значения при $\omega = \omega_0$, и это значение равно

$$x_{0\,max} = \frac{A}{\beta} = \frac{qbB_0}{4\gamma a}.$$

Результат оказался не зависящим от массы шарика.

Теперь пора приступать к измерениям. Студент выбрал шарик радиусом a = 1 мм. Но какой наибольший заряд можно сообщить этому шарику? Ясно, что такой, чтобы напряженность электрического поля у его поверхности не превышала предельно допустимого для воздуха значения $E_{max} = 3 \cdot 10^6$ В/м. Отсюда

$$q_{max} = 4\pi\varepsilon_0 a^2 E_{max} = \frac{10^{-6} \cdot 3 \cdot 10^6}{9 \cdot 10^9}\ \text{Кл} = \frac{10^{-9}}{3}\ \text{Кл}.$$

Далее, внутренний радиус соленоида был равен b = 0,1 м, а наибольшая амплитуда отклонения шарика от положения равновесия (в резонансе) оказалась равной $x_{0\,max}$ = 0,01 мм, откуда уже легко получилось

$$B_0 = \frac{4\gamma a x_{0\,max}}{bq_{max}} = \frac{4 \cdot \left(10^{-3}/3\right) \cdot 10^{-3} \cdot 10^{-5}}{0{,}1\left(10^{-9}/3\right)}\ \text{Тл} = 0{,}4\ \text{Тл}.$$

Не мало, – подумал Студент. – Но неужели так же труден путь всех великих физиков?

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТАТИВ

Квантовые чудеса

М.КАГАНОВ

Уравнение Шрёдингера допускает постановку разных задач. С некоторыми из них вы встретитесь в этой статье и сможете познакомиться с явлениями, столь разительно отличающимися от поведения классических объектов, что их вполне можно назвать квантовыми чудесами.

Нет стен, через которые нельзя пройти

Французский писатель Марсель Эме написал роман «Человек, проходивший сквозь стены». Хорошая, ироничная, умная книга. Роман был экранизирован, и фильм получился вполне неплохой. Проходить через стены человеку помогала его вера в себя. Когда он терял веру, способность исчезала. Весьма нравоучительно…

Мы точно знаем, что, не разрушив стену, ни человек, ни любое другое макроскопическое тело пройти сквозь нее не может. А микроскопическая частица? Не будем спешить с ответом.

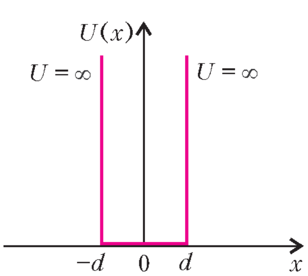


Рис. 5. Бесконечно глубокая потенциальная яма

На рисунке 5 изображена потенциальная яма. Вне области $|x| < d$ частица находиться не может: при $|x| > d$ волновая функция $\psi(x,t) \equiv 0$. Это неизбежное следствие того, что $U(x) = \infty$ при $|x| > d$. По этой же причине квантовая микрочастица не может проникнуть через бесконечно высокий потенциальный барьер.

А если потенциальный барьер имеет конечную высоту? При энергии, превышающей высоту барьера, частица *может* пролететь над ним. Но обязательно ли иметь энергию, превышающую высоту барьера? И обязательно ли частица пролетит над барьером?

Квантовая механика меняет наши обычные представления: микроскопическая частица может проникнуть через недоступную классической частице область, т.е. пройти через стену, а может отразиться от барьера даже тогда, когда ее энергия превышает высоту барьера.

Вернемся к потенциальному барьеру, изображенному на рисунке 3 (см. «Квант» №4): $U(x) = U_0 > 0$ при $|x| < d$, $U(x) = 0$ при $|x| > d$. Классическая частица с энергией $\varepsilon < U_0$, долетев до барьера, отразится, а частица, имеющая энергию $\varepsilon > U_0$, свободно перелетит область $|x| < d$. А как поведет себя квантовая частица?

Найдем состояния квантовой частицы (ее ψ-функцию) при различных значениях энергии ε. Для этого необходимо найти решение уравнения Шрёдингера. В квантовой механике, если частица движется под действием постоянной силы, имея определенную энергию, ее состояние называют *стационарным* – неважно, совершает частица финитное или инфинитное движение. Это состояние описывается стационарной волновой функцией, удовлетворяющей стационарному уравнению Шрёдингера.

