Глава 12 Обзор курса алгебры

§ 1 Числа и измерение скалярных величин

Действительные (вещественные) числа возникают и используются для измерения *скалярных величин*.

Такие величины как длина (расстояние), площадь, объем, масса, время являются положительными скалярными величинами. Для измерения скалярной величины выбирается ее некоторое значение, принимаемое за единицу (масштаб, эталон), с которым можно сравнить другие значения этой величины. Результатом этого сравнения и будет *число*.

Приведем таблицу основных единиц упомянутых величин и их обозначения.

Величина	Единица	Обозначение
Длина	метр	м
Площадь	квадратный метр	$м^2$
Объем	кубический метр	$м^3$
Масса	грамм	г
Время	секунда	с

Десятичная система мер использует и другие единицы, отличающиеся от основных в десять, сто, тысячу и т. д. раз (в сторону увеличения или уменьшения). При этом широко применяются латинские приставки. *Кило*грамм и *кило*метр – это тысяча граммов или метров соответственно. *Милли*метр и *милли*секунда – это одна тысячная метра или секунды.

Традиционно для измерения времени используется и 60-ричная система: минута – это 60 секунд, час – это 60 минут.

Десятичная система мер тесно связана с десятичной системой записи чисел. Так длина в 2325 метров может быть записана как 2 км 325 м, а длина в 1,325 метра как 1 м 325 мм или, используя *санти*метр как сотую часть метра, в виде 1 м 32 см 5 мм.

Используя десятичные дроби и степени числа 10 (как положительные, так и отрицательные), всякое положительное число A можно записать в таком виде, который принято считать стандартным: $A = a \cdot 10^k$, где число a больше или равно 1, но меньше 10, а число k (порядок числа A) – целое.

Для некоторых скалярных величин можно выбрать направление отсчета, зафиксировав некоторую начальную точку (начало отсчета). При этом результатом измерения будет число, снабженное *знаком*. Так появляются *положительные* и *отрицательные* числа.

Примеры и комментарии

1. Десятичная система мер была введена сравнительно недавно. Например, мы до сих пор употребляем старинную российскую систему торговых мер массы: 1 пуд = 40 фунтам, 1 фунт = 32 лотам, 1 лот = 32 золотникам, 1 золотник = 96 долей.
Для перевода этой меры в десятичную достаточно знать, что 1 фунт равен 409,51241 граммов.

2. Десятичная система записи натуральных чисел основана на разложении числа по степеням числа десять: $n = a_0 + a_1 10 + \ldots + a_k \cdot 10^k$, где $a_i \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Замена числа десять на другое число приводит к другим системам счисления, например, к *двоичной*, широко распространенной в информатике.

3. Стандартная запись чисел 125; 25 000; 0,2; 0,0000025 выглядит так: $1{,}25 \cdot 10^2$; $2{,}5 \cdot 10^4$; $2{,}0 \cdot 10^{-1}$; $2{,}5 \cdot 10^{-7}$.

4. Запись числа (в том или ином виде) обычно отождествляют с самим этим числом. Так, часто говорят, что действительное число – это бесконечная десятичная дробь, снабженная знаком.
Можно выделить основные классы чисел.

Множество натуральных чисел	$\boldsymbol{N}$
Множество целых чисел	$\boldsymbol{Z}$
Множество рациональных чисел	$\boldsymbol{Q}$
Множество действительных чисел	$\boldsymbol{R}$

$$\boldsymbol{N} \subset \boldsymbol{Z} \subset \boldsymbol{Q} \subset \boldsymbol{R}$$

Отношения и проценты

Самой простой скалярной величиной является длина отрезка.

Пусть выбрана единица измерения длины. Если при измерении некоторого отрезка оказалось, что единица длины укладывается в этом отрезке целое число раз, то результат измерения запишется *натуральным* (целым положительным) числом, которое показывает, во сколько раз измеряемый отрезок больше единичного.

Следующим шагом является измельчение масштаба. Может быть так, что единичный отрезок не укладывается в данном целое число раз, но найдется другой отрезок (общая мера), который укладывается целое число раз как в единичном, так и в измеряемом отрезке. В этом случае говорят, что эти отрезки *соизмеримы*. Если, скажем, одна треть единичного отрезка уложилась в измеряемом 5 раз, то результат измерения мы можем записать в виде отношения $5:3$ или дроби $\frac{5}{3}$. Так появляются положительные *рациональные* числа как отношения натуральных чисел. Общая мера соизмеримых отрезков находится неоднозначно, что приводит к разным записям одного и того же рационального числа. Например, $\frac{5}{3}=\frac{10}{6}=\frac{15}{9}$ и т. п.

Важнейшим открытием античной математики (его связывают с именем Пифагора) является обнаружение пар несоизмеримых отрезков. Так, диагональ квадрата оказалась несоизмеримой с его стороной. На языке чисел это означает, что не существует рационального числа, которое является длиной диагонали квадрата, когда за единицу масштаба принята его сторона. Однако ясно, что такая длина должна реально существовать и нам просто не хватает средств (чисел), чтобы ее записать. Так появились иррациональные (не рациональные) числа, с помощью которых можно записать длины отрезков, не соизмеримых с единичным. В частности, длина d диагонали квадрата со стороной 1 является иррациональным числом.

Отношение одного значения величины к другому может быть выражено не только числом, но также и в *процентах*. При этом отношение, равное единице, принимается за 100% – сто процентов. Можно сказать, что процент – это одна сотая единицы измерения.

Примеры и комментарии

1. Разложение обыкновенных дробей в десятичные:

$\frac{5}{3}=1{,}666...=1{,}(6)$ – периодическая десятичная дробь;

$\frac{7}{5}=1{,}400...=1{,}4$ – конечная десятичная дробь;

$\frac{17}{15}=1{,}133...=1{,}1(3)$ – периодическая десятичная дробь.

2. Иррациональные числа:

$\pi = 3{,}1415926536…$

$\sqrt{2} = 1{,}41421356$

$\sqrt{3} = 1{,}732050807…$

$\sqrt{10} = 3{,}1622776601…$

3. При работе с процентами надо привыкнуть к стандартным оборотам речи и стараться переводить проценты в отношения.

Примеры. Если a на 25% больше b, то это означает, что $a = 1{,}25b$. При этом $b = 0{,}8a$ (а не $0{,}75a$), т. е. b меньше a на 20%. Если a на 20% меньше b, то это означает, что $a = 0{,}8b$. При этом $b = 1{,}25a$ (а не $1{,}2a$), т. е. b больше a на 25%.

О том же самом можно сказать иначе.

Если a составляет 125% от b, то это означает, что $a = 1{,}25b$ или что a на 25% больше b. При этом b составляет 80% от a, т. е. $b = 0{,}8a$ и b меньше a на 20%.

Если дважды произошло повышение величины a на 25%, то получится величина $b = 1{,}25 \cdot 1{,}25a = 1{,}56a$, т. е. суммарно произошло повышение на 56% (а не на 50%).

Аналогично при двукратном понижении на 20% отношение будет равно $0{,}8 \cdot 0{,}8 = 0{,}64$, т. е. снижение произойдет на 36% (а не на 40%).

Беседа Числа и счет предметов

Примеры и комментарии

Делимость натуральных чисел

1. *Делитель* числа m – это всякое число n, на которое делится m.

Так, числа 1, 2, 3, 4, 6 и 12 являются натуральными делителями числа 12. Других натуральных делителей у этого числа нет.

2. *Простое число* – это число $m > 1$, у которого нет других делителей, кроме самого себя и единицы (которые, в свою очередь, всегда присутствуют среди делителей: $m = m \cdot 1$). Числа 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47 – простые. Здесь перечислены **все** простые числа, меньшие 50.

Если обозначить через $\pi(x)$ число простых чисел, меньших x, то $\pi(100) = 25$. Теорема Евклида утверждает, что $\pi(x)$ становится сколь угодно большим. Доказательство теоремы Евклида очень просто. Если бы число простых чисел было конечно, то можно было бы найти самое большое простое число, которое обозначим P. Составим произведение всех простых чисел от 2 до P и прибавим 1: $N = 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot P + 1$. Число $N > P$ и не делится ни на одно из простых чисел. Значит, оно простое, что противоречит сделанному предположению.

3. Любое натуральное число можно разложить по степеням простых чисел. Например, $3000 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^3$.

Параллельно с задачами измерения величин возникали задачи счета предметов, которые имели дело прежде всего с целыми или еще более узко, с натуральными числами. Задачи эти возникли из необходимости совершать различные действия с множествами, наборами конкретных объектов.

1. *Сравнение*. Взяв два мешка с предметами, мы можем сравнить между собой их количество, выкладывая эти предметы по одному и составляя пары. На современном языке мы говорим, что мы, взяв два множества, можем сопоставлять их элементы друг другу, составляя пары.

А Б В Г Д Е　　　1 2 3 4 5

А1; Б2; В3; Г4; Д5

Мы можем обнаружить, что количество предметов в мешках *одинаково*. Натуральное число – это и есть обозначение, знак, символ, слово, которое мы связываем со всеми мыслимыми множествами, имеющими одинаковое количество элементов. На первом этапе развития выбирали стандартные множества и с ними сравнивали другие. Так, считая предметы по пальцам, человек различал множества, имеющие такое же количество предметов, как, скажем, пальцы на одной руке. Позже появилось обозначение этого количества – слово *пять* (разумеется, различное на разных языках) или символ 5 (как в принятой индийско-арабской системе обозначений) или V (как в римской), или є (как в древнерусской) и т. п.

