(Начало см. на с. 16)

потребуем, чтобы гипотенуза z была точным квадратом:

$$m^2 + n^2 = g^2, \qquad (2)$$

где g – натуральное число. Прямоугольных треугольников с таким свойством существует бесконечное множество, мы назовем их *подходящими*.

Алгоритм «сборки» эйлеровых треугольников следующий:

1. Возьмем два подходящих треугольника, выбрав нужную пару чисел m_1, n_1; $m_2 n_2$ и рассчитав по ним длины сторон x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2 пифагоровых треугольников по формулам (1). Пропорционально увеличим стороны каждого из этих треугольников: k_1x_1, k_1y_1, k_1z_1; k_2x_2, k_2y_2, k_2z_2 так, чтобы в итоге оказались равными стороны, формируемые четными катетами основных пифагоровых треугольников:

$$k_1y_1 = k_2y_2,$$

или

$$k_1m_1n_1 = k_2m_2n_2, \qquad (3)$$

где k_1, k_2 – некоторые целые числа.

2. «Соберем» новый треугольник, совместив равные катеты двух полученных на предыдущем шаге треугольников. Это можно сделать двояко, как показано на рисунках 1 и 2, на которых итоговый треугольник ABC выделен красным цветом. Стороны a и b окончательного треугольника образованы гипотенузами прямоугольных треугольников, полученных на предыдущем шаге, а третья сторона равна сумме катетов этих треугольни-

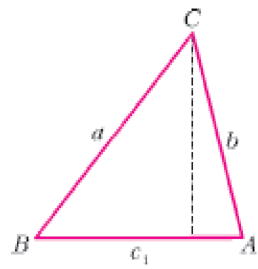

Рис. 1

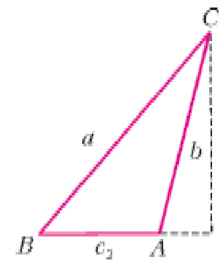

Рис. 2

ков:

$$c_1 = k_1\left(m_1^2 - n_1^2\right) + k_2\left(m_2^2 - n_2^2\right)$$

или их разности:

$$c_2 = k_1\left(m_1^2 - n_1^2\right) - k_2\left(m_2^2 - n_2^2\right).$$

В качестве полезного, но технически громоздкого упражнения предлагаем читателям самостоятельно убедиться в том, что как в одном, так и в другом случае треугольник ABC является эйлеровым, т.е. у него все три биссектрисы выражаются рациональными числами.

Построенные нами треугольники обладают целым букетом и других замечательных свойств. Например, у них не только стороны, но и площадь выражаются целыми числами (такие треугольники по традиции называют героновыми). А отсюда следует, что все три высоты, радиус вписанной и радиус описанной окружностей треугольника ABC выражаются рационально. Наверное, Леонард Эйлер порадовался бы такому результату.

Р.Сарбаш, А.Елизаров

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

КМШ

ЗАДАЧИ

(см.«Квант» №3)

1. Проведем 6 кругов радиуса a с центрами в вершинах аудитории-шестиугольника (рис.1). Каждый студент попадает либо в 2, либо в 3, либо в 6 кругов (точка в центре). Поскольку храпометры в сумме зафиксировали 7 спящих, то двое спящих студентов попали в пересечение двух кругов, а один – в пересечение 3 кругов. Всего на лекции спали 3 студента.

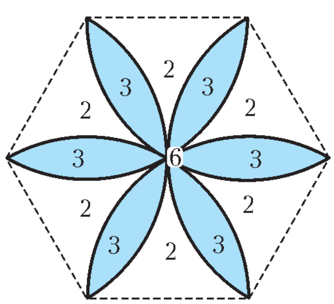

Рис. 1

2. Достаточно доказать, что точка P пересечения диагоналей является серединой какой-либо диагонали четырехугольника (рис.2).

Пусть точка M – середина диагонали BD. Если она не совпадает с точкой P, то площадь треугольника APM равна площади треугольника CPM, так как

$$S_{\Delta ABM} + S_{\Delta CDM} = \frac{1}{2}S_{ABCD} = S_{\Delta ABP} + S_{\Delta CDP}.$$

Но это означает, что MP является медианой в треугольнике ACM, т.е. точка P – середина диагонали AC.

3. Неверно. Например, для числа 288 не существует натуральных чисел n таких, что

$$288 = n + S(n) \qquad (а)$$

или

$$288 = n - S(n), \qquad (б)$$

где $S(n)$ – сумма цифр числа n.

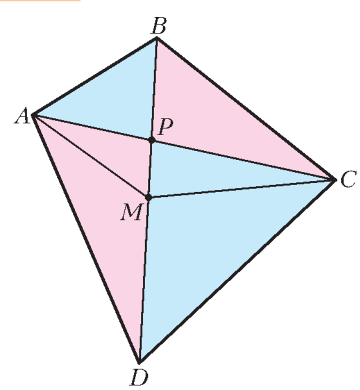

Рис. 2

Докажем невозможность равенства (а). Этому равенству могут удовлетворять не превышающие 288 натуральные числа n, делящиеся на 9 (последнее утверждение следует из того, что числа n и $S(n)$ имеют одинаковые остатки при делении на 9). Поскольку в этом случае $S(n) < 2 + 9 + 9 = 20$, то следует перебрать и проверить только два числа: 270 и 279. Как легко убедиться, ни одно из них не подходит.

Для проверки невозможности равенства (б) переберите трехзначные числа n, большие 288, но меньшие 288 + 27 = 315, поскольку для них заведомо $S(n) < 9 + 9 + 9 = 27$.