В случае прямоугольного потенциального барьера это уравнение на разных участках оси имеет разный вид:

$$\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2} + \varepsilon\psi = 0 \quad \text{при } |x| > d,$$

$$\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2} + \left(\varepsilon - U_0\right)\psi = 0 \quad \text{при } |x| < d.$$

Слева и справа от барьера (при $|x| > d$) решениями уравнения являются две плоские волны $\exp(ik_e x)$ и $\exp(-ik_e x)$, волновой вектор $k_e = \sqrt{2m\varepsilon}/\hbar$. Одна волна движется к ступеньке, а другая – от нее. При $|x| < d$ характер решения зависит от величины энергии ε. Если $\varepsilon > U_0$, то и в этом случае решения представляют плоские волны $\exp(ik_i x)$ и $\exp(-ik_i x)$ с волновым вектором $k_i = \sqrt{2m(\varepsilon - U_0)}/\hbar$. Если $\varepsilon < U_0$, то решения уравнения совсем не похожи на плоские волны. Это $\exp(\pm\kappa x)$, где $\kappa = \sqrt{2m(U_0 - \varepsilon)}/\hbar$. Одна из функций на

Продолжение. Начало см. в «Кванте» № 4.

расстоянии $1/\kappa$ возрастает в $e \approx 2{,}718281828\ldots$ раз, а другая во столько же раз уменьшается.[1]

Существование двух решений в каждой из областей означает, что решений бесконечно много: любая линейная комбинация двух решений также есть решение. Необходимо понять, каким образом выбрать нужное решение и как следует «сшивать» волновую функцию при $x = -d$ и при $x = d$. Ответы на поставленные вопросы дает физический смысл ψ-функции.

Плотность вероятности $\rho = |\psi(x)|^2$ не исчезает, а только перемещается в пространстве согласно уравнению непрерывности. Плотность потока вероятности $j(x)$ содержит производные от ψ-функции по координате x. Плотность вероятности ρ и плотность потока j по своему смыслу должны быть непрерывными функциями координаты. Поэтому при скачкообразном изменении потенциальной энергии на волновую ψ-функцию и на ее производную $d\psi/dx$ надо наложить условие непрерывности. Отсутствие скачков у ψ и у $d\psi/dx$ и формулирует условие «сшивки» ψ-функции на разных участках.

Теперь можно обсудить выбор решений, который существенно зависит от постановки задачи. Сначала рассмотрим самый простой случай. Перенесем правый обрыв барьера на $+\infty$, а начало координат $(x = 0)$ совместим с левым обрывом. В результате потенциальная энергия $U(x)$ будет представлять собой ступеньку высотой U_0, занимающую полуось $x > 0$ (рис.6). Наша задача – найти состояния квантовой частицы при различных значениях энергии ε, для чего необходимо найти решения уравнений Шрёдингера при $x > 0$ и при $x < 0$, т.е. на двух полуосях. Эти уравнения имеют тот же самый вид, как и в случае прямоугольного барьера при $|x| > d$ и $|x| < d$.

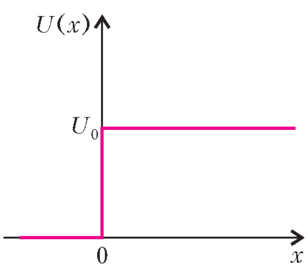


Рис. 6. Ступенька

Пусть $0 < \varepsilon < U_0$. Слева от ступеньки (при $x < 0$) решения уравнения – это две волны $\exp(ikx)$ и $\exp(-ikx)$, волновой вектор $k = \sqrt{2m\varepsilon}/\hbar$. Одна волна движется к ступеньке, а другая – от нее. Как ни странно, хотя энергия частицы ε меньше потенциальной энергии U_0, нет формальных соображений, позволяющих считать, что $\psi(x) \equiv 0$ при $x > 0$. Мы уже отмечали, что решения совсем не похожи на плоские волны. Это $\exp(\pm\kappa x)$, где $\kappa = \sqrt{2m(U_0 - \varepsilon)}/\hbar$. Решение, экспоненциально растущее с ростом координаты, заведомо, не подходит: на любом даже маленьком интервале, достаточно удаленном от ступеньки (при достаточно больших значениях координаты x, ведь $x \to \infty$), вероятность обнаружить частицу превысит единицу, чего быть не может. Годится только затухающее с ростом x решение:

$$\psi(x) = b\exp(-\kappa x) \text{ при } x > 0 \text{ и } \varepsilon < U_0 .$$

Движущаяся слева к ступеньке частица описывается волновой функцией $\exp(ikx)$. Интуиция подсказывает, что частица может (скорее, даже должна) отразиться от ступеньки, ведь ее энергия по предположению меньше высоты ступеньки. Значит, ψ-функция – сумма падающей волны и волны отраженной, т.е.

