Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 1 октября 2005 года по адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» №4–2005» и номера задач, решения которых Вы посылаете, например «М1961» или «Ф1968». В графе «От кого» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем Вашим адресом и необходимый набор марок (в этом конверте Вы получите результаты проверки решений).

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с Вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «Задачник «Кванта», новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором Вы учитесь.

Задачи Ф1968 – Ф1972 предлагались на Московской физической олимпиаде этого года.

Задачи М1961–М1965, Ф1968–Ф1972

М1961. В параллелограмме $ABCD$ нашлась точка Q такая, что $\angle AQB + \angle CQD = 180°$. Докажите равенства углов: $\angle QBA = \angle QDA$ и $\angle QAD = \angle QCD$ (рис. 1).

В.Произволов

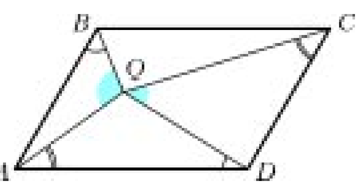

Рис. 1

М1962. Клетчатый прямоугольник полностью покрыт костями домино (каждая кость покрывает две соседние клетки). Назовем покрытие *оригинальным*, если для любого другого покрытия положение хотя бы одной кости совпадает с положением какой-либо кости оригинального покрытия. Для каких прямоугольников существует оригинальное покрытие?

И.Акулич

М1963. Натуральные числа x, y, z ($x > 2$, $y > 1$) удовлетворяют равенству $x^y + 1 = z^2$. Докажите, что число x имеет не менее 8 различных натуральных делителей.

В.Сендеров

М1964. Вневписанная окружность неравнобедренного треугольника ABC касается стороны AB в точке C' и продолжений сторон AC, BC в точках B', A'. Прямые AA' и BB' пересекаются в точке K. Докажите, что K лежит на описанной окружности треугольника ABC тогда и только тогда, когда радиусы окружностей ABC и $A'B'C'$ равны.

А.Заславский

М1965. С крыши дома спущена лестница, содержащая n ступенек. С каждой ступеньки можно перешагнуть на соседнюю; кроме того, с самой верхней ступеньки можно переступить на крышу, а с самой нижней – на землю. На каждой ступеньке укреплен указатель-стрелка, направленный вверх либо вниз. В начальный момент на одной из ступенек лестницы стоит человек. В соответствии с указателем он передвигается на соседнюю ступеньку, и сразу после этого указатель меняет направление на противоположное. Со следующей ступеньки человек опять переступает на соседнюю в соответствии с ее указателем, и сразу после этого указатель также меняет положение на противоположное. Далее человек снова и снова переходит со ступеньки на ступеньку по таким же правилам. Какое наибольшее число шагов может сделать человек, пока не сойдет с лестницы на землю или на крышу?

И.Акулич

Ф1968. Капля ртути на чистой горизонтальной поверхности стекла и капля воды на ворсистой поверхности травинки подобны друг другу по форме. Оцените отношение масс этих капель. Плотности ртути и воды равны $\rho_р = 13{,}6$ г/см^3 и $\rho_в = 1$ г/см^3, а их коэффициенты поверхностного натяжения составляют $\sigma_р = 0{,}46$ Н/м и $\sigma_в = 0{,}07$ Н/м соответственно.

С.Варламов

Ф1969. Горизонтальный закрытый теплоизолированный цилиндр разделен на две части тонким теплопроводящим поршнем, который прикреплен пружиной к одной из торцевых стенок цилиндра. Слева и справа от поршня находятся по ν молей идеального одноатомного газа. Начальная температура системы T, длина цилиндра $2l$, собственная длина пружины $l/2$, удлинение пружины в состоянии равновесия x. В поршне проделали отверстие. На сколько изменится температура системы после установления нового состояния равновесия? Теплоемкостями цилиндра, поршня и пружины пренебречь. Считать, что трения нет.

О.Шведов

Ф1970. Две очень длинные цилиндрические трубы имеют одну и ту же длину, а их радиусы равны R и $R-r$, причем $r \ll R$. Труба меньшего радиуса вставлена в бóльшую так, что их оси и торцы совпадают. Трубы заряжены равномерно по площади электрическими зарядами: внутренняя с поверхностной плотностью заряда $+\sigma$, а внешняя – с поверхностной плотностью $-\sigma$. На оси этой системы вблизи от одного из торцов измеряют напряженность электростатического поля E. Найдите, как зависит E от расстояния x до этого торца.

С.Варламов

Ф1971. Имеется бесконечная сетка, составленная из одинаковых проволочек (рис.2). Известно, что сопротивление, измеренное между точками *1* и *2* этой сетки, равно R, а между точками *1* и *3* – r (на самом деле, эти сопротивления связаны определенным образом, но не будем усложнять себе задачу). Найдите сопротивление между точками *1* и *4*, выразив его через R и r.