2. *Больше – меньше*. Сравнение двух множеств немедленно приводит к тому, что если количество элементов в них неодинаково, то в одном из них элементов больше, чем в другом – составляя пары, мы либо одновременно исчерпаем элементы в обоих множествах, либо они кончатся в одном из них, а в другом еще останутся.

Так мы приходим к отношению больше – меньше, для которого используют значки > и <. Итак,

для любых двух натуральных чисел m и n верна одна и только одна из трех возможностей: $m = n$, $m < n$ или $m > n$.

Важнейшим и совершенно естественным свойством неравенства является его транзитивность:

если $m < n$ и $n < p$, то $m < p$.

3. *Сложение*. Это действие имеет практическую основу счета числа элементов при объединении двух множеств (ссыпании предметов из двух мешков в один). Разумеется, мы различаем между собой все предметы в обоих мешках, т. е. считаем, что у двух объединяемых множеств нет общих элементов.

Если через $|A|$ обозначать число элементов в множестве A, значками $\cup$ и $\cap$ обозначать объединение и пересечение двух множеств, то можно записать

$|A \cup B| = |A| + |B|$, если $|A \cap B| = 0$, или иначе, используя знак пустого множества: если $A \cap B = \varnothing$.

Из этого представления можно вывести свойства сложения натуральных чисел.

4. *Умножение*. Это действие имеет такую практическую основу: как сосчитать число всевозможных пар (a, b), где первый элемент произвольно взят из некоторого множества A, а второй элемент b – из множества B. Естественно составить *таблицу* всевозможных пар, сосчитать число элементов в этой таблице и получить число называемое произведением чисел m и n, где $m = |A|$, $n = |B|$.

Само множество пар, составленных из элементов множеств A и B называют произведением A и B и обозначают $A \times B$. Итак,

правило произведения: $|A \times B| = |A| \cdot |B|$.

А, Б, В;		1, 2
А1	Б1	В1
А2	Б2	В2

Свойства умножения натуральных чисел и его связь со сложением можно получить из описанной нами схемы определения этих действий.

В итоге, объединяя все построения, мы получим множество $\boldsymbol{Q}$ рациональных чисел, в котором определены два арифметических *действия*, сложение и умножение, которые подчиняются известным законам и имеют обратные (с естественной оговоркой и невозможности деления на нуль).

На это же множество $\boldsymbol{Q}$ можно распространить *отношение* больше – меньше с сохранением известных свойств неравенств и их связей с арифметическими действиями.

Примеры и комментарии

Правила комбинаторики

Правила сложения и умножения, т. е. формулы $|A \cup B| = |A| + |B|$ (если $A \cap B = \varnothing$) и $|A \times B| = |A| \cdot |B|$ являются основными. С их помощью можно решать различные комбинаторные задачи. Напомним основные стандартные схемы.

1) Число слов, состоящих из k букв, в алфавите из n букв.

а) Если буквы выбираются независимо друг от друга (с возможными повторениями): $\boldsymbol{n^k}$.

б) Если буквы выбираются независимо друг от друга без повторений (размещения): $\boldsymbol{n\,(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}$.

в) Если длина слова k совпадает с числом букв в алфавите ($k = n$) и буквы не повторяются, т. е. просто переставляются (перестановки): $\boldsymbol{n! = 1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n}$.

2) Число подмножеств из k букв в алфавите из n букв (сочетания):

$\dfrac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!}$, или $\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.

3) Число анаграмм – число перестановок n букв, среди которых k различных, причем указано количество одинаковых букв: n_1, n_2, …, n_k ($n_1 + \ldots + n_k = n$):

$\dfrac{\boldsymbol{n!}}{\boldsymbol{n_1!\cdot\ldots\cdot n_k!}}$.

4) Число разбиений натурального числа n в *упорядоченную* сумму k неотрицательных слагаемых, т. е. число представлений вида $n = n_1 + \ldots + n_k$, где $n_i \geq 0$:

$\dfrac{\boldsymbol{(n+k-1)!}}{\boldsymbol{n!(k-1)!}}$.

Это число совпадает с числом перестановок двух видов предметов (палочек и перегородок между ними) в заданном количестве (n палочек и $k-1$ перегородка).

§ 2 Числа и неравенства

Примеры и комментарии

1. Различные формы записи неравенств

1) Замена $>$ на $<$: записи $a > b$ и $b < a$ считаются равносильными.

2) Нестрогие неравенства: запись $a \ge b$ означает, что $a > b$ или $a = b$. Аналогично для $a \le b$. В частности, неравенства $3 \ge 2$ и $3 \ge 3$ являются верными.

3) Двойные неравенства: запись $1 < x < 2$ означает, что одновременно выполняются неравенства $x > 1$ и $x < 2$. Нельзя записывать $1 < x > 3$ (из условия $x > 3$ следует условие $x > 1$). Кроме того, в записи $a < x < b$ надо следить, чтобы выполнялось $a < b$. Нельзя записать $-1 < x < -2$ (таких x нет).

2. Записи промежутков числовой оси

1) $x < a$: $(-\infty; a)$
2) $x \ge b$: $[b; +\infty)$
3) $a < x < b$: $(a; b)$
4) $a \le x \le b$: $[a; b]$

Аналогично записываются другие случаи.

3. Из основных свойств неравенств можно выводить другие их свойства.

1) Сложение неравенств

Доказать: $a > b$ и $c > d$ $\Rightarrow$ $a + c > b + d$.

$a > b \Rightarrow a + c > b + c$ – сдвиг, $c > d$ $\Rightarrow$ $b + c > b + d$ – сдвиг, $a + c > b + c$ и $b + c > b + d$ $\Rightarrow$ $a + c > b + d$ – транзитивность.

2) Сравните a^2 и a^3, если известно, что $0 < a < 1$.

$a < 1$ и $a > 0$ $\Rightarrow$ $a^2 < a$ – умножение, $a^2 < a$ и $a > 0 \Rightarrow a^3 < a^2$ – это ответ.

Конечно, полезно запомнить, что при возведении в степень положительного числа, меньшего единицы, число уменьшается.

Выберем отрезок, который примем за единицу измерения длины. В выбранном масштабе длина любого отрезка выразится положительным действительным числом.

Возьмем прямую, выберем на ней точку O – начало отсчета, – отложим в какую-либо сторону от точки O отрезок OE, равный выбранному единичному отрезку. Направление от O к E будем называть положительным. Мы построили *числовую ось*, или иначе, *координатную прямую*.

Возьмем произвольное положительное число x и отложим от точки O в положительном направлении отрезок OX длины x. Числу нуль сопоставим точку O, отрицательному числу x точку X такую, что длина отрезка OX равна $(-x)$, или $|x|$, причем отрезок отложен в направлении, противоположном положительному (отрицательном). Тем самым, мы каждому действительному числу x поставили в соответствие точку X числовой оси. Разным числам x будут соответствовать разные точки X, и каждая точка X является образом некоторого числа, а именно числа $x = |OX|$, если направление от O к X положительно, и числа $x = -|OX|$ в противном случае.

Мы построили взаимно однозначное соответствие между действительными числами и точками числовой оси.

Это позволяет отождествлять действительные числа и точки числовой оси.

Отношение «больше – меньше» для отрезков переносится на отношение «больше – меньше» для положительных чисел: если $x < y$, то точка $X(x)$, соответствующая числу x, лежит левее точки $Y(y)$. Отрицательные числа откладываются слева от точки O (на отрицательной полуоси) симметрично соответствующим положительным числам.

Повторим основные свойства неравенств.

1. $a < b$ и $b < c \Rightarrow a < c$ – транзитивность неравенства.
2. $a < b \Rightarrow a + c < b + c$ – сдвиг неравенства вдоль числовой оси.
3. $a < b$ и $c > 0$ $\Rightarrow$ $ac < bc$ – растяжение (умножение на положительное число).
4. $a < b \Rightarrow -a > -b$ – симметрия.

Основные задачи на неравенства с числами

1. *Сравнение чисел*

Наиболее просто сравнивать числа, записанные в виде десятичных дробей. Так, ясно, что

$3200 > 3199$; $1{,}23 > 1{,}21$; $0{,}01 > 0{,}009$; $-21 > -23$;
$-3{,}14 > -3{,}141$; $-0{,}9 > -0{,}99$.

Сравнивать между собой по-разному записанные числа удобнее всего, записав их в виде десятичных дробей (с достаточным для сравнения количеством знаков).

Пример. Расположить числа $\frac{22}{7}$; π; $3{,}14$; $\sqrt{10}$; $\frac{355}{113}$ в порядке возрастания.

$$\frac{22}{7} = 3{,}142\ldots$$
$$\pi = 3{,}1415926\ldots$$
$$3{,}14 = 3{,}140$$
$$\sqrt{10} = 3{,}162\ldots$$
$$\frac{355}{113} = 3{,}1415929\ldots$$

По ходу вычислений пришлось, чтобы сравнить π и $\frac{355}{113}$, найти 7 знаков после запятой.