$$\psi(x) = \exp(ikx) + a\exp(-ikx) \text{ при } x < 0.$$

Постоянные множители a и b надо найти из условий «сшивки» (коэффициент при экспоненте у волны, падающей на ступеньку, выбран равным единице для удобства, физический смысл имеет квадрат отношения амплитуд падающей и отраженной волн). Эти условия (отсутствие скачков у ψ и у $d\psi/dx$ при $x = 0$) приводят к системе уравнений

$$1 + a = b, \quad ik(1 - a) = -\kappa b .$$

Отсюда

$$a = \frac{1 - i\kappa/k}{1 + i\kappa/k} = \frac{1 - i\sqrt{(U_0 - \varepsilon)/\varepsilon}}{1 + i\sqrt{(U_0 - \varepsilon)/\varepsilon}} ,$$

$$b = \frac{2}{1 + i\sqrt{(U_0 - \varepsilon)/\varepsilon}} .$$

По принятой в квантовой механике трактовке полученного результата величина $R = |a|^2$ – это коэффициент отражения, т.е. отношение плотности потока вероятности, направленного от ступеньки, к плотности потока, направленного к ступеньке. А если вспомнить, что сравнение полученных теоретических формул с экспериментом требует ансамбля тождественных частиц в одинаковых условиях, то можно считать, что коэффициент отражения R есть отношение плотности потока частиц, отраженных от ступеньки, к плотности потока частиц, двигающихся слева направо к ступеньке.

На первый взгляд получилось нечто странное. Коэффициент отражения от ступеньки $R = 1$, так как множитель a равен отношению комплексно сопряженных величин. А в то же время $b \neq 0$, значит, вероятность обнаружить частицу правее ступеньки отлична от нуля. Что-то тут не так? Нет, все правильно. Ошибки нет. Отсутствие противоречия подтверждается тем, что плотность потока вероятности $j = 0$ при $x \geq 0$. Убедитесь в этом.

Ясно, что проникновение частиц в область, где полная энергия меньше потенциальной, сугубо квантовое явление – проявление волновых свойств микроскопических частиц.

Теперь рассмотрим частицу, летящую к ступеньке по-прежнему слева, но с энергией $\varepsilon > U_0$. Классическая частица, замедлив свой полет, беспрепятственно преодолеет ступеньку. Посмотрим, что произойдет с квантовой частицей.

И при $x > 0$, и при $x < 0$ уравнения Шрёдингера имеют решения в виде плоских волн, правда с разными волновыми векторами. На каждой из полуосей есть по две волны, распространяющиеся в противоположные стороны. Однако нет никаких оснований считать, что справа от ступеньки есть волна, распространяющаяся справа налево. Это означало бы, что бегущая направо волна от чего-то отразилась. Не от чего. А есть ли бегущая налево волна при $x < 0$, покажет условие «сшивки».

Итак, при $\varepsilon > U_0$

$$\psi(x) = \exp(ik_1x) + a\exp(-ik_1x), \quad k_1 = \sqrt{2m\varepsilon}/\hbar \text{ при } x < 0,$$

$$\psi(x) = b\exp(ik_2x), \quad k_2 = \sqrt{2m(\varepsilon - U_0)}/\hbar \text{ при } x > 0.$$

Из условий «сшивки» немедленно находим значения амплитуд a и b. Да, $a \neq 0$. Значит, отличен от нуля и коэффициент отражения

$$R = \frac{(k_1 - k_2)^2}{(k_1 + k_2)^2} .$$

Коэффициент отражения R меньше единицы, а коэффици-

---

[1] *Привел значение числа e с точностью до 9-го знака после запятой, чтобы поделиться с читателями мнемоническим правилом для запоминания этого числа. Число 2,7 надо знать, а дальше – дважды год рождения Льва Николаевича Толстого. Если кому-то это правило поможет запомнить год рождения Толстого – тоже неплохо.*

ент прохождения равен $D = 1 - R$. Любопытно, что R не зависит от направления полета частицы. Квантовая частица с энергией $\varepsilon > U_0$, откуда бы она ни летела, отражается от ступеньки с одной и той же вероятностью. Обратите внимание: $D \neq |b|^2$, и попытайтесь объяснить, почему.

