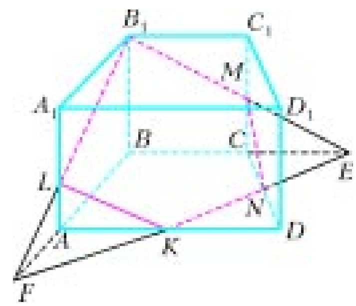

Рис. 13

Пусть высота трапеции $ABCD$ равна h, а длина бокового ребра прямой призмы (т.е. ее высота) равна l. Выразите через a, b, h и l объемы призмы и многогранника $ABCNKLB_1M$, заметив, что этот многогранник получается из треугольной пирамиды B_1BEF «отрезанием» треугольных пирамид $LAKF$ и $MCEN$. Затем запишите отношение объемов и получите после упрощений, что

$$35a^2+ab-36b^2=0\Leftrightarrow(a-b)(35a+36b)=0 ,$$

откуда $a=b$.

Вариант 5

1. $\frac{\pi}{4}+(-1)^n\arcsin\frac{1}{3}+\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$. **2.** $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2};0\right)\cup\left(1;\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$.

3. $\left(-\sqrt{5};-2\right)\cup(-1;0)\cup(0;1)\cup\left(2;\sqrt{5}\right)$. **4.** 6 : 11.

5. $\left(\frac{5}{2};\frac{3}{2}\right)$, $\left(\frac{7}{2}-\log_2 3;\frac{1}{2}+\log_2 3\right)$.

6. $35/2$. *Указание.* Докажите, что большая окружность проходит через точки A и C (рис.14), причем $\angle ABC=\frac{\alpha+\beta}{2}$, где $\alpha=\angle O_2O_1O_3$, $\beta=\angle O_1O_2O_3$, так что

$$O_3A=\frac{AC}{2\sin\frac{\gamma}{2}}=\frac{7}{2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}} .$$

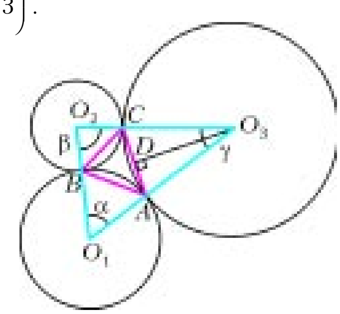

Рис. 14

7. $x > 0$ при $a = 0$, $x = \dfrac{3a + \sqrt{9a^2 + 4}}{2}$ при $a \neq 0$. *Указание.* Уравнение равносильно такому:

$$\log_2^2(x - 3a) - \log_2^2 x = 0.$$

8. $\arccos\dfrac{3}{\sqrt{13}} = \operatorname{arctg}\dfrac{2}{3}$. *Указание.* Пусть искомый двугранный угол равен φ, тогда $S_{\Delta KLM}\cos\varphi = S_{\Delta ABC}$. Положив $BC = 3a$, вычислите площадь равнобедренного треугольника KLM ($KL = LM$).

Вариант 6

1. $\dfrac{\pi}{12}(2n+1)$, $\dfrac{\pi}{2}(2n+1)$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **2.** $(-5; -1) \cup (3; 7)$.

3. $\left(-2; -1 + \sqrt{2}\right)$. **4.** $-3 + \sqrt{24}$. **5.** $\left(\dfrac{1+\sqrt{13}}{2}; \dfrac{-5+\sqrt{13}}{4}\right)$.

6. 96. *Указание.* Пусть DH – высота трапеции, A – основание перпендикуляра, опущенного из точки B на DE (рис.15).

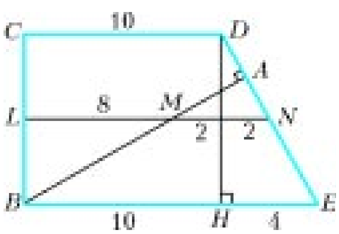

Рис. 15

Пользуясь подобием треугольников MAN и BAE, получите, что

$$AN = \frac{2}{7}AE,\quad AE = \frac{7}{10}DE.$$

Из подобия треугольников DHE и BAE следует, что

$$AE = \frac{56}{DE}.$$

Отсюда находим, что $DE = \sqrt{80}$. Наконец, $DH = \sqrt{DE^2 - HE^2} = 8$. Дальнейшее ясно.

7. $\left[-\dfrac{13}{30}; -\dfrac{3}{10}\right) \cup \left(\dfrac{11}{30}; \dfrac{1}{2}\right]$. *Указание.* Поскольку $x = 0$ и $x = 5\pi$ – корни данного уравнения, необходимо выяснить, при каких a уравнение $\sin 3ax + 1 = 0$ имеет ровно 3 корня на интервале $(0; 5\pi)$. Рассмотрите отдельно случаи $a > 0$ и $a < 0$.

8. $\dfrac{\sqrt{14}}{3}$. Искомой прямой, проходящей через точку L и пересекающей прямые MP и KE, является линия пересечения

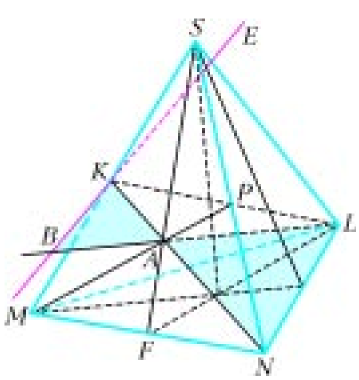

Рис. 16

плоскостей LMP и LKE. По условию $LN \parallel KE$, поэтому прямая LN также принадлежит плоскости LKE (рис.16). Плоскость $LNKE$ пересекает пирамиду $SLMN$ по ΔNKL, в котором NK – медиана ΔSMN (точка K – середина ребра SM). Плоскость LMP пересекает грань SMN по другой медиане MP. Пусть A – точка пересечения медиан ΔSMN (A принадлежит и третьей медиане – апофеме SF) $\Rightarrow LA$ – искомая прямая, пересекающая прямую KE в точке B.

Далее: $\Delta KAB \sim \Delta NAL$, $\dfrac{KA}{AN} = \dfrac{1}{2}$ (по свойству медианы NK) $\Rightarrow \dfrac{AB}{LA} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow AB = \dfrac{1}{2}LA$. По условию $LM = 2$, $SL = 6$, тогда LA находим в известном ΔSFL: $AF = \dfrac{1}{3}SF = \dfrac{1}{3}\sqrt{SN^2 - FN^2} = \dfrac{1}{3}\sqrt{35}$ (SF – медиана ΔSMN), $LF = \sqrt{3}$, $\cos\angle SFL = \dfrac{1}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{35}}$ (по теореме косинусов в ΔSFL) $\Rightarrow LA = \dfrac{2\sqrt{14}}{3}$ (по теореме косинусов в ΔAFL) $\Rightarrow AB = \sqrt{14}/3$.

Вариант 7

1. 2; 3. **2.** $\dfrac{\pi}{6}(2n+1)$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **3.** $(1; 3)$. **4.** $(2a, a)$, $(-2a, -a)$.

5. 2 или 4. *Указание.* Рассмотрите три возможных случая расположения точки D на окружности (между A и B, между B и C и между C и A).

6. $(54; 60)$, $(54; 63)$, $(55; 60)$, $(56; 63)$. *Указание.* Поскольку $l - k \geq 5$ и $k + l \leq 119$, получим, что $k \leq 57$. Осталось рассмотреть случаи $k = 54$, $k = 55$, $k = 56$, $k = 57$.

7. 12:13, 220 : 1911. Пусть $\dfrac{SD_1}{SD} = x$, а $V_{SABCD} = 1$. Тогда

$$V_{SABC} = V_{SBCD} = V_{SCDA} = V_{SDAB} = \frac{1}{2},$$

$$V_{SA_1B_1C_1} = \frac{3}{7}\cdot\frac{2}{7}\cdot\frac{4}{9}V_{SABC} = \frac{3}{7}\cdot\frac{2}{7}\cdot\frac{4}{9}\cdot\frac{1}{2},$$

$$V_{SB_1C_1D_1} = \frac{2}{7}\cdot\frac{4}{9}\cdot x\cdot V_{SBCD} = \frac{2}{7}\cdot\frac{4}{9}\cdot x\cdot\frac{1}{2},$$

$$V_{SC_1D_1A_1} = \frac{4}{9}\cdot x\cdot\frac{3}{7}V_{SCDA} = \frac{4}{9}\cdot x\cdot\frac{3}{7}\cdot\frac{1}{2},$$

$$V_{SD_1A_1B_1} = x\cdot\frac{3}{7}\cdot\frac{2}{7}V_{SDAB} = x\cdot\frac{3}{7}\cdot\frac{2}{7}\cdot\frac{1}{2}.$$

Имеем

$$V_{SA_1B_1C_1} + V_{SC_1D_1A_1} = V_{SA_1B_1C_1D_1} = V_{SB_1C_1D_1} + V_{SD_1A_1B_1},$$

откуда

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{7}\cdot\frac{4}{9}\left(\frac{2}{7} + x\right) = \frac{1}{2}\cdot x\cdot\frac{2}{7}\left(\frac{4}{9} + \frac{3}{7}\right),$$

т.е. $x = \dfrac{12}{13}$, $V_{SA_1B_1C_1D_1} = \dfrac{220}{1911}$.