2. *Решение неравенств с помощью преобразований* (не прибегая к рассмотрению свойств функций)

Пример. Решить неравенство $\frac{x+9}{3} - \frac{x-1}{5} > 2$.

Для решения достаточно применять свойства неравенств и следить за сохранением равносильности.

$\frac{x+9}{3} - \frac{x-1}{5} > 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 5(x + 9) - 3(x - 1) > 30$: умножение на положительное число 15;

$\Leftrightarrow 5x + 45 - 3x + 3 > 30$: алгебраические преобразования;

$\Leftrightarrow 2x > -18$: перенос числа 48 из одной части неравенства в другую (сдвиг на противоположное число -48);

$\Leftrightarrow x > -9$: деление на 2 (умножение на положительное число $\frac{1}{2}$).

Ответ: $x > -9$, или $x \in (-9; +\infty)$.

Примеры и комментарии

1. *Целая часть числа*

Каждое число x можно записать в виде суммы целого числа и неотрицательного числа, меньшего единицы: $x = x_0 + \alpha$, где $x_0 \in \boldsymbol{Z}$, $0 \le \alpha < 1$. Число x_0 называется целой частью числа x и обозначается $[x]$. α – это дробная часть числа x: $\alpha = x - [x]$. Так, $[3{,}14] = 3$. Заметьте, что при нахождении целой части отрицательного числа надо шагать влево, а не вправо:

$$[-3{,}14] = -4.$$

Пример. Найдите наименьшее целое решение неравенства

$$\frac{11-2x}{5} + \frac{3-2x}{2} < 0.$$

Решаем неравенство:

$22 - 4x + 15 - 10x < 0 \;\Leftrightarrow\; 14x > 37$
$\Leftrightarrow\; x > \frac{37}{14}$. Находим целую часть числа $\frac{37}{14}$: $\left[\frac{37}{14}\right] = 2$. Ответ: $x = 3$.

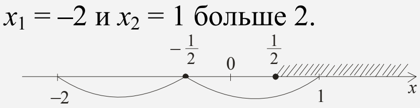
2. *Доказательство неравенств между числовыми выражениями*

Пример. Не применяя калькулятор, выяснить, что больше $\sqrt{6} + \sqrt{10}$ или $\sqrt{5} + \sqrt{11}$. Пишем любой знак неравенства между выражениями и совершаем преобразования: $\sqrt{6} + \sqrt{10} < \sqrt{5} + \sqrt{11}$
$\Leftrightarrow\; 6 + 2\sqrt{60} + 10 < 5 + 2\sqrt{55} + 11$
$\Leftrightarrow\; \sqrt{60} < \sqrt{55} \;\Leftrightarrow\; 60 < 55$ – это неверно (как неверно и равенство $60 = 55$), следовательно, нужно поменять знак неравенства в ответе: $\sqrt{6} + \sqrt{10} > \sqrt{5} + \sqrt{11}$.

3. *Решение неравенств с модулем, используя их геометрический смысл*

Решить неравенство
$|x + 2| - |x - 1| > 2$.

Задачу можно прочесть так: найти на числовой оси точки, разность расстояний от которых до точек $x_1 = -2$ и $x_2 = 1$ больше 2.



Ответ: $x > \frac{1}{2}$, или $x \in \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

§ 3 Тождественные преобразования

Примеры и комментарии

1. Упростить выражение
$2a(3a + 4) - 3a(2a + 1)$.
$2a(3a + 4) - 3a(2a + 1) =$
$= 6a^2 + 8a - 6a^2 - 3a = 5a$.
В ходе преобразований применялись:

– дистрибутивный закон при раскрытии скобок;

– коммутативный и ассоциативный законы при умножении – $2a \cdot 3a = (2 \cdot 3) \cdot (a \cdot a) = 6a^2$ и т. п.

– приведение подобных членов, которое также является следствием дистрибутивного закона – $6a^2 - 6a^2 = (6 - 6)\, a^2 = 0 \cdot a^2 = 0$,
$8a - 3a = (8 - 3)\, a = 5a$.

2. Упростить выражение
$4ab + 2(a - b)^2$.
$4ab + 2(a - b)^2 =$
$= 4ab + 2(a^2 - 2ab + b^2) =$
$= 4ab + 2a^2 - 4ab + 2b^2 =$
$= 2a^2 + 2b^2 = 2(a^2 + b^2)$.

3. Разложить на множители
$a^2b^4 - b^4 - a^2b^2 + b^2$.
$a^2b^4 - b^4 - a^2b^2 + b^2 =$
$= a^2b^4 - a^2b^2 - b^2\,(b^2 - 1) =$
$= a^2b^2\,(b^2 - 1) - b^2(b^2 - 1) =$
$= b^2\,(b^2 - 1)(a^2 - 1) =$
$= b^2\,(a - 1)(a + 1)(b - 1)(b + 1)$.

4. Выделить целую часть

$$\frac{3x+1}{x-2} = 3 + \frac{3x+1}{x-2} - 3 =$$

$$= 3 + \frac{1+6}{x-2} = 3 + \frac{7}{x-2}\,.$$

1. *Применение основных законов сложения и умножения многочленов*

Коммутативный закон

$A + B = B + A \qquad A \cdot B = B \cdot A$

Ассоциативный закон

$A + (B + C) = (A + B) + C \qquad A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$

Дистрибутивный закон

$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$$
$$(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$$

2. *Формулы сокращенного умножения*

$$(A - B)(A + B) = A^2 - B^2$$
$$(A \pm B)(A^2 \mp AB + B^2) = A^3 \pm B^3$$
$$(A \pm B)^2 = A^2 \pm 2AB + B^2$$
$$(A \pm B)^3 = A^3 \pm 3A^2B + 3AB^2 \pm B^3$$

3. *Разложение на множители*

Вынесение общего множителя:
$$AB + AC + AD = A(B + C + D).$$
Группировка: $AC - BD + BC - AD =$
$= AC - AD + BC - BD =$
$= A(C - D) + B(C - D) = (A + B)(C - D)$.
Применение формул сокращенного умножения:
$z^2 - x^2 + 2xy - y^2 = z^2 - (x^2 - 2xy + y^2) =$
$= z^2 - (x - y)^2 = (z - x + y)(z + x - y)$.
Разложение квадратного трехчлена, зная его корни x_1 и x_2:
$$x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2).$$

4. *Сокращение дробей*

$$\frac{AC}{BC} = \frac{A}{B}$$

5. *Приведение дробей к общему знаменателю*

$$\frac{A}{B} + \frac{C}{D} = \frac{AD + BC}{BD}$$

6. *Почленное деление*

$$\frac{A+B}{C} = \frac{A}{C} + \frac{B}{C}$$

Различные полезные тождества

1. $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1})$

2. $a^{2k+1} + b^{2k+1} = (a+b)(a^{2k} - a^{2k-1}b + \ldots - ab^{2k-1} + b^{2k})$

3. $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$

4. $(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

5. $(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$

6. $(a^2+b^2)(x^2+y^2) = (ax+by)^2 + (ay-bx)^2$

7. $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)$

8. $x(x+1)(x+2)(x+3) + 1 = (x^2+3x+1)^2$

9. $\dfrac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + \dfrac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)} + \dfrac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} = 1$

10. $\dfrac{a(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + \dfrac{b(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)} + \dfrac{c(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} = x$

Последние два тождества можно доказать без выкладок, используя следующее свойство: если два многочлена от буквы x степени ≤ 2 принимают равные значения при трех различных значениях x, то они тождественно равны.

Примеры и комментарии

4. Упростить выражение

$$\frac{a^2+4a+4}{a^2-4} : (a+2).$$

$$\frac{a^2+4a+4}{a^2-4} : (a+2) =$$

$$= \frac{(a+2)^2}{(a-2)(a+2)(a+2)} = \frac{1}{a-2}.$$

5. Упростить выражение

$$\frac{2a}{a^2-9} - \frac{1}{a+3}.$$

$$\frac{2a}{a^2-9} - \frac{1}{a+3} =$$

$$= \frac{2a}{(a-3)(a+3)} - \frac{1}{a+3} =$$

$$= \frac{2a-a+3}{(a-3)(a+3)} = \frac{a+3}{(a-3)(a+3)} =$$

$$= \frac{1}{a-3}.$$

6. $\dfrac{a}{b} = 2$. Вычислить $\dfrac{a^2-b^2}{ab}$.

$$\frac{a^2-b^2}{ab} = \frac{a^2}{ab} - \frac{b^2}{ab} = \frac{a}{b} - \frac{b}{a} =$$

$$= 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

7. Построить график функции $y = \dfrac{2x}{x-1}$.

Сначала выделяем целую часть: $\dfrac{2x}{x-1} = 2 + \dfrac{2}{x-1}$.

Запись $y = 2 + \dfrac{2}{x-1}$ или $y - 2 = \dfrac{2}{x-1}$ подсказывает, как построить требуемый график, исходя из графика стандартной функции $y = \dfrac{1}{x}$.