С ростом энергии ε коэффициент отражения R уменьшается и при стремлении ε к бесконечности стремится к нулю. По какому закону R обращается в ноль, вы легко определите самостоятельно. При $\varepsilon = U_0$ коэффициент отражения R обращается в единицу и, как мы знаем, остается равным единице при любом значении энергии $\varepsilon < U_0$.

Итак, квантовая частица может проникать в область, где $\varepsilon < U_0$, и отражается от ступеньки, даже если $\varepsilon > U_0$. А что произойдет, если на пути частицы стена – барьер конечной высоты и конечной ширины? Для ответа на этот вопрос надо вернуться к задаче с прямоугольным потенциальным барьером.

Мы уже понимаем, что при $x < -d$ волновая функция частицы – это сумма двух волн, падающей и отраженной. Амплитуду падающей волны снова примем равной единице, а амплитуду отраженной волны по традиции обозначим буквой a. Их волновые векторы противоположны по знаку, а по модулю равны $k = \sqrt{2m\varepsilon}/\hbar$. За барьером (при $x > d$) есть только одна волна с тем же волновым вектором:

$$\psi = f \exp(ikx) \quad \text{при} \quad x > d.$$

Вне зависимости от соотношения между ε и U_0 нет никаких оснований в области $|x| < d$ отбрасывать ни экспоненциально возрастающее решение при $\varepsilon < U_0$, ни волну, бегущую справа налево с действительным волновым вектором k_1. Так что при $|x| < d$

$$\psi = b_1 \exp(\kappa x) + b_2 \exp(-\kappa x), \quad \kappa = \sqrt{2m(U_0 - \varepsilon)}/\hbar, \quad \varepsilon < U_0,$$

$$\psi = b_1 \exp(ik_1 x) + b_2 \exp(-ik_1 x), \quad k_1 = \sqrt{2m(\varepsilon - U_0)}/\hbar, \quad \varepsilon > U_0.$$

Здесь b_1, b_2 и f – амплитуды. Задача свелась к их определению. Для этого служат четыре условия «сшивки»: на каждом скачке потенциальной энергии должны быть непрерывны ψ и $d\psi/dx$.

После простого расчета (очень советую его проделать!) можно получить два выражения для коэффициента прохождения $D = |f|^2$ и коэффициента отражения $R = |a|^2 = 1 - D$: когда энергия частицы меньше высоты барьера (при $\varepsilon < U_0$) и частица летит сквозь барьер и когда частица летит над барьером при энергии больше высоты барьера (при $\varepsilon > U_0$). При $\varepsilon = U_0$ коэффициент прохождения D обращается в единицу, что вполне естественно, так как волна беспрепятственно проходит область барьера. Заметим, что при стремлении ε к U_0 со стороны бóльших энергий коэффициент прохождения D тоже стремится к единице. Ведь при $\varepsilon = U_0$ и длина волны де Бройля $2\pi/k_1 \to \infty$. Но $D = 1$ не только при $\varepsilon = U_0$, когда $k_1 = 0$. Если $2k_1 d = \nu\pi$, где $\nu = 1, 2, 3$ и т.д. – целые числа, т.е. на ширине барьера $2d$ укладывается целое число полуволн, то и тогда $D = 1$. Во всех случаях, кроме перечисленных, коэффициент прохождения $D < 1$, а коэффициент отражения $R \neq 0$.

Надо отметить еще один факт. Чем энергия частицы ε меньше (речь идет о сравнении с U_0), тем коэффициент прохождения через барьер меньше. Если $\kappa d \geq 1$, то коэффициент прохождения экспоненциально мал.

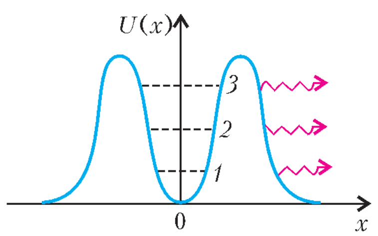
Таким образом, мы убедились, что непроницаемых стен нет. Чем энергия частицы больше, даже при $\varepsilon < U_0$, тем коэффициент прохождения D ближе к единице, а коэффициент отражения R – к нулю. И все же, несомненно, описанные свойства можно отнести к квантовым чудесам. Хотя бы потому, что устанавливаются они при изучении движения *отдельной частицы*, так непохожей на волну. И обнаружить проницаемость барьера можно, наблюдая за одной частицей. Но для сравнения количественных предсказаний теории с экспериментом необходимо исследовать поведение *многих частиц*.