Вариант 8

1. $(-\infty; -1] \cup (1; 2) \cup [4; +\infty)$. **2.** πn, $n \in \boldsymbol{Z}$.

3. $\left(5^{2\sqrt{\frac{7}{3}}}; +\infty\right)$. **4.** $14/3$.

5. $2\sqrt{\dfrac{2}{11}}$. *Указание.* Пусть D – точка пересечения секущей плоскости с прямой E_1E. Найдите объем пирамиды $ADEF$, площадь треугольника ADF, а затем высоту пирамиды ADF, опущенную из вершины E.

6. $(1; 2)$, $(-1; -2)$, $\left(\pm\dfrac{7}{\sqrt{31}}; \mp\dfrac{4}{\sqrt{31}}\right)$.

Указание. Перепишем уравнение так: $f(x) + A^2 = Bg(x)$, где $f(x) = \sqrt{\cos x}$, $A = a^2 - ab + b^2 - 3$, $B = 4a^2 - 4 - b^2 + 2ab$, $g(x) = (x+1)\cdot 2^x$.

Функция $\sqrt{\cos x}$ четная, а $g(x)$ такова, что $g(x) \neq g(-x)$ при любом $x > 0$. Существование решений, удовлетворяющих условию, означает, что имеет решение система

$$\begin{cases} f(x) + A^2 = Bg(x), \\ f(-x) + A^2 = Bg(-x). \end{cases}$$

Но тогда $B\big(g(x) - g(-x)\big) = 0$, т.е. $B = 0$, а значит, и $A = 0$. Осталось решить полученную систему относительно a и b.

Вариант 9

1. $\dfrac{3 \pm \sqrt{13}}{2}$. **2.** $\dfrac{\pi}{2}(2n+1)$, $\dfrac{\pi}{10}(2n+1)$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

3. $\dfrac{15}{2}\sqrt{2}$. **4.** $(-\infty; 0) \cup \left[\log_2\dfrac{9+\sqrt{13}}{2}; +\infty\right)$.

5. $\frac{3}{2}\left(\sqrt{5}-1\right)$. *Указание.* Пусть x – боковое ребро, α – угол наклона его к плоскости основания пирамиды, R – радиус вписанного шара. Проведя сечение пирамиды через боковое ребро и высоту, найдите из теоремы синусов для полученного в сечении треугольника, что $x = 2\sqrt{3}$. Радиус вписанного шара равен радиусу окружности, вписанной в треугольник, являющийся сечением пирамиды плоскостью, проходящей через ее апофему и высоту.

Вариант 10

1. $y_{\max} = 9$, $y_{\min} = -\frac{9}{8}$. **2.** $-\frac{1}{2}$. **3.** –4.

4. $\left(\log_2 \frac{3}{2}; 1\right]$. **5.** 0, $3\pi/4$. **6.** 8, $\sqrt{2}$, $7\sqrt{2}$.

7. $(-2; -8)$. *Указание.* Абсцисса x_0 центра симметрии графика функции должна быть центром симметрии ее области определения. Таким образом, центром симметрии может быть только точка $\left(x_0, y\left(x_0\right)\right)$, что необходимо проверить.

Вариант 11

1. $\{-2\} \cup \{2\} \cup (3; +\infty)$. **2.** $\frac{\pi}{3}(6n \pm 1)$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

3. а) 60 км; б) 195/2 км. *Указание.* Пусть l_1 – длина первой дороги, l_2 – длина второй дороги, s – расстояние от A до переправы. Тогда

$$\begin{cases} \frac{s}{60} + \frac{1}{2} \ge \frac{l_1 - s}{20}, \\ \frac{l_1 - s}{60} + \frac{l_2}{60} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} + \frac{s}{20}, \\ \frac{l_2}{60} = \frac{l_1}{60} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}. \end{cases}$$

а) Из последнего уравнения сразу следует, что $l_2 - l_1 = 60$ км.
б) Складывая неравенство со вторым уравнением, получим

$$\frac{l_2}{60} + \frac{1}{4} \ge \frac{l_1}{30},$$

а с учетом третьего уравнения имеем $l_1 \le 75$.
Дополнительное условие дает еще одно уравнение:

$$\frac{1}{2} + \frac{s}{20} = t + \frac{1}{2} + \frac{s}{60},$$

т.е. $t = \frac{s}{30}$, где t – время, затраченное автомобилем на путь от переправы до пункта B и обратно, плюс время ожидания им парома. Поскольку автомобиль отправился в B от переправы одновременно с отплытием парома, а паром появляется на берегу через каждый час, то t – натуральное число, не меньшее чем $2\frac{l_1 - s}{60} = \frac{l_1 - s}{30} < \frac{l_1}{30} \le \frac{75}{30} = \frac{5}{2}$ и ближайшее к этому числу, т.е. $t \le 3$. Убедитесь, что $t \ne 3$, $t \ne 2$. Остается единственная возможность $t = 1$, но тогда $s = 30$. Осталось найти l_2, пользуясь вторым уравнением системы и результатом пункта *а*.

4. а) 12; б) $\frac{5}{2}$. *Указание.* Докажите, что $KLMN$ – параллелограмм, а $AB \parallel NL \parallel CD$, так что $ABCD$ – трапеция с основаниями AB и CD и средней линией LN.

5. 2, 16/3. *Указание.* Заметим, что $|t-a| + |a+1-t| \ge 1$ при любом t, причем равенство возможно лишь при $a \le t \le a+1$. Поэтому данная система равносильна такой:

$$\begin{cases} |x-a| + |a+1-x| = 1, \\ |y-a| + |a+1-y| = 1, \\ y + 2|x-5| = 6. \end{cases}$$

Последняя система имеет единственное решение тогда и только тогда, когда имеет единственное решение система

$$\begin{cases} a \le x \le a+1, \\ \frac{5-a}{2} \le |x-5| \le \frac{6-a}{2}. \end{cases}$$

Рассмотрите случаи $5 \le a \le 6$ и $a < 5$.

6. 30103. *Указание.* Докажите, что $a_n = 2^{10}\left(2^{n-1} - 1\right)$, так что $a_{99991} = 2^{100000} - 2^{10}$.
Число цифр в десятичной записи натурального числа n совпадает с числом $[\lg n] + 1$. Оцените $\left[\lg a_{99991}\right]$.

Вариант 12

1. $\left[-\sqrt{5}; 2\right)$. **2.** –1; 1/2. **3.** $\{-21\} \cup [0; 21]$. **4.** $\operatorname{arctg} 3$; 10.

5. $[1; 2)$. **6.** $\frac{1}{9}$, $m = 3$.

7. $\left(\frac{\pi}{4} + 2\pi m; \frac{3\pi}{4} + 2\pi k\right)$, $\left(-\frac{\pi}{4} + 2\pi m; \frac{\pi}{4} + 2\pi k\right)$, $k, m \in \boldsymbol{Z}$.
Указание. Из системы следует, что $\sin x = -\cos y$, т.е. либо $x + y = \frac{3\pi}{2} + 2\pi n$, что невозможно, либо $x - y = \frac{3\pi}{2} + 2\pi n$. Теперь из второго уравнения получаем $\sqrt{2}\cos y = \sin 2y$.

8. 1. *Указание.* Плоскость ABC пересекает сферу по окружности, вписанной в ΔABC.
Пусть D – середина ребра BC, а K – точка касания ребра AC со сферой. Поскольку SAD – плоскость симметрии данной пирамиды, центр шара O принадлежит этой плоскости. Таким образом, искомым радиусом шара является радиус R окружности, проходящей через точки D, K и E (рис.17).

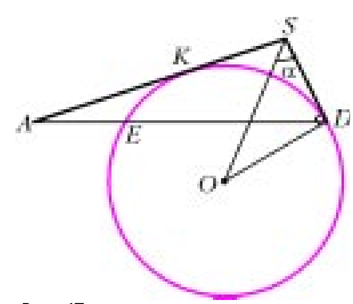

Рис. 17

Далее воспользуйтесь тем, что $AK^2 = AE \cdot AD$, и найдите $SD = KS$, угол α и OD.

Вариант 13

1. $(-\infty; -5] \cup \left[\frac{9}{7}; +\infty\right)$. **2.** $(-1)^n \frac{\pi}{18} + \frac{\pi n}{3}$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

3. –4. *Указание.* Приведите уравнение к виду

$$(x+4)\left(x^2+4\right) = -\left(2^{\frac{x+4}{2}} + 5\right)\left(2^{\frac{x+4}{2}} - 1\right).$$

При $x = -4$ равенство справедливо, а при $x \ne -4$ левая и правая части имеют разные знаки.

4. а) 6; б) $3\sqrt{5}$. *Указание.* Докажите, что точки A, B и H лежат на одной прямой.

5. 58,5 мин.

6. а) $(\pm 1; 3)$; б) $0 < y < \frac{x^2}{12}$ при $x > 0$ и $-\frac{x^2}{12} < y < 0$ при $x < 0$.