Беседа Буквенные выражения и их преобразования

Примеры и комментарии

1. Примеры числовых выражений:

   а) 3 – одно число также считается выражением;

   б) $(3 + 5) \times 2$ – порядок действий указан с помощью скобок;

   в) $3 + 5 \times 2$ – имеется общепринятая договоренность о порядке действий. Это позволяет уменьшить число скобок;

   г) $\dfrac{2+3}{2\times 2-4}$ – это выражение не имеет смысла, так как при вычислении его значения пришлось бы делить на 0, что не определено;

   д) $\sqrt{2\times 2-5}$ – это выражение также не имеет смысла, так как при его вычислении пришлось бы извлекать квадратный корень из отрицательного числа. Однако при расширении числовой системы такое выражение может быть осмысленным. Так, до Средних веков считались бессмысленными выражения, аналогичные выражению $2 \times 2 - 5$, так как еще не были введены отрицательные числа.

2. Буквенные выражения часто классифицируют, указывая характер используемых операций – целые выражения, рациональные, иррациональные, логарифмические, тригонометрические и т. п. Разумеется, такая классификация является условной и предназначена для того, чтобы обратить внимание на конкретные используемые операции.

Словарь алгебры

Выражение – числа и буквы, соединенные знаками действий в определенной последовательности.

Одночлен – выражение, записанное как произведение числа и степеней различных букв.

Многочлен – выражение, записанное в виде суммы одночленов, среди которых нет подобных.

Рациональная дробь – выражение, записанное в виде отношения двух многочленов.

Числовое выражение – выражение, составленное из одних чисел.

Значение числового выражения – число, получаемое в результате выполнения всех записанных действий. Если значение выражения подсчитать нельзя, выражение называют *бессмысленным* (не имеющим смысла).

Значение буквенного выражения – значение того числового выражения, которое получается при подстановке данных числовых значений букв.

Допустимые значения букв – множество тех значений букв, при подстановке которых получается осмысленное числовое выражение.

Равенство выражений – два выражения, соединенные знаком равенства.

Преобразование выражения – переход от одного выражения к другому, записываемый с помощью знака равенства.

Напомним основные исторические вехи в развитии алгебры.

Диофант (III в.) – обозначение неизвестных величин буквами.

Аль-Хорезми (IX в.) – выделение алгебры в качестве самостоятельного раздела математики; распространение позиционной системы счисления.

Декарт (1596–1650) – современная буквенная запись выражений.

Галуа (1811–1832) – введение алгебраических структур, различающихся операциями и их свойствами.

Аль-Хорезми

Декарт

Галуа

Комментарий к понятию равенства

Термин *равенство* может использоваться в разных смыслах. Записанное равенство двух выражений понимается как высказывание (утверждение).

Равенство числовых выражений является безусловным (постоянным) высказыванием. Оно либо верно (если выражения имеют совпадающие числовые значения), либо неверно (если значения не совпадают). Равенство, соединяющее два числовых выражения, из которых хотя бы одно не имеет смысла, также считается бессмысленным.

Равенство буквенных выражений является переменным высказыванием. При подстановке одних значений букв оно может оказаться верным (истинным), при подстановке других – неверным (ложным). Оно может также оказаться бессмысленным, если при подстановке одно из выражений теряет смысл.

Равенство, верное при подстановке любых допустимых значений букв, называется *тождественным*, или просто *тождеством*.

Под *формальным* (или почленным) равенством понимают равенство выражений совпадающих, одинаково построенных. Разумеется, формальное равенство является тождественным.

Равенства по определению. Удобно условливаться считать равными некоторые по-разному записанные выражения. При этом надо следить за тем, чтобы не нарушалось тождественное равенство, т. е. чтобы значения приравниваемых выражений совпадали.

Так, считаются равными одночлены, различающиеся лишь порядком сомножителей. Многочлены, отличающиеся порядком расположения слагаемых, также считаются равными. Определение равенства дробей более сложно.

Пусть A, B, C, D – многочлены, причем B и D – ненулевые многочлены. Тогда дроби $\frac{A}{B}$ и $\frac{C}{D}$ считаются равными, если равны многочлены AD и BC:

$$\boxed{\frac{A}{B} = \frac{C}{D} \Leftrightarrow AD = BC}.$$

Примеры и комментарии

Стандартный вид. Среди равных друг другу выражений часто стараются выбрать одно из них, которое принимается в качестве *стандартного*. Выбор стандартного представителя в классе равных между собой выражений облегчает сравнение результатов, запись ответа и т. п.

Так, стандартным видом одночлена считается такая его запись, при которой числовой коэффициент стоит первым (при этом коэффициент 1 опускается), а буквы расположены в алфавитном порядке (если они взяты из одного алфавита, где имеется принятый порядок букв).

Стандартным видом многочлена с одной буквой считается выражение, в котором одночлены записаны в порядке возрастания или в порядке убывания степеней (уже здесь нет однозначности выбора). О стандартном виде многочлена с несколькими буквами можно договариваться по-разному.

Стандартным видом рационального выражения обычно считается выражение, записанное в виде несократимой рациональной дроби.

При выборе стандартного вида становится осмысленной задача *приведения выражения к стандартному виду*. При этом приведении обычно выполняются различные тождественные преобразования многочленов.

§ 4 Степени и корни

Примеры и комментарии

1. Упростить выражение

$2\sqrt{2}\cdot 5\sqrt{3}\cdot\sqrt{6} =$

$=(2\cdot 5)\cdot(\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{6}) = 10\sqrt{6}\cdot\sqrt{6} =$

$= 10\cdot 6 = 60.$

2. Вычислить $(10^{-10}\cdot 100^{6})^{-1} =$

$= (10^{-10}\cdot 10^{12})^{-1} = (10^{2})^{-1} = 10^{-2} =$

$= 0{,}01.$

3. Сократить дробь $\dfrac{x-5\sqrt{x}+6}{\sqrt{x}-2}$.

$$\frac{x-5\sqrt{x}+6}{\sqrt{x}-2} = \frac{\left(\sqrt{x}\right)^2-5\sqrt{x}+6}{\sqrt{x}-2} =$$

$$= \frac{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}-3\right)}{\sqrt{x}-2} = \sqrt{x}-3.$$

4. Упростить выражение

$\sqrt{\left(\sqrt{3}-1\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{3}-2\right)^2}$.

$$\sqrt{\left(\sqrt{3}-1\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{3}-2\right)^2} =$$

$$= \left|\sqrt{3}-1\right|+\left|\sqrt{3}-2\right| =$$

$$= \sqrt{3}-1+2-\sqrt{3} = 1.$$

5. Вычислить значение выражения

$2x^2-6x+3$ при $x=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$.

$$2\cdot\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^2-6\cdot\frac{3-\sqrt{5}}{2}+3 =$$

$$= \frac{9-6\sqrt{5}+5}{2}-3\left(3-\sqrt{5}\right)+3 =$$

$$= 7-3\sqrt{5}-9+3\sqrt{5}+3 = 1.$$

6. Решить уравнение $4^{x+1}=\dfrac{1}{2}$.

$$4^{x+1}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow 2^{2(x+1)}=2^{-1} \Leftrightarrow$$

$$2(x+1)=-1 \Leftrightarrow 2x=-3;\ x=-\frac{3}{2}.$$

Возведение в степень – извлечение корня

Корень n-ой степени из числа (n – натуральное число)	Любое число, n-ая степень которого равна данному числу.
Квадратный (кубический) корень из числа	Термин, принятый для обозначения корня второй (третьей) степени из числа.
Радикал n-ой степени	Знак $\left(\sqrt[n]{\ }\right)$, употребляемый для обозначения специально выбранного корня n-ой степени: если n четно, то запись $\sqrt[n]{x}$ употребляется лишь для $x\ge 0$ и обозначает *неотрицательный* корень n-ой степени из числа x; если n – нечетно, то запись $\sqrt[n]{x}$ используется для любого (действительного) числа x и обозначает единственный существующий (действительный) корень n-ой степени из числа x.
Степень с рациональным показателем	Определяется для положительного числа x и произвольного рационального числа r, записанного в виде дроби $r=\dfrac{m}{n}$, где m – целое, n – натуральное число, следующим образом: $x^r=\left(\sqrt[n]{x}\right)^m$.

В алгебре принято считать корнем n-ой степени из числа x *любое* число y, n-ая степень которого равна x: $y^n=x$. При этом считается, что число n – натуральное число. При таком определении надо отдельно обсуждать вопрос о существовании и количестве корней n-ой степени. Ответ на этот вопрос зависит от того, какие числа n и x мы рассматриваем.

Специальный знак для корня вводят лишь тогда, когда имеют в виду какой-то однозначно определенный корень n-ой степени. Для действительных чисел x в качестве такого знака используется радикал (который также часто называют корнем). Мы привели обычно принятый способ употребления знака $\sqrt[n]{\ }$. Заметим, что при $n=2$ запись упрощают, опуская n.

Свойства степеней

а) $x^{r_1} \cdot x^{r_2} = x^{r_1+r_2}$

б) $\dfrac{x^{r_1}}{x^{r_2}} = x^{r_1-r_2}$

в) $\left(x^{r_1}\right)^{r_2} = x^{r_1 r_2}$

Свойства радикалов

а) $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$; $\sqrt[n]{a^n} = a$ $(a \ge 0)$

б) $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$ $(a, b \ge 0)$; $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ $(a \ge 0,\ b > 0)$

в) $\sqrt[mn]{a} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}$ $(a \ge 0)$.