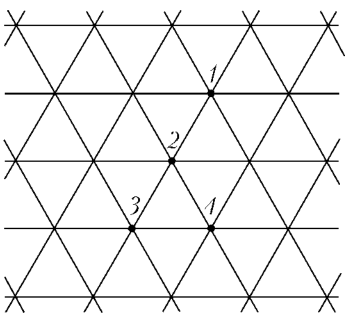

Рис. 2

Е.Антышев

Ф1972. На высоте h от горизонтальной плоскости находится тонкое непроводящее кольцо массой m и радиусом R, по которому равномерно распределен заряд q. В момент времени $t=0$ кольцо начинает падать без начальной скорости, сохраняя в полете горизонтальное положение. Одновременно с началом падения кольца включается магнитное поле, ось симметрии которого совпадает с осью кольца. Вблизи кольца магнитное поле однородно, направлено вертикально, а его индукция нарастает по закону $B = kt^2$, где k – постоянная величина. Упав на плоскость, кольцо быстро останавливается и прилипает к ней. Найдите количество теплоты, которое при этом выделится в данной системе. Сопротивлением воздуха пренебречь, ускорение свободного падения равно g.

К.Башевой

Решения задач М1936–М1945, Ф1953–Ф1957

М1936. *Какую наименьшую ширину должна иметь бесконечная полоса бумаги, чтобы из нее можно было вырезать любой треугольник площади 1?*

Рассмотрим равносторонний треугольник площадью 1, который расположен так, чтобы одна сторона лежала на краю ленты, а противоположная вершина – на другом краю. Докажем, что наименьшая ширина ленты равна высоте этого треугольника. Все другие треугольники будут иметь хотя бы одну сторону, большую чем у равностороннего. А следовательно, высота треугольника, опущенная на бóльшую сторону, будет меньше высоты равностороннего треугольника, поэтому этот треугольник не будет выходить за пределы ленты, если его расположить так, чтобы бóльшая сторона лежала на границе ленты. Легко видеть, что равносторонний треугольник нельзя расположить никаким другим способом, чтобы ширина ленты была наименьшей.

Отсюда находим высоту равностороннего треугольника, площадь которого 1:

$$h = \sqrt[4]{3}.$$

Итак, ширина ленты должна быть $h = \sqrt[4]{3}$.

Д.Семенов

М1937. *Окружности S_1, S_2, S_3 попарно касаются друг друга внешним образом (рис.1). Пусть A, B, C – точки касания S_1 и S_2, S_1 и S_3, S_2 и S_3 соответственно. Прямая AB повторно пересекает S_2 и S_3 в точках D и E соответственно. Прямая DC повторно пересекает S_3 в точке F. Докажите, что ΔDEF прямоугольный.*

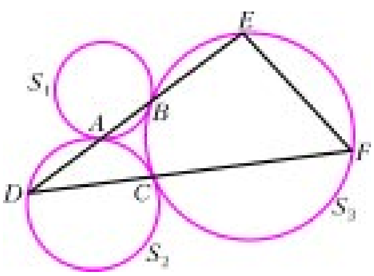

Рис. 1

Пусть O_1, O_2, O_3 – центры окружностей S_1, S_2, S_3 соответственно (рис.2). Легко видеть, что $\angle O_1BA = \angle O_1AB = \angle DAO_2 = \angle ADO_2$. Поэтому $O_1O_3 \parallel DO_2$. Аналогично, $\angle O_3FC = \angle O_3CF = \angle DCO_2 = \angle CDO_2$ (см. рис.2).

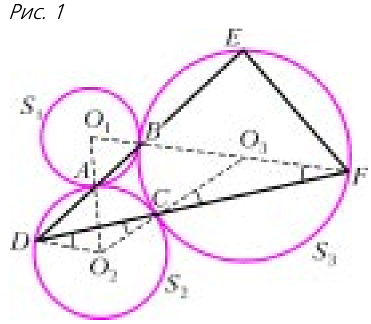

Рис. 2

Поэтому $O_3F \parallel DO_2$. Следовательно, O_1O_3F – прямая, BF – диаметр окружности S_3, и $\angle E = 90°$.

И.Рудаков

М1938. *Для любых чисел $x_1, \ldots, x_n$ докажите неравенство*

$$\max\{x_1, \ldots, x_n, -x_1 - \ldots - x_n\} \ge \frac{|x_1| + \ldots + |x_n|}{2n-1}.$$

Когда все числа $x_1, \ldots, x_n$ неотрицательны, неравенство очевидно, можно даже заменить $2n-1$ на n. Если же среди них есть отрицательное число, то можно считать без ограничения общности, что числа $x_1, \ldots, x_k$ неположительны, а $x_{k+1}, \ldots, x_n$ – неотрицательны ($1 \le k \le n$). Обозначим сумму модулей чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ буквой S. Очевидно,

$$S = -x_1 - \ldots - x_k + x_{k+1} + \ldots + x_n.$$

Предположим, что доказываемое неравенство неверно. Тогда число $S/(2n-1)$ больше как каждого из чисел