Вариант 14

1. $\frac{1}{\sqrt{3}}$. **2.** $\left\{\frac{5}{4}; \frac{3}{2}\right\}$. *Указание.* Исходное неравенство преобразуется к следующему виду:

$$\sin^2 4\pi x \cdot \left(1 - \log_3\left(11x - 4x^2 - 7\right)\right) \le 0.$$

3. 9/2. По свойству отрезков секущих (рис.18), $AC \cdot PC = BC \cdot QC$, откуда $PC = QC$. Следовательно, $PQ \parallel AB$, по-

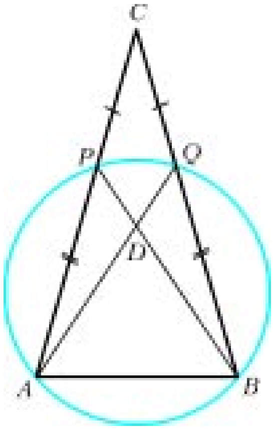

Рис. 18

этому $APQB$ – равнобокая трапеция. Из подобий $\Delta CPQ \sim \Delta CAB$ и $\Delta PQD \sim \Delta BAD$ следует равенство

$$\frac{CQ}{CB} = \frac{PQ}{AB} = \frac{QD}{AD} = \frac{AQ - AD}{AD} = \frac{1}{3}.$$

Отношение площадей треугольников PBQ и PCQ равно

$$\frac{S_{PQB}}{S_{PCQ}} = \frac{BQ}{CQ} = \frac{BC}{CQ} - 1 = 2,$$

так что $S_{PQB} = 2 \cdot S_{PCQ} = 6$.
Аналогично,

$$\frac{S_{QDB}}{S_{PQB}} = \frac{3}{4},$$

поэтому $S_{QBD} = \frac{3}{4} \cdot S_{PQB} = \frac{9}{2}$.

4. $\left(-\frac{5}{2}; -2\right) \cup (2; 3]$.

5. 17100 рублей. Пусть x – количество перевозимых джипов, y – количество грузовиков. Тогда

$$\begin{cases} 3x + 5y \le 109, \\ y \ge \frac{6x}{5}, \end{cases}$$

где $x, y \in \boldsymbol{N}$. Требуется найти максимум функции $s = 6x + 7y$.

Поскольку $x = \frac{s - 7y}{6}$, преобразуем исходную систему:

$$\begin{cases} 3\frac{s-7y}{6} + 5y \le 109, \\ y \ge \frac{6}{5}\frac{s-7y}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{s}{12} \le y \le \frac{218 - s}{3}.$$

Отсюда $s \le 174{,}4$, т.е. $s \le 174$.

При $s = 174$ из неравенства получим $14\frac{1}{2} \le y \le 14\frac{2}{3}$, т.е. целых решений нет. Тот же результат дает проверка для $s = 173$, $s = 172$. Наконец, для $s = 171$ аналогичные рассуждения приводят к целым числам $y = 15$ и $x = \frac{171 - 105}{6} = 11$.

6. −14. Из неравенства между средним арифметическим и средним геометрическим получаем

$$16\sin^2\frac{2x}{7} + 9\operatorname{ctg}^2\frac{2x}{7} =$$

$$= 16\sin^2\frac{2x}{7} + \frac{9}{\sin^2\frac{2x}{7}} - 9 \ge 2\sqrt{16\sin^2\frac{2x}{7} \cdot \frac{9}{\sin^2\frac{2x}{7}}} - 9 = 15.$$

Равенство здесь достигается при условии

$$16\sin^2\frac{2x}{7} = \frac{9}{\sin^2\frac{2x}{7}} \Leftrightarrow \sin^2\frac{2x}{7} = \frac{3}{4}. \qquad (*)$$

Таким образом,

$$w = 4\sin^2 y - 16\sin^2\frac{2x}{7} - 9\operatorname{ctg}^2\frac{2x}{7} \le 4\sin^2 y - 15.$$

Рассмотрим второе уравнение системы при $y \ne 0$. После деления на $\pi^2 y^2$ и замены $t = \sin 3x$, $|t| \le 1$, имеем

$$g(t) \equiv t^2 + 2\left(1 + \frac{1}{y^2}\right)t + \frac{72 + \pi^2}{\pi^2} = 0.$$

Поскольку вершина параболы – графика $g(t)$ – имеет абсциссу $t_0 = -\left(1 + \frac{1}{y^2}\right) < -1$, условие существования корня $g(t)$ на отрезке $[-1; 1]$ (единственного на этом множестве) записывается в виде

$$\begin{cases} g(-1) \le 0, \\ g(1) \ge 0 \end{cases}$$

и приводит к ограничению $|y| \le \frac{\pi}{6}$.

Тогда $4\sin^2 y \le 1$, причем равенство достигается при $|y| = \frac{\pi}{6}$, и полученная выше оценка для w дает $\max w \le -14$.

Покажем, что этот максимум равен −14. При $y = \pm\frac{\pi}{6}$ квадратный трехчлен

$$g(t) = (t+1)^2 + \frac{72}{\pi^2}(t+1)$$

имеет корень $t = -1$. Отсюда

$$\sin 3x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{3}, \ k \in \boldsymbol{Z}.$$

Осталось заметить, что среди найденных значений x есть такие, при которых выполняется равенство (*). Например, если $k = 2$, то $x_* = \frac{7\pi}{6}$.

7. $1/6$. Центр O пятого шара равноудален от центров шаров, касающихся боковых граней пирамиды $SABC$ с вершиной S и, следовательно, лежит на высоте SH этой пирамиды.

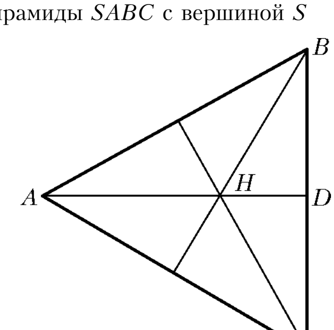

Рис.19

Пусть D – середина BC, E – точка касания шара и боковой грани SBC. В точке H пересекаются медианы равностороннего треугольника ABC – основания пирамиды (рис.19), поэтому

$$HD = \frac{1}{3}AD = \frac{1}{3}a\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Рассмотрим сечение SAD (рис.20). Обозначим через O_1 и O_2 центры шаров, касающихся основания и боковой грани соответственно. Из прямоугольного треугольника SHD

$$SD = \sqrt{SH^2 + HD^2} = \frac{3\sqrt{5}}{4}.$$

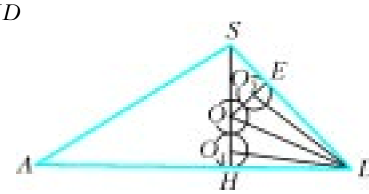

Рис.20

Согласно условию задачи,

$$ED = \frac{2}{3}SD = \frac{\sqrt{5}}{2}, \text{ откуда}$$

$HD = ED$. Поэтому прямоугольные треугольники O_1HD и O_2ED равны. Следовательно, $\angle O_1DH = \angle O_2DE$, $O_1D = O_2D$ и равны треугольники OO_1D и OO_2D. Значит, $\angle O_1DO = \angle O_2DO$. Но тогда $\angle HDO = \angle EDO$, и мы получаем равенство треугольников OHD и OED (по двум сторонам и углу). Отсюда следует $OE \perp SD$, так что точки O, O_2 и E лежат на одной прямой.

Теперь по свойству биссектрисы OD в треугольнике SHD имеем

$$\frac{SO}{OH} = \frac{SD}{HD} = \frac{3}{2}, \text{ откуда } OH = \frac{2}{5}SH = \frac{1}{2}.$$

С другой стороны, $OH = 3r$. Поэтому $r = 1/6$.

Вариант 15

1. $[0; 1) \cup (1; +\infty)$. **2.** $\frac{\pi}{4} + 2\pi n, \ n \in \boldsymbol{Z}$.

3. $(26; -6); (-9; 29)$. *Указание.* После замены $u = \sqrt[3]{x+1}$,

$v = \sqrt[3]{y-2}$ переходим к системе

$$\begin{cases} u+v=1, \\ u^3+v^3=19. \end{cases}$$

4. 32.

5. 8 ч 15 мин. Занумеруем четыре позиции табло слева направо. В первой позиции цифра 3 не появляется никогда. Во второй позиции цифра 4 присутствует в течение трех полных часов, начинающихся с 03:00, 13:00 и 23:00. Остается 21 час, в течение каждого из которых цифра 3 по одному разу занимает третью позицию табло в течение 10 минут, а в течение остальных 50 минут каждого часа 5 раз ровно по 1 минуте занимает последнюю, четвертую, позицию табло. В результате общее время присутствия цифры 3 на табло равно

3 ч $+ 21 \times 10$ мин $+ 21 \times 5 \times 1$ мин $= 8$ ч 15 мин.

6. $(9; 9)$. *Указание.* Уравнение равносильно такому:

$$m = k + 2 - \frac{42}{2k+3}.$$

Следовательно, число $2k+3$ – делитель 42. Так что знаменатель может принимать только три значения: 3, 7, 21.

7. 10. Пусть $x = 2\cos t$, $y = 4\sin t$. Тогда выражение $u = 3x - 2y$ приводится к виду

$$u = 6\cos t - 8\sin t = 10\left(\frac{3}{5}\cos t - \frac{4}{5}\sin t\right) = 10\sin(\varphi - t),$$

где $\varphi = \arcsin\frac{3}{5}$.

Максимальное значение u равно 10, оно достигается, например, при $t = \varphi - \frac{\pi}{2}$.

