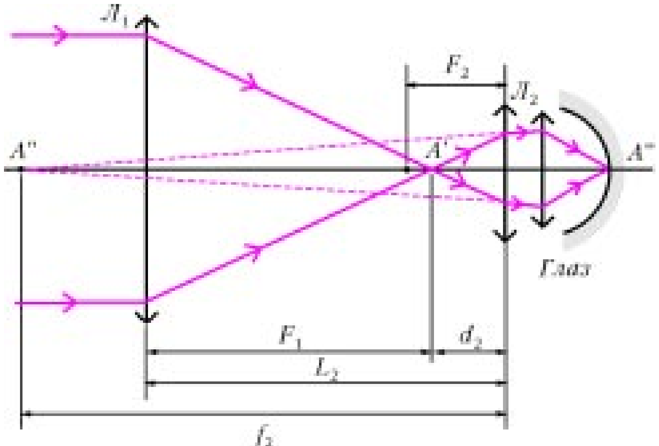

Рис. 11

ва получается первичное изображение – точка A'. Расстояние от A' до окуляра равно $d_2 = L_2 - F_1 = 4{,}5$ см. Изображение точки A' в окуляре найдем по формуле линзы, полагая, что $d_2 < F_2$:

$$\frac{1}{d_2} - \frac{1}{f_2} = \frac{1}{F_2}, \text{ откуда } f_2 = \frac{d_2F_2}{F_2 - d_2} = 45 \text{ см}.$$

Полученное изображение A'' рассматривается глазом при максимальном фокусном расстоянии хрусталика. С этого момента глаз начинает отчетливо видеть предмет. Предмет находится на бесконечном расстоянии, а глаз его видит на расстоянии

$$f_2 = 45 \text{ см}.$$

При дальнейшем сближении объектива с окуляром глазу необходимо аккомодироваться на все более близкие точки, поскольку изображение A'' будет приближаться к глазу. Фокусное расстояние глаза будет уменьшаться и, наконец, при $L_1 = 33$ см достигнет минимума. В этот момент расстояние от изображения A' до окуляра будет равно $d_1 = L_1 - F_1 = 3$ см. А расстояние f_1 от изображения A'' до окуляра опять найдем по формуле линзы:

$$\frac{1}{d_1} - \frac{1}{f_1} = \frac{1}{F_2}, \text{ откуда } f_1 = \frac{d_1F_2}{F_2 - d_1} = 7{,}5 \text{ см}.$$

Таким образом, на расстояниях больше 7,5 см и меньше 45 см наблюдатель отчетливо видит предметы невооруженным глазом.

Упражнения

1. В комнате на столе лежит плоское зеркало, на котором находится тонкая плосковыпуклая линза с фокусным расстоянием $F = 40$ см. По потолку AB ползет муха со скоростью $v = 2$ см/с. Расстояние от потолка до зеркала $h = 2{,}2$ м. На каком расстоянии от зеркала находится изображение мухи в данной оптической системе? Чему равна скорость изображения мухи в тот момент, когда она пересекает главную оптическую ось линзы?

2. На главной оптической оси тонкой рассеивающей линзы с фокусным расстоянием $F = 10$ см расположено плоское зеркальце на расстоянии $L = 4{,}2F$ от линзы (рис.12). Зеркальце вращается с угловой скоростью $\omega = 0{,}05$ с$^{-1}$ вокруг оси, перпендикулярной плоскости рисунка и проходящей через точку C. На расстоянии $d = 4F$ от линзы расположен точечный источник S. На каком расстоянии от точки C получится изображение источника S в системе линза–зеркальце? Найдите скорость этого изображения в момент, когда угол между плоскостью зеркальца и оптической осью равен $\alpha = 40°$.

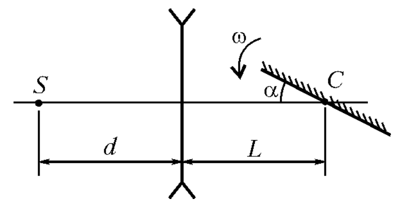

Рис. 12

3. Точечный источник света расположен на главной оптической оси слева от рассеивающей линзы с фокусным расстоянием $F_1 = 10$ см. Расстояние от источника до рассеивающей линзы $d = 40$ см. На расстоянии $L = 20$ см слева от рассеивающей линзы расположена собирающая линза. Главные оптические оси линз совпадают. Найдите фокусное расстояние собирающей линзы, если из системы линз выходит параллельный пучок света.