Возведение в степень – логарифмирование

Основание степени a	Произвольное положительное число, отличное от единицы.
Степень с произвольным показателем a^x	Результат возведения основания в степень, равную данному действительному числу.
Логарифм числа по данному основанию $b = a^x$ $\Leftrightarrow x = \log_a b$	Показатель степени, в которую надо возвести основание, чтобы получить данное число.
Двоичный логарифм, десятичный логарифм, натуральный логарифм	Логарифм по основанию 2, по основанию 10, по основанию $e \approx 2{,}7$. $\log_2 b$, $\lg b$, $\ln b$

Свойства логарифмов

а) $\log_a x_1 x_2 = \log_a x_1 + \log_a x_2$

б) $\log_a \dfrac{x_1}{x_2} = \log_a x_1 - \log_a x_2$

в) $\log_a x^k = k \log_a x$

Числа x, x_1, x_2 считаются положительными.

Примеры и комментарии

7. Освободиться от иррациональности в знаменателе.

$$\frac{\sqrt{14}}{2\sqrt{2}-\sqrt{7}} =$$

$$= \frac{\sqrt{14}(2\sqrt{2}+\sqrt{7})}{(2\sqrt{2}-\sqrt{7})(2\sqrt{2}+\sqrt{7})} =$$

$$= \frac{2\sqrt{2\cdot 14}+\sqrt{14}\cdot\sqrt{7}}{8-7} =$$

$$= 4\sqrt{7}+7\sqrt{2}.$$

8. Вычислить

$$\frac{27\cdot 225^{10}}{3^{22}\cdot 5^{18}} = \frac{3^3\cdot(15^2)^{10}}{3^{22}\cdot 5^{18}} = \frac{3^3\cdot 15^{20}}{3^{22}\cdot 5^{18}} =$$

$$= \frac{3^{20}\cdot 5^{20}}{3^{19}\cdot 5^{18}} = \frac{3^{20}}{3^{19}}\cdot\frac{5^{20}}{5^{18}} = 3\cdot 5^2 = 75$$

9. Упростить выражение

$$\left(\sqrt{\sqrt{5}-1}+\sqrt{\sqrt{5}+1}\right)^2 =$$

$$= \left(\sqrt{\sqrt{5}-1}\right)^2 + 2\sqrt{\left(\sqrt{5}-1\right)\left(\sqrt{5}+1\right)} +$$

$$+ \left(\sqrt{\sqrt{5}+1}\right)^2 = \sqrt{5}-1+2\sqrt{5-1}+$$

$$+\sqrt{5}+1 = 2\sqrt{5}+4$$

10. Найти значение выражения $\dfrac{2\sqrt{3}x^5}{y^3}$ при $x=\sqrt{5}$, $y=\sqrt{15}$.

$$\frac{2\sqrt{3}\cdot\left(\sqrt{5}\right)^5}{\left(\sqrt{15}\right)^3} = \frac{2\cdot\sqrt{3}\cdot\left(\sqrt{5}\right)^5}{\left(\sqrt{5}\right)^3\cdot\left(\sqrt{3}\right)^3} =$$

$$= \frac{2\cdot\left(\sqrt{5}\right)^2}{\left(\sqrt{3}\right)^2} = \frac{2\cdot 5}{3} = \frac{10}{3}.$$

§ 5 Уравнения

Примеры и комментарии

Решить уравнения.

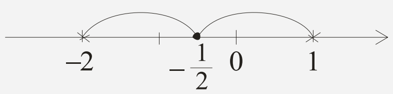
1. $\dfrac{1}{x-2}=\dfrac{2}{x+1}$

Уравнение приводится к линейному $x + 1 = 2(x - 2)$ с ограничением $x \neq 2, x \neq -1$.

Ответ: $x = 5$.

2. $|2x + 1| = 3$

Уравнение приводится к стандартному линейному уравнению с модулем: $\left|x+\dfrac{1}{2}\right|=\dfrac{3}{2}$. Для нахождения ответа полезно использовать числовую ось



Ответ: $x_1 = -2$; $x_2 = 1$.

3. $\dfrac{x}{x-2}=\dfrac{12}{x+1}$

Уравнение приводится к квадратному $x^2 + x = 12x - 24 \Leftrightarrow x^2 - 11x + 24 = 0$ с ограничением $x \neq 2$; $x \neq -1$. Корни находятся с помощью теоремы Виета.

Ответ: $x_1 = 3$; $x_2 = 8$.

4. $x^6 - x^3 - 2 = 0$

Заменой $x^3 = y$ уравнение приводится к квадратному $y^2 - y - 2 = 0$. Его корни $y_1 = -1$, $y_2 = 2$. Далее решаются степенные уравнения $x^3 = -1$ и $x^3 = 2$, имеющие по одному действительному корню.

Ответ: $x_1 = -1$; $x_2 = \sqrt[3]{2}$.

Основные понятия

Неизвестное	Буква для обозначения какой-либо неизвестной величины.
Уравнение	Два выражения с неизвестными, соединенные знаком равенства.
Область допустимых значений (ОДЗ) уравнения	Множество значений, которые могут принимать неизвестные, входящие в уравнение.
Решение уравнения	Набор значений неизвестных (из ОДЗ), при подстановке которых уравнение превращается в верное числовое равенство.
Корень уравнения	Другое название для решения уравнения, употребляемое для уравнений с одним неизвестным.
Решить уравнение	Описать все решения уравнения. При этом описании может оказаться, что уравнение решений не имеет.

Стандартные уравнения

Линейное уравнение	$ax + b = 0$ $(a \neq 0)$	Корень $x=-\dfrac{b}{a}$
Уравнение с модулем	$\|x - a\| = b$ $b > 0$	Корни: $x = a \pm b$
Квадратное уравнение	$x^2 + px + q = 0$ $D=\dfrac{p^2}{4}-q$	Корни: $-\dfrac{p}{2}\pm\sqrt{D}$ при $D > 0$; $-\dfrac{p}{2}$ при $D = 0$; $\varnothing$ при $D < 0$
Степенное уравнение	$x^n = a$ $a \neq 0$	Корни: n – четное: $x=\pm\sqrt[n]{a}$ при $a > 0$; n – нечетное: $x=\sqrt[n]{a}$
Показательное уравнение	$a^x = a^b$ $(a > 0, a \neq 1)$	Корень: $x = b$

Логическая связь между уравнениями

Равносильность уравнений ① $\Leftrightarrow$ ②	Два уравнения ① и ② называются равносильными, если множества их решений совпадают, т. е. если каждое решение уравнения ① является решением уравнения ②, и обратно – всякое решение уравнения ② является решением уравнения ①.
Уравнение – следствие ② $\Rightarrow$ ①	Уравнение ① называется следствием уравнения ②, если всякое решение уравнения ② является решением уравнения ①.
Система уравнений $\left\{\begin{array}{l}\text{①}\\ \text{②}\end{array}\right.$	Набор нескольких уравнений вместе с задачей найти решения, которые удовлетворяют *каждому* из уравнений.
Совокупность уравнений $\left[\begin{array}{l}\text{①}\\ \text{②}\end{array}\right.$	Набор нескольких уравнений вместе с задачей найти решения, которые удовлетворяют хотя бы одному из уравнений.

Пусть множества решений уравнений ① и ② обозначены соответственно A_1 и A_2.

Логическая связь	Термин	Множество решений
① $\Leftrightarrow$ ②	Равносильность	$A_1 = A_2$
② $\Rightarrow$ ①	Следствие	$A_2 \subset A_1$
$\left\{\begin{array}{l}\text{①}\\ \text{②}\end{array}\right.$	Система	$A_1 \cap A_2$
$\left[\begin{array}{l}\text{①}\\ \text{②}\end{array}\right.$	Совокупность	$A_1 \cup A_2$

Примеры и комментарии

Основные методы сведения уравнений к стандартным.

1. Разложение на множители

1) $3x^2 = x^3 - 4x$

Переносим в одну часть:

$x^3 - 3x^2 - 4x = 0.$

Выносим множитель x:

$x\,(x^2 - 3x - 4) = 0.$

Ответ: $x_1 = 0$; $x_2 = -1$; $x_3 = 4$.

2) $x^3 - 3x^2 + 2 = 0$

Подбираем целый корень $x = 1$ и выносим множитель $x - 1$:

$x^3 - x^2 - 2x^2 + 2 = 0,$

$x^2\,(x - 1) - 2\,(x^2 - 1) = 0,$

$(x - 1)(x^2 - 2x - 2) = 0.$

Ответ: $x_1 = 1$; $x_{2,\,3} = 1 \pm \sqrt{3}$.

2. Замена неизвестного

1) $x^4 - x^2 - 12 = 0$

(биквадратное уравнение)

Замена $x^2 = y$:

$y^2 - y - 12 = 0$; $y_1 = -3$; $y_2 = 4$

$x^2 = -3$ – действительных решений нет;

$x^2 = 4$, $x = \pm 2$.

Ответ: $x = \pm 2$.