8. $[-4; 1] \cup (3; 4]$. Если $p > 2$, то из исходного неравенства получается линейное неравенство

$$(p-1)x + p - 3 > 0.$$

По условию оно должно выполняться при любых $x \ge 0$, в частности при $x = 0$. Отсюда $p > 3$. С другой стороны, ясно, что при $p > 3$ неравенство действительно справедливо для всех $x \ge 0$. Таким образом, $3 < p \le 4$.

Очевидно, при $p = 2$ исходное неравенство не выполнено ни для каких значений x.

При $p < 2$ неравенство принимает вид $(p-1)x + p - 3 < 0$. Если $p > 1$, линейная функция $f(x) = (p-1)x + p - 3$ возрастает, поэтому для всех $x \ge 0$ неравенство $f(x) < 0$ выполняться не может. Если $p = 1$, то $f(x) = p - 3 = -2 < 0$ для всех x, в том числе и для $x \ge 0$.

Наконец, для $p < 1$ линейная функция $f(x) = (p-1)x + p - 3$ убывает и при $x = 0$ принимает значение $f(0) = p - 3 < 0$. Значит, при $x \ge 0$ неравенство тем более выполняется.

Вариант 16

1. $\log_2\left(6+\sqrt{37}\right)$. **2.** $[-1; 2) \cup (5; 6] \cup (8; +\infty)$.

3. $\frac{\pi}{2} + \pi n$, $\frac{5\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; $\frac{5\pi}{6}$.

4. $\arcsin\frac{5}{6}$; $\frac{225}{16\sqrt{11}}$. **5.** 0; 1.

Вариант 17

1. $(-\infty; -5)$. **2.** $\pi n, -\frac{\pi}{2} + \pi k, n, k \in \boldsymbol{Z}$.

3. $(0;0;0)$; $(2;2;2)$; $(2;-2;-2)$; $(-2;2;-2)$; $(-2;-2;2)$.

Указание. Вычитая первое уравнение системы из второго, а затем из третьего, переходим к равносильной системе

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = xyz, \\ z^2 - x^2 = 0, \\ z^2 - y^2 = 0. \end{cases}$$

4. $\log_2\left(8 \pm \sqrt{63}\right)$. *Указание.* После преобразований введите новую переменную $t = \log_2\left(2^{2x}+1\right) - x$.

5. $\dfrac{3\pi\left(3+\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{6}\right)}{7\pi - 6\left(\sqrt{3}+1\right)}$.

6. $\frac{4201}{3600} \pm \frac{\sqrt{601}}{30}$. *Указание.* Данная система преобразуется к виду

$$\begin{cases} (x+1)^2 + (y+2)^2 = 25, \\ z^2 + (w-1)^2 = 144, \\ (x+1)(w-1) + z(y+2) \ge 60. \end{cases}$$

Существуют такие углы φ и ψ, что $x+1 = 5\cos\varphi$, $y+2 = 5\sin\varphi$, $z = 12\cos\psi$, $w-1 = 12\sin\psi$.

После замены переменных в неравенстве системы получим $\sin(\varphi+\psi) \ge 1$, т.е. $\varphi + \psi = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$. Сумма, которую требуется оценить, записывается так:

$$A = \frac{y^2}{25} + \frac{w^2}{144} = \frac{4201}{3600} + \frac{1}{6}\cos\varphi - \frac{4}{5}\sin\varphi.$$

Но тогда

$$\frac{1}{6}\cos\varphi - \frac{4}{5}\sin\varphi = \frac{\sqrt{601}}{30}\cos(\varphi+\alpha), \text{ где } \alpha = \arccos\frac{1}{6}.$$

Вариант 18

1. $[-5; -3]$. **2.** $\pm\frac{\pi}{9} + \frac{\pi k}{3}$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

3. Выросла на $\frac{500}{9}\%$.

4. $\frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{19}}$. *Указание.* Найдите угол AOC. Искомый радиус – высота треугольника AOC.

5. $2\sqrt{3}$, $2\sqrt{3}$, $2\sqrt{3}$.

6. См. рис.21; $(0; 2c]$.

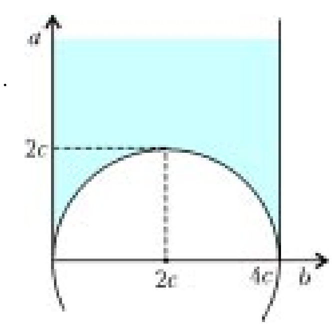

Рис.21

Вариант 19

1. 10. **2.** $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$, $k \in \boldsymbol{Z}$. **3.** 5.

4. 2445 долларов. *Указание.* Пусть m – число мужчин, согласившихся с предложением компании, n – число мужчин, отказавшихся от предложения компании, w – число женщин. Из условия получаем систему

$$\begin{cases} m + n + w = 350, \\ 20m + 16{,}3w = 5705, \\ m, n, w \in \boldsymbol{N}, \end{cases}$$

откуда $37m = 163n$. Единственно возможными являются значения $m = 163$, $n = 37$.

5. $\left(-\frac{5}{3}; -1\right] \cup [2; 3)$. *Указание.*

$$\min\left(\log_3(3x+5), \sqrt{x^2-x-2}\right) < 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sqrt{x^2-x-2} < 2, \\ 3x+5 > 0, \end{cases} \\ \begin{cases} x^2 - x - 2 \ge 0, \\ \log_3(3x+5) < 2. \end{cases} \end{array}\right.$$

6. Четыре. Например, это гири массой 1, 3, 9, 27 кг. Легко проверить, что с помощью четырех гирь, имеющих массу 1, 3, 9, 27 кг, можно взвесить любой груз весом от 1 до 39 кг, если гири класть не только на свободную чашку весов, но и на чашку с грузом.

Докажем, что нельзя обойтись тремя гирями, масса которых соответственно A, B и C, где $A \le B \le C$. Действительно, с помощью трех таких гирь можно взвесить не более 14 различных грузов массой: A, B, C, $A + B$, $A + C$, $B + C$, $B - A$, $C - A$, $C - B$, $A + B + C$, $C + B - A$, $C + A - B$, $A + B - C$, $C - B - A$.

7. $2\sqrt{65}$. Заметим, что $x \ne 0$ и $y \ne 0$ и если пара (x_0, y_0) является решением данного уравнения, то и пары $(-x_0, y_0)$, $(-x_0, -y_0)$, $(x_0, -y_0)$ также являются его решениями. Поскольку по условию x и y – целые числа, из равенства

$$4x^2 - y^2 = 15 \Leftrightarrow (2x + y)(2x - y) = 15$$

следует, что оба множителя в левой части последнего уравнения являются делителями числа 15.

В силу сделанного выше замечания достаточно рассмотреть $x, y \in \boldsymbol{N}$. Для таких чисел $2x + y > 2x - y > 0$, поэтому приходим к двум системам:

$$\begin{cases} 2x + y = 15, \\ 2x - y = 1 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} 2x + y = 5, \\ 2x - y = 3. \end{cases}$$

Отсюда получаем

$$\begin{cases} x = 4, \\ y = 7 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} x = 2, \\ y = 1. \end{cases}$$

Всего же исходное уравнение имеет восемь целочисленных решений, они задаются парами $(\pm 4, \pm 7)$, $(\pm 2, \pm 1)$ со всевозможными сочетаниями знаков. Среди соответствующих точек на координатной плоскости Oxy наиболее удалены друг от друга точки $(4, 7)$ и $(-4, -7)$ либо $(-4, 7)$ и $(4, -7)$.

Физика

Физический факультет

1. Будем, как это обычно и делается при решении подобных задач, считать пластину твердым телом. По условию задачи тангенс угла α между вектором скорости $\vec{v}$ вершины C и стороной квадрата CD (рис.22, 23) равен 0,5, а пластина движется по плоскости. Следовательно, скорости всех точек пла-

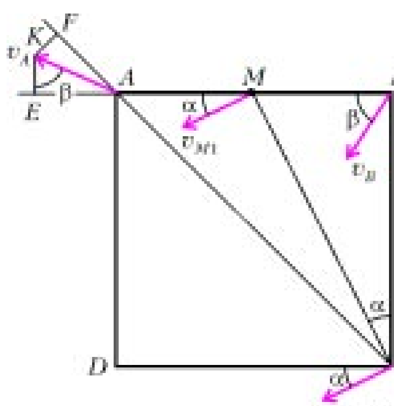

Рис.22

стины параллельны плоскости, угол BCM равен α и скорость вершины C перпендикулярна прямой MC. Кроме того, так как длина прямой MC должна быть неизменной, то искомая скорость $\vec{v}_M$ перпендикулярна прямой MC и образует со стороной AB угол α.

Пусть вектор скорости $\vec{v}_B$ вершины B образует со стороной AB угол β. Поскольку $BC = \text{const}$, вектор $\vec{v}_B$ может быть направлен только так, как показано на рисунках 22 и 23, причем в обоих случаях $v \sin\alpha = v_B \sin\beta$ и $0 < \beta < \pi/2$.