Туннель, который не надо прокладывать

Прохождение микроскопической частицей недоступной по законам классической механики области получило название *туннельного эффекта*. Туннельный эффект встречается нередко и играет важную роль. Только упомянем: радиоактивный α-распад – типичный пример туннельного эффекта, источники термоядерной энергии звезд и нашего Солнца не существовали бы, не будь туннельного эффекта; многие химические реакции, происходящие в живых организмах, могут осуществляться благодаря туннельным переходам электрона из молекулы в молекулу; наконец, некоторые современные приборы содержат туннельный диод, получивший свое название по туннельному эффекту, на котором основан.

Туннельный эффект обычно характеризуется коэффициентом прохождения недоступной для классической частицы области, но не всегда постановка задачи такая, как мы рассмотрели.

При распаде сложного образования, например атомного ядра, когда α-частица покидает ядро благодаря туннельному эффекту, задача состоит в вычислении времени жизни исходного, составного состояния – того, что было до радиоактивного распада. Обычно вычисляют время полураспада – время, за которое половина всех атомов или ядер распадется. Мы обращали внимание на то, что коэффициент прохождения D тем больше, чем ближе энергия ε налетающей частицы к высоте барьера U_0. Чем больше энергия того состояния, которое занимает частица в связанном состоянии, тем время полураспада меньше (рис.7).



1, 2, 3 — уровни энергии
$\tau_3 < \tau_2 < \tau_1$ — *времена полураспада*

Рис. 7. Время полураспада и энергия частицы

Приведем еще один пример проявления туннельного эффекта. На рисунке 8 изображена довольно сложная потенциальная яма. Скорее, две ямы, разделенные между собой барьером. Если бы барьер был бесконечно высоким, то в каждой из ям была бы своя система энергетических уровней. Так как ямы одинаковы, то и системы уровней в ямах были бы тождественны. Сказав, что частица имеет такую-то энергию, мы не знали бы, в какой яме частица находится. О такой ситуации говорят, что *имеет место вырождение*: два разных состояния имеют одинаковые энергии. Одно состояние принадлежит левой яме, другое – правой. Через бесконечно высокий барьер частица перемещаться не может, но через барьер конечной высоты, благодаря туннельному эффекту, может. Если барьер не слишком узкий, то коэффициент прохождения мал. А как способность

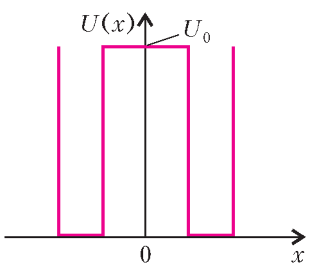


Рис. 8. Две ямы, связанные туннельным эффектом

частицы перемещаться из одной ямы в другую изменит энергетический спектр частицы в ямах? Ответ будет нетривиальным.

Мы хотим не только сформулировать ответ, но и показать, как подобная задача решается, для чего и рассмотрим две ямы прямоугольной формы, разделенные прямоугольным барьером. Как и барьеры, которые мы рассмотрели ранее, прямоугольный барьер с прямоугольными границами, без сомнения, упрощенная модель, но для описания интересующего нас явления она вполне пригодна.

Итак, мы должны найти решение стационарного уравнения Шрёдингера с потенциальной энергией $U = U(x)$, изображенной на рисунке 8. В целях простоты высота барьера приравнена глубине ям. Функция $U = U(x)$, а тем самым и уравнение Шрёдингера, обладает симметрией при замене x на $-x$. Уравнение инвариантно (неизменно) при такой замене. Симметрия уравнения Шрёдингера позволяет его решения разделить на два класса: на симметричные, для которых $\psi_s(x) = \psi_s(-x)$, и антисимметричные, для которых $\psi_a(x) = -\psi_a(-x)$.[2]

Уравнение Шрёдингера имеет различный вид в зависимости от того, какому интервалу принадлежит координата x. Нас будут интересовать состояния с энергией $0 < \varepsilon < U_0$. На разных интервалах уравнения разные:

$$\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2} + \varepsilon\psi = 0 \quad \text{при} \quad |a| > |x| > |b|,$$

$$\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2} - (U_0 - \varepsilon)\psi = 0 \quad \text{при} \quad |x| < |b| \quad \text{и} \quad |x| > |a|.$$