4. Пожилой человек хорошо видит удаленные предметы начиная с бесконечности и до минимального расстояния $l = 2$ м. В каких очках (с минимальной оптической силой) этот человек сможет читать газету с расстояния наилучшего зрения $d_0 = 25$ см?

Ищем «экстремальный» экстремум

В.ГОЛУБЕВ

В 1992 ГОДУ НА ВСТУПИТЕЛЬНОМ ЭКЗАМЕНЕ НА БИОлогический факультет Московского государственного университета им. М.В.Ломоносова была предложена такая задача:

Задача 1. *Найдите наименьшее значение величины*

$$\frac{1}{c}\left(\frac{3a}{\sqrt{1-u^2}} + \frac{b}{\sqrt{1-t^2}}\right), \qquad (1)$$

где a, b, c, t, u – положительные числа, удовлетворяющие условиям

$$\begin{cases} at + bu \le c, & (2)\\ a^2 + 2bcu \ge b^2 + c^2, & (3)\\ b^2\dfrac{t^2 - u^2}{t^2 - 1} + c^2 \le 2bcu. & (4)\end{cases}$$

Эта задача не имеет аналогов в практике вступительных экзаменов ни в прошлом, ни в настоящем. Впервые абитуриенту было необходимо найти минимальное значение функции пяти (!) переменных в некоторой области допустимых значений этих переменных. Конечно, присутствие переменных a, b, c и выражений $\sqrt{1-u^2}$, $\sqrt{1-t^2}$ указывает на возможность геометрической интерпретации задачи. И официальное решение задачи полностью основано на такой интерпретации. (Найдите это решение самостоятельно).

Ниже мы предлагаем познакомиться и с чисто алгебраическим решением.

Предварительный анализ

Во-первых, все выражения в (1)–(4) являются однородными относительно переменных a, b и c:

$\frac{1}{c}\left(\frac{3a}{\sqrt{1-u^2}}+\frac{b}{\sqrt{1-t^2}}\right)$ – степени ноль;

$at+bu$, c – степени один;

a^2+2bcu, b^2+c^2 – степени два;

$b^2\frac{t^2-u^2}{t^2-1}+c^2$, $2bcu$ – степени два.

И поскольку все переменные по условию есть положительные величины, то, разделив обе части неравенства (2) на c, а обе части неравенств (3) и (4) на c^2, мы можем исходную задачу 1 сформулировать в следующем равносильном виде:

Задача 2. *Найдите наименьшее значение величины*

$$\frac{3m}{\sqrt{1-u^2}}+\frac{n}{\sqrt{1-t^2}}, \qquad (5)$$

где m $\left(m=\frac{a}{c}\right)$, n $\left(n=\frac{b}{c}\right)$, t, u – *положительные числа, удовлетворяющие условиям:*

$$\begin{cases} mt+nu-1\le 0, & (6)\\ m^2+2nu-n^2-1\ge 0, & (7)\\ n^2\frac{t^2-u^2}{t^2-1}-2nu+1\le 0. & (8)\end{cases}$$

Во-вторых, слагаемые в (1) (соответственно в (5)) не содержат *общих* переменных. Этот факт провоцирует искать наименьшее значение каждого слагаемого отдельно, тем более что неравенство (8) не содержит переменную m.

В-третьих, неравенства (6)–(8) являются либо линейными, либо квадратными ((8) – после освобождения от знакопостоянного знаменателя) относительно *любой* переменной. Это позволяет надеяться на относительно легкий поиск минимума величины (5).

Перейдем теперь непосредственно к решению задачи 2, равносильной задаче 1.

Краткое решение

1) $(7)\Leftrightarrow m^2\ge n^2-2nu+1=(n-u)^2+1-u^2$.