По условию задачи скорости вершин A и B взаимно перпендикулярны, поэтому угол AKE между прямой AK и перпенди-

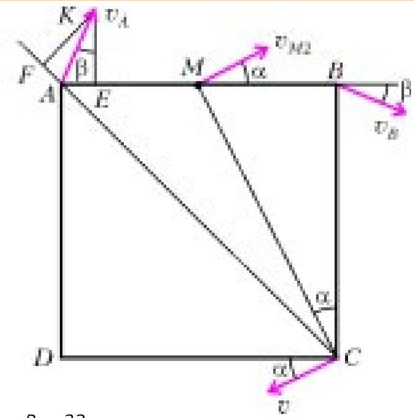

Рис.23

куляром KE, опущенным из конца вектора скорости вершины A на сторону AB, равен β. Поскольку $AM = MB = \text{const}$, то $v_A \sin\beta = v_B \cos\beta = v_M \cos\alpha$.

Учитывая, что проекции скоростей вершин A и C на соединяющую их прямую AC должны быть одинаковыми ($AC = \text{const}$), а угол FAK в первом случае $\beta - \pi/4$, а во втором случае $\beta + \pi/4$, получаем

$$v_A \cos(\beta \mp \pi/4) = v \cos(\alpha + \pi/4).$$

Поскольку $\sin\alpha = 1/\sqrt{5}$, а $\cos\alpha = 2/\sqrt{5}$, из предыдущих соотношений следует, что

$$v_A = v_B \frac{\cos\beta}{\sin\beta} = v \frac{\cos\beta}{\sqrt{5}\sin^2\beta} = v \frac{1}{\sqrt{5}(\cos\beta \pm \sin\beta)},$$

а потому

$$\cos^2\beta \pm \cos\beta\sin\beta = \sin^2\beta, \text{ или } \operatorname{tg}^2\beta \mp \operatorname{tg}\beta - 1 = 0.$$

Решая последнее уравнение, получаем

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{\sqrt{5} \pm 1}{2}, \text{ и } v_M = \frac{v}{2\operatorname{tg}\beta} = \frac{\sqrt{5} \mp 1}{4} v.$$

Решение этой задачи можно существенно упростить, если воспользоваться понятием мгновенной оси вращения.

По условию задачи скорости разных точек пластины компланарны, но не параллельны друг другу, следовательно, движение пластины можно представить как сумму вращательного движения вокруг некоторой оси, перпендикулярной горизонтальной плоскости, по которой движется пластина, и движения этой оси с некоторой скоростью, параллельной указанной плоскости. Поэтому если в качестве оси вращения выбрать так называемую мгновенную ось вращения (ось, скорость которой в данный момент времени равна нулю), то величина линейной скорости произвольной точки пластины будет равна произведению угловой скорости на радиус вращения данной точки и направлена перпендикулярно этому радиусу. Из сказанного следует, что мгновенная ось вращения должна проходить через точку пересечения перпендикуляров к векторам скоростей точек пластины, лежащих в одной горизонтальной плоскости. Поскольку скорости вершин A и B взаимно перпендикулярны, то и перпендикуляры к этим скоростям должны пересекаться под прямым углом, следовательно, точка пересечения этих перпендикуляров должна совпадать с одной из точек окружности, диаметром которой является сторона AB. На рисунке 24 пунктирной линией показан перпендикуляр к вектору скорости точки C. Видно, что этот перпендикуляр пересекает построенную окружность в двух точках. Таким образом, мгновенная ось вращения проходит либо через точку O_1, либо через точку O_2, а угловая скорость вращения квадрата равна либо $\omega_1 = v/O_1C$, либо $\omega_2 = v/O_2C$.

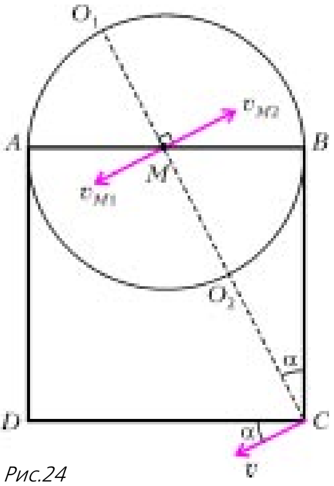

Рис.24

Пусть длина стороны квадрата равна $2a$. По условию задачи, вектор $\vec{v}$ скорости вершины C образует с вектором $\overline{CD}$ такой угол α, что $\operatorname{tg}\alpha = 0{,}5$, поэтому перпендикуляр к $\vec{v}$ пересекает сторону AB в точке M (эта точка совпадает с серединой стороны AB). Тогда $MC = 2a/\cos\alpha = \sqrt{5}a$, $O_1C = MC + a$ и $O_2C = MC - a$. Следовательно, линейная скорость точки M направлена перпендикулярно отрезку MC, а ее величина равна

$$v_{M_1} = \frac{v}{\sqrt{5}+1} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}v \text{ либо } v_{M_2} = \frac{v}{\sqrt{5}-1} = \frac{\sqrt{5}+1}{4}v,$$

что совпадает с полученным ранее результатом.

2. Как обычно, будем считать систему отсчета, неподвижную относительно дороги, инерциальной. Поскольку автомобиль движется по горизонтальному участку дороги и все его колеса являются ведущими, то вне зависимости от положения центра тяжести автомобиля его сила тяги и тангенциальная составляющая силы реакции дороги, называемая обычно силой сухого трения, должны быть связаны соотношением $F_т \le \mu mg$, где g – ускорение свободного падения.

Так как автомобиль движется прямолинейно, его ускорение равно $a(t) = F_т(t)/m$. Считая, что мощность двигателя полностью передается на колеса, можно утверждать, что после включения двигателя колеса некоторое время τ будут скользить по дороге, а потому величина силы тяги будет равна $F_т(t \le \tau) = \mu mg$, т.е. в течение промежутка времени $0 \le t \le \tau$ ускорение автомобиля будет равно μg, а его скорость будет изменяться по закону $v(t) = \mu gt$. Начиная с момента времени

$$t = \tau = \frac{N}{F_т \mu g} = \frac{N}{m\mu^2 g^2},$$

скольжение колес прекратится, а потому величина силы тяги будет удовлетворять условию $F_т(t \ge \tau) \le \mu mg$. Следовательно, приращение кинетической энергии автомобиля должно быть равно работе двигателя, т.е. при $t > \tau$ должно выполняться соотношение

$$(t-\tau)N = \frac{mv^2(t)}{2} - \frac{mv^2(\tau)}{2}.$$

Подставляя в это выражение значения τ и $v(\tau)$, получаем

$$v(t) = \begin{cases} \mu gt & \text{пр, } 0 \le t \le \tau = \dfrac{N}{m\mu^2 g^2}, \\ \sqrt{\dfrac{N}{m}\left(2t - \dfrac{N}{m\mu^2 g^2}\right)} & \text{пр, } \tau \le t \end{cases}$$

3. Будем считать наклонную плоскость неподвижной относительно некоторой инерциальной системы отсчета, а кубик и доску – твердыми телами. Положим, что сила сухого трения скольжения не зависит от относительной скорости движения взаимодействующих тел и равна максимальному значению силы сухого трения покоя между ними. Учитывая, что ось пружины и доски, нить и центр масс кубика лежат в одной вертикальной плоскости, а кубик движется равномерно, можно считать, что доска до обрыва нити покоилась, кубик двигался поступательно, сила натяжения нити была направлена вверх параллельно наклонной плоскости и равна

$$T = mg(\sin\alpha + \mu\cos\alpha),$$

где g – ускорение свободного падения. После обрыва нити кубик будет скользить вверх по доске до тех пор, пока за счет работы силы тяжести и силы трения со стороны доски его скорость не станет равной нулю. Вплоть до этого момента времени ($t = 0$) деформация пружины должна оставаться неизменной, а доска – покоящейся (действующая со стороны кубика на доску сила сухого трения скольжения не изменяется). После остановки кубика не только величина, но и направление силы трения будут изменяться, а потому доска не сможет оставаться неподвижной.

По условию задачи кубик после обрыва нити должен совершать гармонические колебания. Следовательно, механическая энергия кубика, доски и пружины после возникновения колебаний должна оставаться неизменной. Так может быть только в том случае, если кубик остается неподвижным относительно доски. Поэтому уравнения движения кубика и доски в проекции на ось x, направленную вниз параллельно наклонной плоскости, для моментов времени $t > 0$ имеют вид

$$mx'' = mg\sin\alpha - F_{тр}(t), \quad Mx'' = -kx + Mg\sin\alpha + F_{тр}(t),$$

где x'' – проекция ускорения кубика и доски на ось x, начало которой соответствует положению некоторой фиксированной точки доски при недеформированной пружине. Складывая почленно последние два уравнения, получаем

$$(M+m)x'' = (M+m)g\sin\alpha - kx,$$

или

$$(M+m)x_1'' = -kx_1, \text{ где } x_1 = x - \frac{M+m}{k}g\sin\alpha.$$

Решение этого уравнения имеет вид $x_1(t) = -A\cos\omega t$, где амплитуда колебаний A равна модулю разности величин деформаций пружины до обрыва нити и в те моменты, когда после ее обрыва ускорение кубика становится равным нулю:

$$A = \frac{M+m}{k}g\sin\alpha - \frac{M\sin\alpha - \mu m\cos\alpha}{k}g = \frac{T}{k},$$

а угловая частота колебаний равна

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{M+m}}.$$

Из полученных выражений получаем, что ускорение кубика при гармонических колебаниях будет изменяться по закону

$$x'' = x_1'' = A\omega^2\cos\omega t,$$

а потому величина действующей на кубик силы трения со стороны доски будет равна

$$\left|F_{тр}(t)\right| = m\left|x'' + g\sin\alpha\right| = m\left|A\omega^2\cos\omega t + g\sin\alpha\right|.$$