2) $\sqrt{\dfrac{x}{2x+1}} + \sqrt{\dfrac{2x+1}{x}} = \dfrac{5}{2}$

Замена $\sqrt{\dfrac{x}{2x+1}} = y$: $\quad y + \dfrac{1}{y} = \dfrac{5}{2}$,

$y_1 = \dfrac{1}{2}$, $y_2 = 2$.

$\sqrt{\dfrac{x}{2x+1}} = \dfrac{1}{2}$; $\dfrac{x}{2x+1} = \dfrac{1}{4}$; $x = \dfrac{1}{2}$;

$\sqrt{\dfrac{x}{2x+1}} = 2$; $\dfrac{x}{2x+1} = 4$; $x = -\dfrac{4}{7}$.

Ответ: $x_1 = \dfrac{1}{2}$; $x_2 = -\dfrac{4}{7}$.

Беседа Корни алгебраического уравнения

Примеры и комментарии

1. Угадать корень
$x^2 + 2009x + 2008 = 0$.
Легко угадать один корень $x = -1$. Поэтому второй корень равен -2008.

2. Целый корень
$x^4 + 4x^3 - x^2 - 16x - 12 = 0$.
Целый корень ищем среди делителей числа 12: ±1, ±2, ±3, ±4, ±6, ±12. Числа -3, -2, -1 и 2 являются корнями. Поэтому получаем $x^4 + 4x^3 - x^2 - 16x - 12 =$ $= (x + 3)(x + 2)(x + 1)(x - 2)$.

3. Рациональный корень
$24x^3 - 26x^2 + 9x - 1 = 0$.
Рациональный корень ищем среди чисел $\pm\frac{1}{2}$, $\pm\frac{1}{3}$, $\pm\frac{1}{4}$, $\pm\frac{1}{6}$, $\pm\frac{1}{8}$, $\pm\frac{1}{12}$, $\pm\frac{1}{24}$. Число $\frac{1}{2}$ является корнем. Поэтому имеем
$24x^3 - 26x^2 + 9x - 1 =$
$= (2x - 1)(12x^2 - 7x + 1)$.

4. Замена переменной
$$\left(x - \frac{5}{2}\right)^4 + \left(x - \frac{3}{2}\right)^4 = 1.$$
Положим $y = x - 2$. Получим
$$\left(y - \frac{1}{2}\right)^4 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^4 = 0$$
или
$$2y^4 + 3y^2 + \frac{1}{8} = 1.$$
Теперь положим $z = 4y^2$. Имеем $z^2 + 6z - 7 = 0$.

5. Однородное уравнение
$x^4 + 5x^2(x + 1) = 6(x + 1)^2$.
Полагаем $u = x^2$, $v = x + 1$.
Уравнение запишем в виде
$u^2 + 5uv - 6v^2 = 0$.
Ясно, что $v \neq 0$. Положим $t = \frac{u}{v}$.
Получаем $t^2 + 5t - 6 = 0$.

Алгебраическими уравнениями называют уравнения, которые равносильными преобразованиями могут быть приведены к уравнению вида $P(x) = 0$, где $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$ – многочлен. Его степень называют степенью уравнения. Корни многочлена P – это и есть корни исходного уравнения.

Формулы для корней уравнений второй степени (квадратных уравнений) требуют извлечения квадратного корня из некоторого выражения, составленного из коэффициентов многочлена – его дискриминанта D. Если мы интересуемся действительными корнями, то они существуют лишь при $D \geq 0$. При $D > 0$ формулы дают два разных корня, при $D = 0$ корень единственный. При $D < 0$ квадратное уравнение действительных корней не имеет.

Основной изученный нами способ решения алгебраических уравнений состоит в том, чтобы с помощью замен неизвестного и разложения на множители свести его к решению цепочки линейных и квадратных уравнений.

Выделение линейного множителя основано на следующих утверждениях.

1. *Теорема Безу*. Если $x = a$ является корнем многочлена $f(x)$, то этот многочлен делится на двучлен $x - a$: $f(x) = (x - a)\,g(x)$.

2. *Рациональные корни многочлена с целыми коэффициентами*. Пусть $r = \frac{m}{n}$ – несократимая дробь, являющаяся корнем многочлена с целыми коэффициентами. Тогда числитель m есть делитель свободного члена, а знаменатель n – делитель старшего коэффициента многочлена. В частности, всякий целый корень многочлена с целыми коэффициентами есть делитель его свободного члена.

3. *Действительные корни многочлена*. Всякий многочлен нечетной степени имеет хотя бы один действительный корень. Для того чтобы квадратный трехчлен имел действительные корни, необходимо и достаточно, чтобы его дискриминант был неотрицателен.

Решение уравнения в радикалах

Для всякого многочлена степени не выше 4 можно указать формулу, выражающую корни многочлена через его коэффициенты. Для линейного уравнения $ax = b$ при $a \neq 0$ один корень $x = \frac{b}{a}$. При $a = b = 0$ уравнение имеет корнем любое действительное число. Квадратное уравнение можно решать по формуле.

Кубическое уравнение решается по формуле Кардано.

Уравнение четвертой степени методом Феррари сводится к кубическому.

Вопросы разрешимости уравнений в радикалах были окончательно решены только в первой половине XIX века в работах замечательных математиков – итальянца Руффини, француза Галуа и норвежца Абеля. Из этих же работ вытекало и решение знаменитых геометрических задач древности. Вопрос о построении циркулем и линейкой был до конца исследован Гауссом. Предложенный им способ построения правильного семнадцатиугольника изображен на его могиле.

Невозможность решения других знаменитых задач древности имеют следующее объяснение.

а) *Трисекция угла* (разделить произвольный угол на три равные части) приводит к кубическому уравнению, корни которого не выражаются с помощью квадратных радикалов.

б) *Квадратура круга* (построить квадрат, площадь которого равна площади круга единичного радиуса) сводится к вопросу о том, можно ли число π вычислить с помощью арифметических операций над рациональными числами и извлечения корней. Невозможность этого следует из того, что π не может быть корнем никакого многочлена с целыми коэффициентами.

в) *Удвоение куба* (построить ребро куба, объем которого вдвое больше объема единичного куба) сводится к выражению корня многочлена $x^3 - 2$ через квадратные радикалы, что невозможно.

Примеры и комментарии

6. Вместо числа буква

$x^6 - 7x^2 + \sqrt{6} = 0$.

Пусть $a = \sqrt{6}$. Тогда уравнение записывается в виде

$x^2 \cdot a^2 - a + x^2 - x^6 = 0$.

Это квадратное уравнение относительно a.

$$a = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4x^2\left(x^2 - x^6\right)}}{2x^2} =$$

$$= \frac{1 \pm \sqrt{\left(2x^4 - 1\right)^2}}{2x^2} = \frac{1 \pm \left(2x^4 - 1\right)}{2x^2}.$$

Поэтому либо $a = x^2$, либо $a = \frac{1 - x^4}{x^2}$.

7. Подстановка $y = ax + \frac{b}{x}$

$18x^4 - 3x^3 - 25x^2 + 2x + 8 = 0$.

Делим обе части уравнения на x^2 и положим $y = 3x - \frac{2}{x}$.

Имеем

$$2\left(9x^2 + \frac{4}{x^2}\right) - \left(3x - \frac{2}{x}\right) - 25 = 0,$$

т. е. $2(y^2 + 12) - y - 25 = 0$.

Поэтому $2y^2 - y - 1 = 0$.

8. Обратная функция

$(x^3 - 9x^2 + 27x - 21)^3 - x + 9 = 0$.

Запишем уравнение в виде

$(x - 3)^3 + 9 = \sqrt[3]{x - 9} + 3$.

Пусть $f(x) = (x - 3)^3 + 9$,

$g(x) = \sqrt[3]{x - 9} + 3$.

Функции f и g строго возрастающие, причем

$f(g(x)) = g(f(x)) = x$.

Докажем, что в таком случае

$f(x) = g(x) \Leftrightarrow f(x) = x$.

Пусть $f(a) = a$. Тогда

$f(a) = a = g(f(a)) = g(a)$.

Если $f(a) > a$, то

$f(a) > a = g(f(a)) > g(a)$.

Если же $f(a) < a$, то

$f(a) < a = g(f(a)) < g(a)$.

В данном случае уравнение $f(x) = x$ записывается в виде

$x^3 - 9x^2 + 26x - 18 = 0$

или

$(x - 1)(x^2 - 8x + 18) = 0$.

§ 6 Системы уравнений

Примеры и комментарии

Метод сложения

1. $\begin{cases} x+2y=5, \\ x-3y=-5. \end{cases}$

Вычитаем: $5y = 10$; $y = 2$; $x = 1$
Ответ: (1; 2).

2. $\begin{cases} 2x-3y=7, \\ 5x+6y=4. \end{cases}$

Первое уравнение умножаем на 2 и прибавляем ко второму: $9x = 18$; $x = 2$; $y = -1$.
Ответ: (2; –1).

Метод исключения (*подстановки*)

3. $\begin{cases} x-4y=11, \\ 2x+5y=-4. \end{cases}$

Из первого уравнения выражаем x и подставляем во второе: $x = 4y + 11$; $2(4y + 11) + 5y = -4$; $13y = -26$; $y = -2$; $x = 3$.
Ответ: (3; –2).