Отсюда следует, что

$$m^2\ge 1-u^2.$$

Поэтому

$$\frac{3m}{\sqrt{1-u^2}}\ge 3. \qquad (9)$$

2) $(8)\Leftrightarrow n^2\frac{(t^2-1)+(1-u^2)}{t^2-1}-2nu+1\le 0\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow n^2\left(1-\frac{1-u^2}{1-t^2}\right)-2nu+1\le 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (1-u^2)\left(\frac{n}{\sqrt{1-t^2}}\right)^2\ge n^2-2nu+1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{n}{\sqrt{1-t^2}}\right)^2\ge\frac{n^2-2nu+1}{1-u^2}.$$

Так как

$$\frac{n^2-2nu+1}{1-u^2}=\frac{(n-u)^2+1-u^2}{1-u^2}\ge\frac{1-u^2}{1-u^2}=1,$$

то

$$\frac{n}{\sqrt{1-t^2}}\ge 1. \qquad (10)$$

3) Равенства в (9) и (10) возможны при условиях

$$\begin{cases} n-u=0,\\ m=\sqrt{1-u^2},\\ n=\sqrt{1-t^2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} n=u,\\ m=\sqrt{1-u^2},\\ t=\sqrt{1-u^2}.\end{cases} \qquad (11)$$

4) В силу 1) и 2), $(11)\Rightarrow(7)$ и (8). Осталось проверить (6) при заменах (11):

$$\sqrt{1-u^2}\,\sqrt{1-u^2}+u^2-1\le 0 \text{ – истинно.}$$

5) Таким образом, при условиях (11) достигается наименьшее значение величины (5), равное четырем.

Ответ: 4.

Подробное решение

Определение наименьшего значения слагаемого $\frac{3m}{\sqrt{1-u^2}}$

Переменная m содержится только в неравенствах (6) и (7). И поскольку неравенство (7) не содержит переменную t и приводимо к сравнению m^2 с квадратным трехчленом относительно n с параметром u, то оно позволяет сразу получить оценку снизу нашего слагаемого.

Имеем

$$(7)\Leftrightarrow m^2\ge n^2-2nu+1.$$

Квадратный трехчлен $n^2-2un+1$ принимает наименьшее значение при $n=u$, что легко обнаружить, если выделить полный квадрат разности n и u:

$$n^2-2nu+1=(n^2-2nu+u^2)+1-u^2=(n-u)^2+1-u^2.$$

Поэтому

$$(7)\Leftrightarrow m^2\ge(n-u)^2+1-u^2\ge 1-u^2,$$

т.е.

$$m^2\ge 1-u^2. \qquad (12)$$

В силу условия задачи, $m>0$ и $1-u^2>0$, что позволяет извлечь квадратный корень из обеих частей неравенства (12):

$$m\ge\sqrt{1-u^2}.$$

Откуда следует, что

$$\frac{m}{\sqrt{1-u^2}}\ge 1\Leftrightarrow\frac{3m}{\sqrt{1-u^2}}\ge 3. \qquad (13)$$

Полученное неравенство (13) означает, что

- наименьшее значение первого слагаемого в (5) *не меньше* трех,
- равенство в (13) достигается тогда и только тогда,

когда

$$\begin{cases} n - u = 0, \\ m = \sqrt{1-u^2}. \end{cases} \qquad (14)$$

Позже мы покажем, что условия (14) можно обеспечить, и, следовательно, наименьшее значение первого слагаемого в (5) равно трем.

Определение наименьшего значения слагаемого $\dfrac{n}{\sqrt{1-t^2}}$

Естественно для наших целей воспользоваться неравенством (8), так как оно единственное из неравенств (6)–(8) содержит в явном виде величину t^2.

На первой стадии выделим в дробно-рациональном относительно t выражении $\dfrac{t^2-u^2}{t^2-1}$ целую часть:

$$\frac{t^2-u^2}{t^2-1} = \frac{\left(t^2-1\right)+1-u^2}{t^2-1} = 1 + \frac{1-u^2}{t^2-1}.$$

После этого в неравенстве (8) легко выделяется величина $\dfrac{n}{\sqrt{1-t^2}}$:

$$(8) \Leftrightarrow n^2\left(1+\frac{1-u^2}{t^2-1}\right) - 2nu + 1 \le 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(1-u^2\right)\frac{n^2}{1-t^2} \ge n^2 - 2nu + 1.$$