4. Пусть a – длина левого плеча рычажных весов, b – длина правого плеча, k – вес колбасы, c – вес сахара. Тогда, по правилу рычага, $ca = 8b$, $kb = 2a$, откуда $kc = 16$. Из различных разложений числа 16 на множители: $16 = 16 \cdot 1 = 8 \cdot 2 = 4 \cdot 4$ только первый вариант удовлетворяет условию задачи. Итак, колбаса весит 16 кг, а сахар – 1 кг соответственно, предложен пост директора вновь построенной Парижской обсерватории. Это предложение, однако, Гевелий отклонил, что привело к назначению на этот пост Джованни Доменико Кассини. Финансовую поддержку Гевелию оказывали монархи Польши (Ян III Собеский) и Франции (Людовик XIV).

В начале 1670-х годов Гевелий оказался вовлечен в жаркий диспут со знаменитыми английскими астрономами Джоном Фламстедом и Робертом Гуком, которые отстаивали необходимость использования телескопов и микрометрического оборудования для точного определения положения звезд. Эта дискуссия достигла апогея, когда Лондонское Королевское общество отправило молодого Эдмонда Галлея в Гданьск для проверки данных Гевелия с помощью новейшего микрометрического телескопа. Галлей подтвердил все результаты польского астронома.

В 1679 году обсерватория Гевелия с уникальными астрономическими инструментами, в частности секстантом, любимым инструментом астронома, с рукописями и библиотекой сгорела. Тем не менее, Гевелий возобновил наблюдения. В 1690 году, уже после смерти мужа, его вторая жена Элизабет Гевелиус издала ставший впоследствии знаменитым звездный атлас «Уранография», основанный на каталоге Гевелия и содержавший великолепные изображения многих, в том числе и предложенных им, созвездий.

НАМ ПИШУТ

В 2007 году исполнилось 300 лет со дня рождения Леонарда Эйлера (1707–1783). Наши читатели посвятили этой дате исследования некоторых элементарных задач, которые в свое время привлекли внимание выдающегося математика.

ОКУНАЯСЬ В ГЛУБИНЫ АРИФМЕТИКИ

В 1749 году Леонард Эйлер написал своему коллеге санкт-петербургскому академику Христиану Гольдбаху письмо, в котором признался, что попытка найти решение в целых числах по виду простой системы уравнений

$$x + y + z = u^2, \quad xy + yz + zx = v^2, \quad xyz = w^2 \qquad (*)$$

привела его в отчаяние – так много труда потребовало от него это решение. Поэтому он не удивился тому, что наименьшее целочисленное решение есть

$$x = 1633780814400, \quad y = 252782198228, \quad z = 3474741058973.$$

О трудностях решения системы $(*)$ и о том, что найденные Эйлером числа являются наименьшими натуральными числами, удовлетворяющими системе $(*)$, сообщает также известный специалист в области элементарной теории чисел В.Серпинский.

Оказывается, и великий Эйлер, и его некритично настроенные комментаторы в данном случае ошибаются. Несложно проверить, что тройка натуральных чисел

$$x = 45, \; y = 64, \; z = 180$$

и, соответственно, числа

$$u = 17, \; v = 150, \; w = 720$$

также удовлетворяют системе $(*)$, причем эти числа не являются столь уж огромными.

Предлагаем читателям самостоятельно убедиться в справедливости следующих утверждений.

1. Рассмотрим тройку натуральных чисел a, b, c, и пусть $A = a^2 + b^2$, $B = a^2 + b^2 + c^2$. Если число $Aa^2c^2 + B^2b^2$ является точным квадратом, то каждая из троек чисел

а) $x = A^2Ba^2$, $y = ABa^2c^2$, $z = AB^2b^2$;

б) $x = ABa^2b^2$, $y = Aa^4c^2$, $z = Ba^2b^2c^2$

удовлетворяет системе уравнений $(*)$ для некоторых натуральных u, v, w.

2. Если натуральные числа x, y, z таковы, что их сумма, сумма попарных произведений и произведение являются точными квадратами, то таким же свойством обладает тройка чисел xy, yz, zx. Это свойство позволяет конструировать новые решения системы $(*)$ по другим найденным решениям.

Ю.Аленков, В.Кибирев

ПО СЛЕДАМ НЕОПУБЛИКОВАННОЙ ЗАДАЧИ ЭЙЛЕРА

В одной из записных книжек Леонарда Эйлера обнаружена такая задача:

Найти треугольник, в котором прямые, делящие углы пополам, выражаются рационально.

Сам классик науки приводит пример треугольника, обладающего требуемым свойством, а именно треугольник со сторонами $a = 25$, $b = 25$, $c = 14$. Об этом же треугольнике сообщает ученик Эйлера Н.Фусс, указывая еще два подходящих примера:

$$a = 975,\; b = 975,\; c = 546 \text{ и } a = 1369,\; b = 1183,\; c = 1914.$$

Для проверки можно воспользоваться формулой

$$l_c = \frac{\sqrt{ab(a+b+c)(a+b-c)}}{a+b},$$

по которой вычисляется длина биссектрисы l_c угла, противолежащего стороне c (длины биссектрис двух других углов вычисляются аналогично).

Покажем, как «собирать» треугольники, в которых не только биссектрисы рациональны, но и другие размеры выражаются целыми числами. Для удобства треугольник с рациональными биссектрисами будем называть *эйлеровым.*

Строительным материалом у нас будут прямоугольные треугольники, длины сторон x, y, z которых выражаются формулами

$$x = m^2 - n^2, \; y = 2mn, \; z = m^2 + n^2, \qquad (1)$$

где m, n – некоторые натуральные числа. В случае взаимной простоты m и n такие прямоугольные треугольники называются основными пифагоровыми треугольниками, но требование взаимной простоты для нас несущественно. В качестве важного дополнительного условия

(Продолжение см. на с. 56)