Исследование системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными

Линейная система $\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$ при $\dfrac{a_1}{a_2} \neq \dfrac{b_1}{b_2}$ имеет единственное решение $\begin{cases} x = \dfrac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1}, \\ y = \dfrac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}. \end{cases}$

Если $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} \neq \dfrac{c_1}{c_2}$, то система не имеет решений.

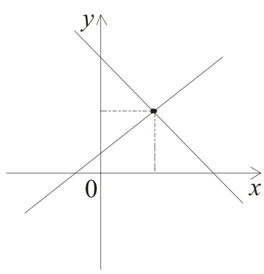
Если $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{c_1}{c_2}$, то система имеет бесконечно много решений.

Геометрическая интерпретация исследования линейной системы. Каждое уравнение линейной системы с двумя неизвестными задает прямую на плоскости. Исследование системы сводится к исследованию расположения двух прямых (прямые могут пересекаться, быть параллельными или совпадать), т. е. решая линейную систему двух уравнений с двумя неизвестными x и y, полезно сначала построить две прямые на одной координатной плоскости.

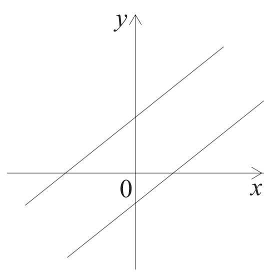
Если эти прямые пересеклись, то система имеет единственное решение.

Если прямые совпали, то у этой системы бесконечно много решений.

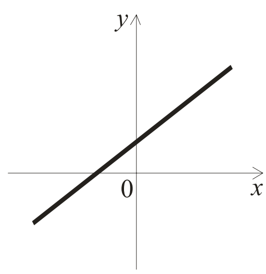
Если прямые оказались параллельны, то решений у системы нет и не нужно их искать.



Одно решение



Нет решений



Решений бесконечно много

Исключение неизвестного

Пример. Решить систему $\begin{cases} x - y = 1, \\ x - 4y^2 = 1. \end{cases}$

Из первого уравнения выражаем $x = y + 1$ и подставляем во второе: $y + 1 - 4y^2 = 1 \;\Leftrightarrow\; 4y^2 - y = 0$; $y_1 = 0$, $y_2 = \dfrac{1}{4}$; $x_1 = 1$, $x_2 = \dfrac{5}{4}$.

Ответ: $(1; 0)$, $\left(\dfrac{5}{4}; \dfrac{1}{4}\right)$.

Замена неизвестного

Пример. Решить систему $\begin{cases} \dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{y} = 4 \\ \dfrac{1}{x} - \dfrac{3}{y} = 9 \end{cases}$.

Делаем замену: $\dfrac{1}{x} = u, \dfrac{1}{y} = v$.

Получаем линейную систему $\begin{cases} 2u + v = 4 \\ u - 3v = 9 \end{cases}$.

Решаем методом сложения (умножаем первое уравнение на 3 и складываем): $7u = 21$; $u = 3$; $v = 4 - 2u = -2$; $x = \dfrac{1}{3}$; $y = -\dfrac{1}{2}$.

Ответ: $\left(\dfrac{1}{3}; -\dfrac{1}{2}\right)$.

Симметричные системы

Пример. Решить систему $\begin{cases} x + y = 3 \\ x^2 + 3xy + y^2 - x - y = 2 \end{cases}$.

Делаем замену: $x + y = u$; $xy = v$.

Преобразуем левую часть второго уравнения: $x^2 + 3xy + y^2 - x - y = (x + y)^2 + xy - (x + y) = u^2 - u + v$.

Получаем систему относительно u и v:

$$\begin{cases} u = 3, \\ u^2 - u + v = 2. \end{cases}$$

Подставляем: $3^2 - 3 + v = 2$; $v = -4$.

Решаем стандартную систему $\begin{cases} x + y = 3, \\ xy = -4. \end{cases}$

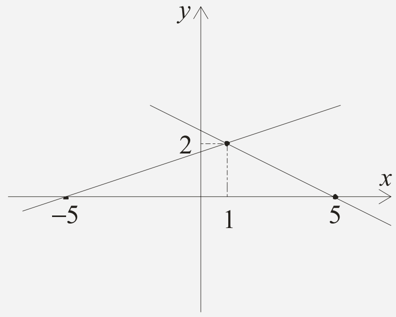
Ее решение сводится к решению квадратного уравнения $t^2 - 3t - 4 = 0$, $t_1 = -1$, $t_2 = 4$.

Ответ: $(-1; 4)$, $(4; -1)$.

Примеры и комментарии

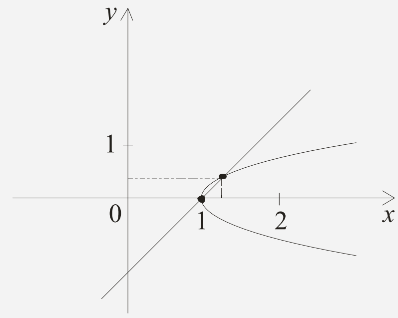
Геометрическая интерпретация

1. $\begin{cases} x + 2y = 5 \\ x - 3y = -5 \end{cases}$



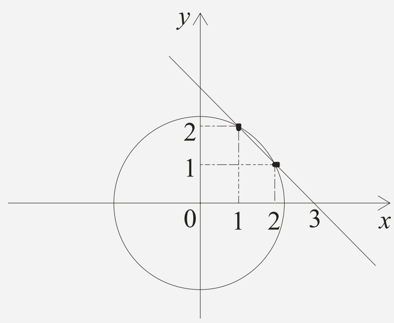
Ответ: $(1; 2)$.

2. $\begin{cases} x - y = 1 \\ x - 4y^2 = 1 \end{cases}$



Ответ: $(1; 0)$, $\left(\dfrac{5}{4}; \dfrac{1}{4}\right)$.

3. $\begin{cases} x + y = 3 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases}$



Ответ: $(2; 1)$, $(1; 2)$.

Окружность – радиус $\sqrt{5} \approx 2{,}2$; прямая – через точки $(3; 0)$, $(0; 3)$. Точки пересечения $(2; 1)$, $(1; 2)$.

§ 7 Координаты и графики

Примеры и комментарии

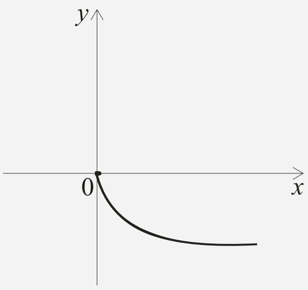
1. Из линейного соотношения $ax + by + c = 0$ $(a \neq 0,\ b \neq 0)$ можно выразить y как функцию от x или x как функцию от y. Графиком будет прямая. Для построения прямых удобнее всего находить 2 их точки, например, точки пересечения с осями координат. Полезно проверять, какой получился наклон к оси Ox. Для нахождения уравнения прямой по двум точкам $P_1(x_1; y_1)$, $P_2(x_2; y_2)$ $(x_1 \neq x_2)$ полезно помнить формулу:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1).$$

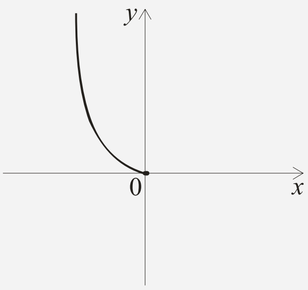
2. Для построения графиков квадратичных парабол с уравнениями вида $y = ax^2 + bx + c$ (или $x = ay^2 + by + c$) полезно сначала находить координаты ее вершины, а также точки пересечения с осями.

При построении «полупарабол» надо следить за знаком перед корнем.

$y = -\sqrt{x}$

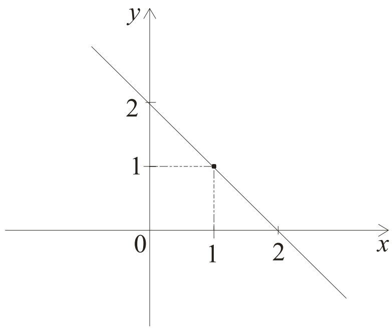


$x + \sqrt{y} = 0$



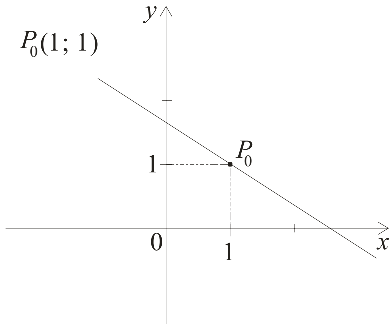
Линейные зависимости

1. $y = 2 - x$

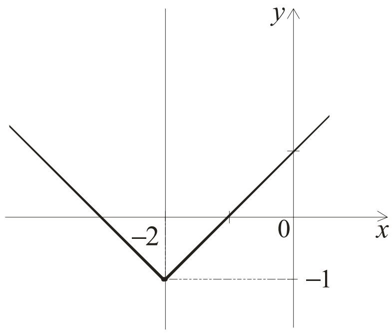


2. $3x + 2y = 5$

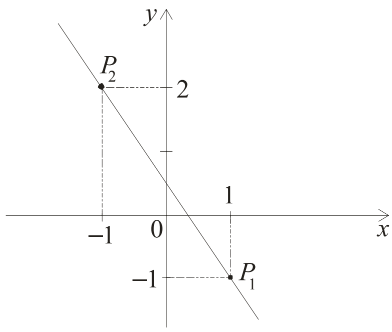
$k = -\dfrac{3}{2}$ $\qquad y = -\dfrac{3}{2}x + \dfrac{5}{2}$