[2] *С тем что у симметричной задачи может быть антисимметричное решение, мы уже встретились при вычислении уровней энергии частицы в бесконечно глубокой потенциальной яме. Вопрос о симметрии решений физических задач очень интересен. Вспомните, что при сферической симметрии силы всемирного притяжения все планеты движутся по эллипсам. К сожалению, вопрос этот выходит за пределы темы нашей статьи.*

Как мы отметили, ψ-функция может быть либо симметричной, либо антисимметричной. Выбрав для ψ-функции s- или a-решение, достаточно выписать зависимость либо при $x > 0$, либо при $x < 0$. Ограничимся правой полуосью (значение ψ-функции на левой полуоси определяется симметрией):

$$\psi_s(x) = \mathrm{A}\,\mathrm{ch}\,\kappa x \quad \text{при} \quad x < b,$$

$$\psi_a(x) = \mathrm{A}\,\mathrm{sh}\,\kappa x \quad \text{при} \quad x < b,$$

$$\psi_{s,a}(x) = \mathrm{B}\exp(ikx) + \mathrm{C}\exp(-ikx) \quad \text{при} \quad b < x < a,$$

$$\psi_{s,a}(x) = \mathrm{D}\exp(-\kappa x) \quad \text{при} \quad x > a.$$

Здесь $\kappa = \sqrt{2m(U_0 - \varepsilon)}/\hbar$, $k = \sqrt{2m\varepsilon}/\hbar$, а $0 < \varepsilon < U_0$.

Требования непрерывности ψ-функции и ее производной по координате на границах интервалов формулируют четыре уравнения для четырех неизвестных A, B, C и D, у которых мы опустили индексы s и a, хотя их значения для симметричной и антисимметричной ψ-функций различны. Условием разрешимости каждой из систем уравнений служит дисперсионное уравнение, позволяющее найти разрешенные уровни энергии. Оно выводится путем исключения всех четырех постоянных. При $U_0 \to \infty$, когда две ямы не связаны друг с другом, дисперсионные уравнения совпадают, что и соответствует вырождению: уровни энергии дважды вырождены ($\varepsilon_s^0 = \varepsilon_a^0$). При конечном значении U_0 энергии s- и a-уровни различаются, и вырождение ликвидируется. Если $U_0 \gg \hbar^2/\left(2m(a-b)^2\right)$, то $\left|\varepsilon_s^0 - \varepsilon_a^0\right| \ll \varepsilon_{s,a}^0$ – уровни энергии расщепляются на близко расположенные пары (рис.9). С ростом энергии растет и расстояние между уровнями в паре.

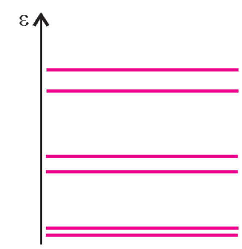


Рис. 9. Расщепление уровней энергии частицы

ПРАКТИКУМ АБИТУРИЕНТА

Движение заряда в магнитном поле

В.ДРОЗДОВ

Весьма высока вероятность того, что при том или ином виде конкурсного испытания абитуриент встретится с задачей, сюжетом которой будет движение точечного заряда в магнитном поле. Чтобы решить такую задачу, кроме свойств магнитного поля надо знать и динамику. А в некоторых задачах может дополнительно присутствовать еще и электрическое поле.

Таким образом, задачи на движение заряда охватывают обширный физический материал и являются эффективным средством проверки знаний абитуриента.

Начнем с двух задач, решение (а не ответы!) которых нужно особенно хорошо понять и запомнить.

Задача 1. *В однородном магнитном поле с индукцией $\vec{B}$, частице массой m и зарядом q сообщают скорость $\vec{v}$, направленную перпендикулярно линиям магнитной индукции. Определите, как будет двигаться эта частица в магнитном поле.*

На заряд действует сила Лоренца $\vec{F}_Л$, направление которой определяем по правилу левой руки (рис.1). Она постоянна по модулю: $F_Л = qvB$ и всегда перпендикулярна скорости частицы: $\vec{F}_Л \perp \vec{v}$. Значит, и ускорение частицы $\vec{a} = \frac{\vec{F}_Л}{m}$ тоже постоянно по модулю и в любой момент времени

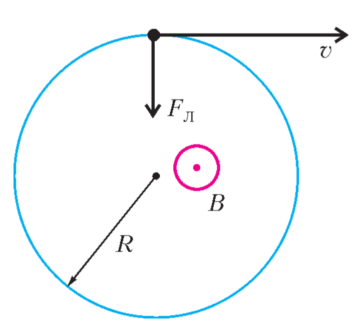


Рис. 1