Следовательно, кубик будет совершать гармонические колебания после обрыва нити, если величина силы трения покоя будет не меньше чем $g\sin\alpha + A\omega^2$. Учитывая, что максимальная величина силы сухого трения покоя равна $\mu mg\cos\alpha$, после простых алгебраических преобразований получим, что искомое значение коэффициента трения кубика о доску должно удовлетворять неравенству

$$\mu \ge \left(1 + \frac{2m}{M}\right)\operatorname{tg}\alpha.$$

4. Предположим, что цилиндр покоится относительно лабораторной системы отсчета, и эту систему будем считать инерциальной. Кроме того, будем считать, что изменение температуры гелия происходит так, что поршень перемещается очень медленно и давление во всех точках внутри цилиндра изменяется одинаковым образом. Если гелий после закачки охлаждали (первый случай), то его объем мог только уменьшаться, а поршень двигался к дну цилиндра, преодолевая силу сухого трения. Следовательно, в этом случае давление гелия в цилиндре перед нагреванием не могло быть меньше $p_1 = p_0 - F_{\text{тр}}/S$. Если же газ предварительно нагревали (второй случай), то направление силы сухого трения, действующей на поршень, совпадало с направлением силы атмосферного давления, а потому давление в цилиндре все время оставалось равным $p_2 = p_0 + F_{\text{тр}}/S$. Из сказанного ясно, что в первом случае объем гелия при нагревании не будет изменяться, пока его давление не станет равным p_2. Во втором же случае объем гелия должен начать увеличиваться, как только его стали нагревать, причем давление гелия будет оставаться неизменным и равным p_2.

Пусть абсолютная температура гелия при давлении p_1 и объеме V_0 равна T_1, при давлении p_2 и объеме V_0 равна T_2, а при увеличении объема гелия на величину $S\Delta L$ стала равной T_3. Полагая, что количество молей гелия ν в цилиндре неизменно и в интересующем диапазоне температур и давлений гелий подчиняется уравнению Клапейрона–Менделеева, можно записать

$$p_1V_0 = \nu RT_1,\ \ p_2V_0 = \nu RT_2\ \text{ и }\ p_2\left(V_0 + S\Delta L\right) = \nu RT_3,$$

где R – универсальная газовая постоянная.

Как известно, гелий является одноатомным газом, поэтому его внутренняя энергия при температуре T равна $1{,}5\nu RT$. Поскольку в первом случае гелий надо нагревать от температуры не меньшей T_1 до температуры T_2 изохорически, подводимое к нему количество теплоты будет увеличивать только его внутреннюю энергию:

$$Q_1 = 1{,}5\nu R\left(T_2 - T_1\right).$$

Нагревание же гелия от температуры T_2 до температуры T_3 будет происходить изобарически. Следовательно, будет не только увеличиваться внутренняя энергия гелия, но он еще будет совершать работу по расширению. Поэтому

$$Q_2 = 1{,}5\nu R\left(T_3 - T_2\right) + \nu R\left(T_3 - T_2\right) = 2{,}5\nu R\left(T_3 - T_2\right).$$

Решая совместно приведенные уравнения, получим

$$Q_1 = 3V_0F_{\text{тр}}/S,\ \ Q_2 = 2{,}5\left(p_0S + F_{\text{тр}}\right)\Delta L.$$

Итак, искомое количество теплоты Q, в зависимости от того каким образом объем гелия после закачки его в цилиндр установился равным V_0, должно удовлетворять неравенству

$$2{,}5\left(p_0S + F_{\text{тр}}\right)\Delta L \le Q \le 2{,}5\left(p_0S + F_{\text{тр}}\right)\Delta L + 3V_0F_{\text{тр}}/S.$$

5. При решении задачи будем, как обычно, считать, что поведение гелия и криптона вплоть до точки насыщения подчиняется уравнению Клапейрона–Менделеева, а охлаждение смеси происходит столь медленно, что содержимое цилиндра все время находится в состоянии термодинамического равновесия. Кроме того, будем считать, что в цилиндре существуют такие условия, при которых криптон начинает конденсироваться, как только его парциальное давление становится равным давлению $p_{\text{нк}}$ его насыщенных паров. Отметим, что, поскольку криптон в газообразном состоянии в цилиндре находится при температуре явно ниже критической ($T_{\text{кр к}} \approx 210$ К), его следует называть паром, в то время как гелий ($T_{\text{кр г}} \approx 5$ К) следует называть газом.

Согласно уравнению Клапейрона–Менделеева, плотность ρ_i составляющей смеси, находящейся в газообразном состоянии, ее молярная масса M_i, абсолютная температура T_i и парциальное давление p_i должны удовлетворять уравнению

$$p_i\mathrm{M}_i = \rho_iRT_i,$$

где R – универсальная газовая постоянная. Следовательно,

$$n = \frac{\rho_{\text{к}}}{\rho_{\text{г}}} = \frac{p_{\text{к}}\mathrm{M}_{\text{к}}}{p_{\text{г}}\mathrm{M}_{\text{г}}}.$$

Сумма парциальных давлений гелия и криптона при любой температуре равна внешнему атмосферному давлению p, а потому парциальное давление криптона равно

$$p_{\text{к}}\left(T_i\right) = \frac{np\mathrm{M}_{\text{г}}}{n\mathrm{M}_{\text{г}} + \mathrm{M}_{\text{к}}}\varphi,$$

если $T_i \ge T_2$, где T_2 – абсолютная температура, при которой пары криптона становятся насыщенными.

Так как относительная влажность газопаровой смеси при температуре T_1 равна φ и криптон при нормальном атмосферном давлении кипит при температуре $T_{\text{к}}$, должны выполняться соотношения

$$p_{\text{к}}\left(T_1\right) = \varphi p_{\text{к н}}\left(T_1\right),\ p_{\text{к н}}\left(T_{\text{к}}\right) = p\ \text{ и }\ p_{\text{к}}\left(T_2\right) = p_{\text{к н}}\left(T_2\right),$$

причем

$$p_{\text{к н}}\left(T_i\right) = a + bT_i.$$

Решая совместно приведенные уравнения, получаем

$$\frac{T_1 - T_2}{T_{\text{к}} - T_1} = \frac{n\mathrm{M}_{\text{г}}\left(1-\varphi\right)}{\varphi\mathrm{M}_{\text{к}} - n\mathrm{M}_{\text{г}}\left(1-\varphi\right)}.$$

Следовательно, на стенках цилиндра должна появиться роса, если температуру смеси понизить на

$$\Delta T = T_1 - T_2 = \frac{\left(T_{\text{к}} - T_1\right)\left(1-\varphi\right)n\mathrm{M}_{\text{г}}}{\varphi\mathrm{M}_{\text{к}} - n\mathrm{M}_{\text{г}}\left(1-\varphi\right)} \approx 1\ \text{К}.$$

6. Предположим, что шар покоится относительно некоторой инерциальной системы отсчета, а электрон движется в вакууме, и пренебрежем потерями энергии электрона на излучение (т.е. будем считать, что ускорение электрона достаточно мало). При приближении электрона к шару, в силу явления электростатической индукции, должно происходить перераспределение заряда на шаре. Пусть величина заряда, находящегося на достаточно малом участке поверхности шара, равна Δq_i. По условию задачи шар изолирован, а его заряд равен Q, поэтому в любой момент времени $\sum\Delta q_i$ по всем участкам поверхности шара равна Q.

Будем, как обычно, считать, что потенциал электростатического поля, создаваемого покоящимся точечным зарядом q в бесконечно удаленной от него точке, равен нулю. Тогда потенциал электростатического поля на расстоянии r от точечного заряда будет равен

$$\varphi(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r},$$

где ε_0 – электрическая постоянная. Согласно принципу суперпозиции, потенциал, создаваемый системой точечных зарядов в данной точке, равен сумме потенциалов, создаваемых каждым из этих зарядов порознь в этой точке. Следовательно, потенциал центра шара, обусловленный его избыточным зарядом и точечным зарядом $2Q$, находящимся от центра шара на расстоянии $2R$, равен

$$\varphi = \frac{2Q}{4\pi\varepsilon_0\cdot 2R} + \sum\frac{\Delta q_i}{4\pi\varepsilon_0 R} = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 R}.$$