Так как $1-u^2>0$, то разделим обе части полученного неравенства на $1-u^2$:

$$\frac{n^2}{1-t^2} \ge \frac{n^2-2nu+1}{1-u^2}.$$

В числителе правой части – уже знакомый нам квадратный трехчлен. Поэтому легко получаем следующую оценку левой части (квадрата второго слагаемого в (5)):

$$\frac{n^2}{1-t^2} \ge \frac{(n-u)^2+1-u^2}{1-u^2} \ge \frac{1-u^2}{1-u^2} = 1,$$

т.е.

$$\frac{n^2}{1-t^2} \ge 1.$$

Учитывая положительность величин n и $1-t^2$, извлекаем квадратный корень из обеих частей:

$$\frac{n}{\sqrt{1-t^2}} \ge 1. \qquad (15)$$

Как и ранее, получаем, что

- наименьшее значение второго слагаемого в (5) *не меньше* единицы,
- равенство в (15) достигается тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} n - u = 0, \\ n = \sqrt{1-t^2}. \end{cases} \qquad (16)$$

Определение искомого наименьшего значения суммы (5)

Покажем, что можно *одновременно* обеспечить условия (14) и (16), при которых оба слагаемых в (5) принимают наименьшие значения (3 и 1 соответственно). Действительно,

$$\begin{cases} (14), \\ (16) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n - u = 0, \\ m = \sqrt{1-u^2}, \\ n = \sqrt{1-t^2}. \end{cases} \qquad (17)$$

Система (17) с четырьмя неизвестными позволяет три из них выразить через четвертую:

$$\begin{cases} n = u, \\ m = \sqrt{1-u^2}, \\ t = \sqrt{1-u^2}, \end{cases} \qquad (18)$$

так как при $n>0$ и $t>0$

$$n = \sqrt{1-t^2} \Leftrightarrow t = \sqrt{1-n^2} \quad \text{и } n = u.$$

Из первых двух пунктов следует, что в условиях (18) нестрогие неравенства (7) и (8) переходят в равенства и, тем самым, выполняются. Поэтому осталось убедиться в истинности неравенства (6) в тех же условиях (18):

$$\sqrt{1-u^2}\,\sqrt{1-u^2} + u^2 - 1 \le 0 \Leftrightarrow 0 \le 0,$$

что, очевидно, истинно.

Отсюда следует, что искомое наименьшее значение суммы, в силу (13) и (15), равно четырем.

Теперь предлагаем читателям самостоятельно решить аналогичные задачи из других вариантов.

Упражнения

1. Найдите наименьшее значение величины

$$\frac{1}{r}\left(\frac{4p}{u} + \frac{q}{\sqrt{1-v^2}}\right),$$

где p, q, r, u, v – положительные числа, удовлетворяющие условиям

$$\begin{cases} pv + q\sqrt{1-u^2} \le r, \\ p^2 + 2qr\sqrt{1-u^2} \ge q^2 + r^2, \\ 2qr\sqrt{1-u^2} + q^2\dfrac{1-v^2-u^2}{v^2-1} \ge r^2. \end{cases}$$

2. Найдите наименьшее значение величины

$$\frac{1}{b}\left(\frac{2c}{\sqrt{1-u^2}} + \frac{3a}{\sqrt{1-t^2}}\right),$$

где a, b, c, t, u – положительные числа, удовлетворяющие условиям

$$\begin{cases} ct \le b - au, \\ a^2 + b^2 - c^2 \le 2abu, \\ b^2 - 2abu \le a^2\dfrac{u^2-t^2}{t^2-1}. \end{cases}$$

3. Найдите наименьшее значение величины

$$\frac{1}{p}\left(\frac{2q}{u} + \frac{r}{\sqrt{1-v^2}}\right),$$

где p, q, r, u, v – положительные числа, удовлетворяющие условиям

$$\begin{cases} r\sqrt{1-u^2} \le p - qv, \\ r^2 + p^2 - q^2 \le 2rp\sqrt{1-u^2}, \\ p^2 + r^2\dfrac{v^2+u^2-1}{v^2-1} \le 2pr\sqrt{1-u^2}. \end{cases}$$