Таким же будет потенциал и любой точки поверхности шара. Как известно, кулоновское стационарное поле является консервативным. Следовательно, работа сил такого поля над перемещающимся в нем электроном не зависит от вида траектории, а определяется лишь положением начальной и конечной точек. Поскольку заряд электрона отрицателен, электростатическое поле шара и точечного заряда при подлете электрона к шару совершит над электроном положительную работу $A = e\varphi$, где e – модуль заряда электрона. Отсюда на основании закона изменения кинетической энергии следует, что искомая скорость электрона массой m при его подлете к поверхности шара должна удовлетворять неравенству

$$v \le \sqrt{\frac{eQ}{\pi\varepsilon_0 Rm}}.$$

7. Поскольку проводник OA тонкий и вращается с угловой скоростью ω вокруг оси кольца, скорость упорядоченного движения свободных носителей заряда в этом проводнике относительно лабораторной системы отсчета (считаем ее инерциальной) можно представить в виде суммы двух векторов, один из которых перпендикулярен оси проводника, а второй направлен вдоль этой оси. Ясно, что оба эти вектора лежат в вертикальной плоскости, в которой расположено кольцо. Величина перпендикулярной составляющей указанной скорости равна скорости движения той точки проводника, в которой в данный момент находится свободный носитель заряда, т.е. $v_{\perp_i} = \omega r_i$, где r_i – радиус вращения интересующей точки проводника OA. Из-за наличия этой составляющей свободные носители заряда испытывают действие силы Лоренца, равной $F_{\text{Л}\,i} = qv_{\perp_i}B$, эквивалентное действию стороннего электрического поля, величина напряженности которого равна

$$E_1(r_i) = \frac{F_{\text{Л}\,i}}{q} = \omega r_i B.$$

Отсюда видно, что величина напряженности стороннего электрического поля прямо пропорциональна удалению рассматриваемой точки проводника от оси вращения и не зависит от времени (угловая скорость вращения и индукция магнитного поля постоянны). Влияние этого стороннего поля на силу тока в цепи, как обычно, учтем, определив энергетическую характеристику этого поля – его ЭДС. По определению, величина ЭДС равна модулю отношения работы сил стороннего поля над пробным зарядом при его перемещении вдоль рассматриваемого участка цепи к величине этого заряда. Учитывая, что напряженность сторонних сил направлена вдоль оси проводника, получим, что величина ЭДС на достаточно малом участке проводника длиной Δr равна

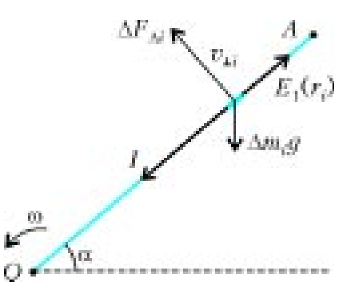

Рис.25

$$\Delta\mathcal{E}_{1i} = \frac{F_{\text{Л}\,i}\Delta r}{q} = \omega B r_i \Delta r = \omega B(\Delta r)^2\, i.$$

Поскольку длина проводника OA равна r, он состоит из $N = r/\Delta r$ таких участков, а потому величина интересующей нас ЭДС равна

$$\mathcal{E}_1 = \lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^{N}\mathcal{E}_{1i} = \omega B \lim_{N\to\infty}\frac{r^2}{N^2}\sum_{i=1}^{N} i = \omega B r^2 \lim_{n\to\infty}\frac{1+N}{2N^2}N = \frac{\omega B r^2}{2}.$$

Наличие продольной составляющей скорости упорядоченного движения носителей заряда, т.е. протекание тока по проводнику, находящемуся в магнитном поле, обуславливает появление сил Ампера. По условию задачи проводник OA вращается с постоянной угловой скоростью относительно инерциальной системы отсчета. Следовательно, суммы действующих на него сил (силы тяжести, реакции оси и силы Ампера) и их моментов относительно любой оси должны быть равны нулю. Чтобы упростить решение задачи, будем рассчитывать действующие на проводник моменты сил относительно оси вращения. В тот момент времени t, когда проводник образует с горизонтальным диаметром кольца угол $\alpha = \omega t$ (рис.25), момент силы тяжести, действующей на малый отрезок проводника длиной Δr, находящийся от оси вращения на расстоянии r_i, равен

$$\Delta M_i = r_i g\Delta m_i\cos\alpha = r_i\frac{gm\cos\alpha}{r}\Delta r = \frac{gm\cos\alpha}{r}i(\Delta r)^2,$$

так как масса такого отрезка равна $\Delta m_i = m\Delta r/r$. Следовательно, общий момент сил тяжести равен

$$M_{\text{т}} = \sum\Delta M_i = \frac{gm\cos\alpha}{r}\lim_{N\to\infty}\frac{r^2}{N^2}\sum_{i=1}^{N} i = \frac{gmr\cos\alpha}{2}.$$

Учитывая, что проводник OA движется в вертикальной плоскости, перпендикулярной линиям индукции магнитного поля, на основании закона Ампера можно утверждать, что на i-й участок проводника длиной Δr действует сила

$$\Delta F_{\text{А}\,i}(t) = I(t)\Delta rB,$$

где $I(t)$ – сила тока, текущего по рассматриваемому участку проводника в момент времени t.

Повторяя почти дословно рассуждения, приведшие к вычислению момента сил тяжести, и учитывая, что сила Ампера направлена перпендикулярно оси проводника и индукции магнитного поля, можно показать, что величина момента сил Ампера, действующих на проводник OA относительно оси вращения, равна

$$M_{\text{А}} = 0{,}5Br^2I(t).$$

Поскольку сумма моментов сил Ампера и сил тяжести относительно оси вращения должна быть равна нулю, сила тока, текущего по проводнику, должна изменяться по закону

$$I(t) = \frac{mg}{Br}\cos\omega t,$$

причем ток этот направлен так, как указано на рисунке. Согласно закону Ома, искомая ЭДС источника напряжения должна быть равна

$$\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_1 + RI(t) = \frac{B\omega r^2}{2} + \frac{Rmg}{Br}\cos\omega t.$$

8. Согласно приведенному в условии графику, в течение промежутков времени $0 \le t \le 2T/3$ и $2T/3 \le t \le T$ проекция вектора индукции однородного внешнего магнитного поля на ось кольца равномерно изменяется на величину $2B_0$. На основании закона электромагнитной индукции можно утверждать, что в течение времени $\tau_1 = 2T/3$ в кольце действуют сторонние электрические силы, величина ЭДС которых равна

$$\mathcal{E}_1 = \pi a^2\frac{2B_0}{\tau_1} = \frac{3\pi a^2B_0}{T},$$

а в оставшуюся часть периода $\tau_2 = T/3$ величина ЭДС индукции равна

$$\mathcal{E}_2 = \pi a^2\frac{2B_0}{\tau_2} = \frac{6\pi a^2B_0}{T}.$$

В соответствии с законом Ома, в течение первой и второй частей периода сила тока в кольце равна, соответственно,

$$I_1 = \frac{\mathcal{E}_1}{R} \text{ и } I_2 = \frac{\mathcal{E}_2}{R},$$

а потому, согласно закону Джоуля–Ленца, в кольце за период должно выделяться количество теплоты

$$Q = \left(I_1^2\tau_1 + I_2^2\tau_2\right)R .$$

Поскольку средняя за период тепловая мощность равна отношению количества теплоты, выделившегося за период, к длительности периода, получаем, что искомая средняя тепловая мощность равна

$$P = \frac{Q}{T} = \frac{18\pi^2 a^4 B_0^2}{RT^2} .$$

9. По условию задачи отношение диаметра b линзы к расстоянию d, на котором находится от нее точечный источник S, существенно меньше единицы, поэтому можно считать, что все лучи от этого источника, проходящие через линзу, образуют с ее главной оптической осью малые углы, т.е. выполняется так называемое параксиальное приближение. Следовательно, все прошедшие сквозь линзу лучи должны пересекаться в одной точке, создавая действительное точечное изображение источника, находящееся, согласно формуле тонкой линзы, на расстоянии

$$f = \frac{d}{dD-1}$$

от ее главной плоскости (мы учли, что источник находится перед линзой на расстоянии d = 30 см, большем ее фокусного расстояния $F = D^{-1} = 20$ см).

После установки пластинки все падающие на линзу лучи, за исключением луча, идущего вдоль главной оптической оси линзы, будут испытывать преломление в пластинке. На рисунке 26 показан ход одного из лучей, образующих с главной оптической осью линзы $Л$ угол α. После преломления на передней грани пластинки этот луч будет распространяться в пластинке под углом β к перпендикуляру, восставленному в точке падения к поверхности пластинки. Учитывая, что пластинка является плоско параллельной и по обе стороны от нее находится одна и та же среда, на основании закона преломления получим, что после прохождения пластинки направление распространения луча не изменится, но он сместится на расстояние δ. Из рисунка видно, что

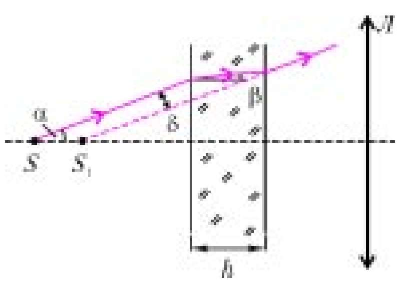

Рис.26

$$\delta = \frac{h}{\cos\beta}\sin(\alpha-\beta) ,$$

при этом точка S_1 пересечения продолжения выходящего из пластинки луча с главной оптической осью линзы сместится к линзе относительно источника S на расстояние

$$SS_1 = \frac{\delta}{\sin\alpha} = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin\alpha\cos\beta}h = (1-\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{tg}\beta)h .$$

Из этого выражения видно, что продолжения лучей, выходящих из источника под разными углами, будут пересекать главную оптическую ось линзы, вообще говоря, в разных точках, а потому изображение источника, формируемого линзой, при наличии перед ней плоскопараллельной пластинки будет представлять собой не точку, а некоторый отрезок прямой. Однако учитывая, что для малых углов $\sin\alpha \approx \operatorname{tg}\alpha \approx \alpha$ и $\sin\beta \approx \operatorname{tg}\beta \approx \alpha/n$, в рассматриваемом случае получим

$$SS_1 = (1-\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{tg}\beta)h \approx (1-\beta/\alpha)h \approx \left(1-n^{-1}\right)h ,$$

т.е. продолжения всех лучей, выходящих из пластинки и попадающих на линзу, пересекаются в одной точке S_1, находящейся перед линзой на расстоянии

$$d_1 = d - SS_1 = d - \left(1-n^{-1}\right)h .$$

Изображение этой точки, согласно формуле тонкой линзы, должно находиться от линзы на расстоянии

$$f_1 = \frac{d_1}{d_1 D - 1} .$$

Таким образом, изображение источника удалится от главной плоскости линзы на расстояние

$$\Delta x = f_1 - f = \frac{(n-1)h}{\left((dD-1)n-(n-1)hD\right)(dD-1)} = 40 \text{ см} .$$

10. Из условия задачи следует, что участок верхней границы жидкости, освещаемый светом, нужно считать горизонтальным, а изменение интенсивности света обусловлено интерференцией световых пучков, отраженных от границ жидкости. На рисунке 27 показан ход двух лучей падающего пучка. Часть луча *1*, испытав преломление на верхней границе жидкости в точке A под углом β, падает на границу жидкость–стекло в точке B и после частичного отражения от стекла, испытав преломление на верхней границе, выходит из жидкости в точке C. Луч *2*, падающий на верхнюю границу жидкости в точке C, испытывает частичное отражение от этой границы. Основываясь на законах отражения и преломления света, можно показать, что выходящая из жидкости часть первого луча и отраженная от верхней границы часть второго луча будут распространяться в одном и том же направлении (под углом α к вертикали) и могут интерферировать.

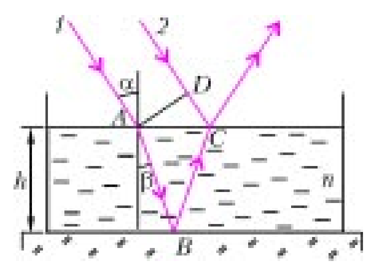

Рис.27

Поскольку налитый слой жидкости тонкий, следует считать, что разность фаз налагающихся лучей не зависит от времени, т.е. эти лучи когерентные. Поэтому в те моменты времени, когда наблюдается максимум интенсивности отраженного света, оптическая разность хода налагающихся лучей должна быть кратна целому числу длин волн λ падающего на поверхность жидкости света. При вычислении разности хода учтем, что при отражении света от оптически более плотной среды происходит «потеря половины длины волны». Если же отражение происходит от оптически менее плотной среды, то указанное явление отсутствует. Следовательно, если показатель n_1 преломления стекла больше n, то разность хода этих лучей равна

$$\delta_1 = AB + BC - CD = \frac{2hn}{\cos\beta} - 2h\operatorname{tg}\beta\sin\alpha = 2h\sqrt{n^2-\sin^2\alpha} ,$$

так как $\sin\alpha = n\sin\beta$. При $n_1 < n$ разность хода составляет

$$\delta_2 = 2h\sqrt{n^2-\sin^2\alpha} - \frac{\lambda}{2} .$$

При максимальной интенсивности $\delta = k\lambda$, где k – порядок интерференционного максимума. Поскольку за время τ толщина слоя уменьшается на $\Delta h = v\tau$, а порядок интерференции уменьшается на единицу, то

$$2v\tau\sqrt{n^2-\sin^2\alpha} = \lambda .$$

Таким образом, средняя скорость уменьшения толщины слоя жидкости вне зависимости от соотношения между показателями преломления жидкости и стекла равна

$$v = \frac{\lambda}{2\tau\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha}}.$$

Факультет вычислительной математики и кибернетики

1. $a_{\min} = \dfrac{v_0}{2\left(\dfrac{H-h}{u} - \dfrac{l}{v_0}\right)} = 0{,}625\ \text{м/с}^2$.

2. $m = \dfrac{\rho S v_0}{g}\left(v_0 \sin\alpha + \sqrt{v_0^2 \sin^2\alpha + 2gh}\right) = 1{,}44$ кг.

3. $a_{\max} = g\dfrac{\sqrt{H(2R-H)}}{R-H} \approx 13{,}1\ \text{м/с}^2$.

4. $\beta = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{1}{2}\operatorname{tg}\alpha\right) = \operatorname{arctg}\dfrac{1}{2} \approx 26°34'$.

5. $p_1 = \dfrac{p_0}{2} - \dfrac{kl}{S} + \sqrt{\dfrac{p_0^2}{4} + \left(\dfrac{kl}{S}\right)^2}$. **6.** $A = \dfrac{3}{20}Q_{23} = 30$ Дж.

7. $n = k = 2$. **8.** $\Delta x = \dfrac{3}{5}\dfrac{\Delta m}{m}x$. **9.** $n = 1 + \dfrac{q^2}{2\varepsilon_0 p_0 S^2}$.

10. $l = \dfrac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 l_0 \mu m g} - l_0$ при $\dfrac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 l_0^2} > \mu m g$, $l = 0$ при $\dfrac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 l_0^2} \le \mu m g$.

11. $\eta = 1 - \dfrac{PR}{\mathcal{E}^2} = 0{,}6$. **12.** $v_{\min} = \sqrt{5gl + \dfrac{q^2B^2l^2}{2m^2}\left(1 + \sqrt{1 + \dfrac{4m^2g}{q^2B^2l}}\right)}$.

13. $R = \dfrac{a}{\sin\dfrac{\pi-\beta}{2} - \sin\dfrac{\pi-\alpha}{2}} = \dfrac{2a}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} \approx 6{,}3$ см.

14. $b \approx a(2n-1) = 2a$. **15.** $R_{\min} = \dfrac{nd}{n-1} = 3$ мм.

16. $\Delta l = l_1 - l_2 = \dfrac{dh(\nu_1 - \nu_2)}{eU} \approx 1$ мм.

Химический факультет

Вариант 1

3. В интервале $0 \le t \le 1$ с. **4.** См. рис.28.
5. Увеличилось бы в 4 раза.

6. $a = \dfrac{F}{m}(\cos\alpha + \mu\sin\alpha) - \mu g \approx 2{,}2\ \text{м/с}^2$.

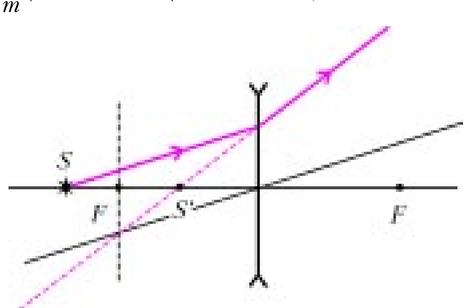

Рис. 28

7. $T = \dfrac{8\pi R}{e}\sqrt{\dfrac{\pi\varepsilon_0 R m}{7}}$. **8.** $A = \dfrac{\rho g a^4}{18} \approx 0{,}06$ Дж.

9. $\Delta U = Q - \dfrac{(p_1+p_2)(V_2-V_1)}{2} = 500$ Дж.

10. $Q_1 = \dfrac{R_1}{R_1+R_2}\dfrac{C\mathcal{E}^2}{2} = 10^{-2}$ Дж.

Вариант 2

3. $Q = \dfrac{I_m^2 RT}{2} = 80$ Дж.
4. Уменьшится в 2 раза.
5. См. рис.29.

6. $N = \dfrac{W\lambda}{hc} \approx 3\cdot 10^{13}$.

7. $v_{\text{ср}} = \dfrac{1+\sqrt{2}}{2}\sqrt{Hg} \approx$
$\approx 12{,}1$ м/с.

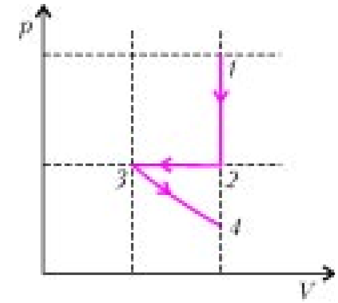

Рис. 29

8. $m_{\text{в}} = \dfrac{m(c_1 t - c_2 t_2 + \lambda)}{c_1(t_1 - t)} \approx 80$ г. **9.** $\Gamma = \dfrac{1}{3}$.

10. $r = R\dfrac{U_2 - U_1}{2U_1 - U_2} = 4$ Ом.

Поправка

В материале «Новый прием в школы-интернаты при университетах» («Квант» №6 за 2004 год) в условие задачи 3 по математике для поступающих в 11 класс вкралась ошибка. Следует читать: «...Точка D на стороне BC такова, что $BD = \dfrac{1}{2}AB$ ...»

КВАНТ

НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ

А.А.Егоров, С.П.Коновалов, А.Ю.Котова, В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан

НОМЕР ОФОРМИЛИ

В.Н.Акатьева, Д.Н.Гришукова, А.Е.Пацхверия, Е.А.Силина, П.И.Чернуский

ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР

Е.В.Морозова

КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА

Е.А.Митченко, Л.В.Калиничева

Журнал «Квант» зарегистрирован в Комитете РФ по печати. Рег. св-во №0110473

Адрес редакции:
119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант»;
тел.: 930-56-48;
e-mail: admin@kvant.info, math@kvant.info, phys@kvant.info

Заказ №
Отпечатано на ГУ РПП, г. Ржев, ул. Урицкого, 91

При участии ЗАО «РИЦ «Техносфера», тел.: (095) 234-01-10