3. $y = |x + 2| - 1$

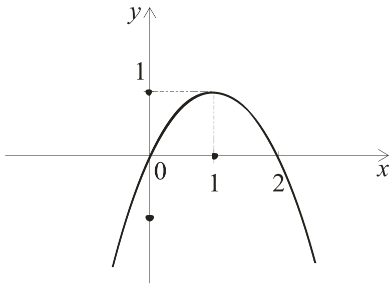


4. Прямая через точки $P_1(1; -1)$, $P_2(-1; 2)$

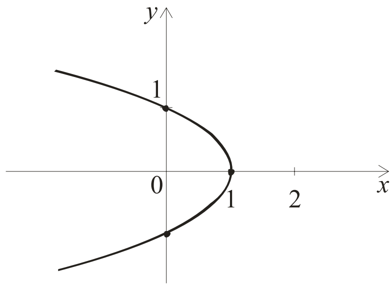


Квадратичные зависимости

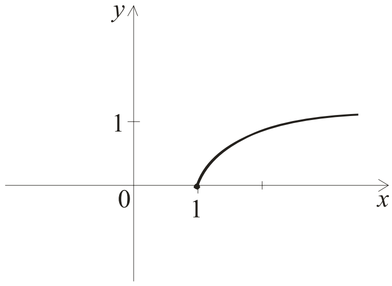
1. $y = 2x - x^2$



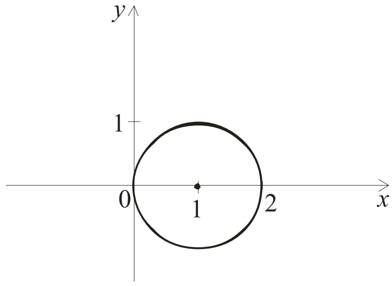
2. $x + y^2 = 1$



3. $y = \sqrt{x - 1}$

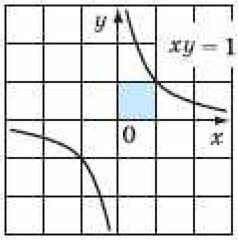


4. $x^2 + y^2 = 2x$

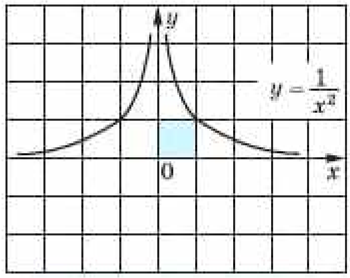


Рациональные функции

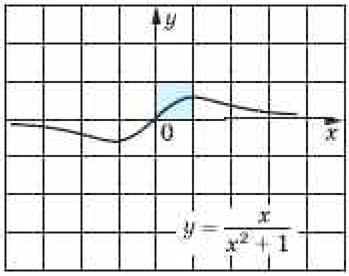
1. $xy = 1$



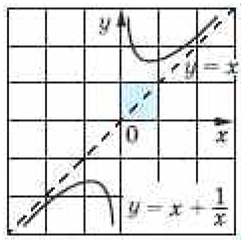
2. $y = \dfrac{1}{x^2}$



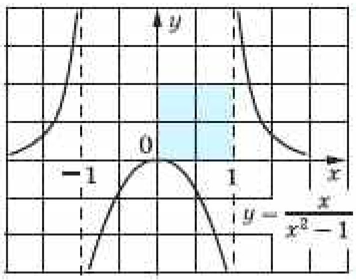
3. $y = \dfrac{x}{x^2+1}$



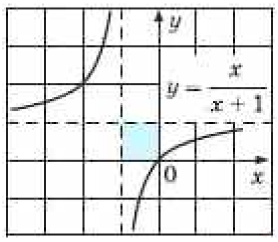
4. $y = x + \dfrac{1}{x}$



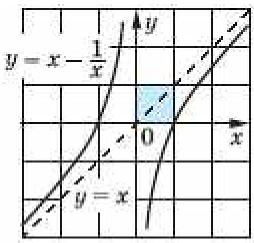
5. $y = \dfrac{x}{x^2-1}$



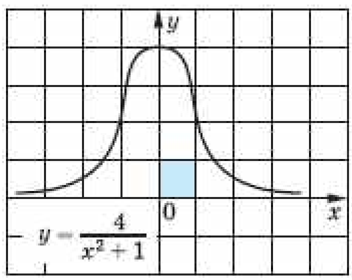
6. $y = \dfrac{x}{x+1}$



7. $y = x - \dfrac{1}{x}$



8. $y = \dfrac{4}{x^2+1}$



Примеры и комментарии

1. Полезно помнить вид графиков простых рациональных функций, не являющихся многочленами:

– дробно-линейная функция вида

$$y = y_0 + \frac{k}{x - x_0};$$

– функции вида $y = x \pm \dfrac{1}{x}$ (они «уходят в бесконечность» при $x = 0$);

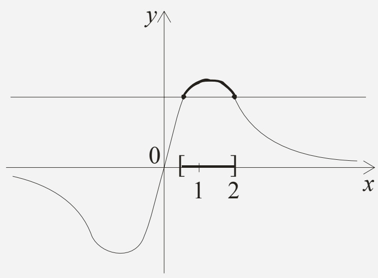
– функции вида $y = \dfrac{x}{x^2 + k^2}$ (они имеют наибольшее и наименьшее значения при $x = \pm k$);

– функции вида $y = \dfrac{x}{x^2 - k^2}$ (они «уходят в бесконечность» при $x = \pm k$).

2. По графикам зависимостей и функций можно решать неравенства.

1) Решить неравенство $\dfrac{5x}{x^2+1} \geq 2$ по графику.

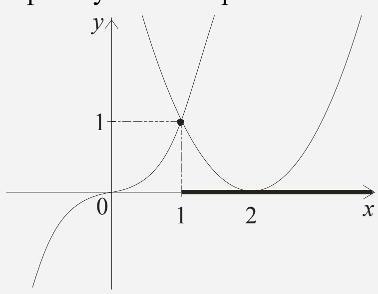
График задан.



Ответ: $x \in \left[\dfrac{1}{2}; 2\right]$.

2) Решить неравенство $x^3 \geq (x-2)^2$ по графику.

График нужно построить.



Ответ: $x \geq 1$.

Тестовые задания по курсу алгебры
Да – нет

1. Делимость чисел

1.1 A делится на B

1. $A = 135 + 372 - 263 + 511$; $B = 2$
2. $A = 1234567$; $B = 3$
3. $A = 6837 + 3915$; $B = 4$
4. $A = 3 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 11 + 6 \cdot 66$; $B = 5$
5. $A = 233 \cdot 138 - 277 \cdot 152$; $B = 10$

1.2 A – простое число

1. $A = 97$
2. $A = 2^{10} - 1$
3. $A = 2^8 + 1$
4. $A = 2^{101} + 3^{101}$
5. A – наименьший натуральный (отличный от 1) делитель данного натурального числа n

1.3 Числа A и B взаимно просты

1. $A = 100$, $B = 243$
2. A – любое, $B = A^2 - 1$
3. A и B связаны соотношением $mA + nB = 1$ (m, n – целые числа)
4. $A = 123$, $B = 456$
5. $A = 2^{10}$, $B = 11^{10}$

2. Классификация чисел и их запись

2.1 Число A целое

1. $A = \dfrac{1234567}{3}$
2. $A = \left(1 + \sqrt{5}\right)^3 + \left(1 - \sqrt{5}\right)^3$
3. x удовлетворяет уравнению $x + \dfrac{1}{x} = 3$, $A = x^3 + \dfrac{1}{x^3}$
4. $A = \dfrac{10!}{4!\,6!}$
5. A – корень уравнения $2^x = \dfrac{1}{16}$

2.2 $A = B$

1. $A = 0{,}125$; $B = \dfrac{1}{8}$
2. $A = 3200$; $B = 2^7 \cdot 5^2$
3. $A = 3{,}66\ldots$; $B = \dfrac{10}{3}$
4. $A = 1{,}(6)$; $B = 1 + \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{2}}$
5. $A = \dfrac{11}{6} - \dfrac{3}{10} + \dfrac{1}{15}$; $B = 1{,}4$

2.3 Число A рациональное

1. $A = 2{,}3161616\ldots$
2. A – сумма квадратов корней уравнения $2x^2 + 7x - 1 = 0$
3. $A = \sqrt{200}$
4. $A = 0{,}1001000100001\ldots$
5. A – радиус круга площади 1

2.4 Число A – рациональное

1. $A = 5$
2. $A = 1{,}333\ldots$
3. $A = \dfrac{\sqrt{10} + \sqrt{100}}{\sqrt{1000} + \sqrt{10000}}$
4. $A = \left(1 + \sqrt{2}\right)^2$
5. $A = \sqrt[3]{64}$

2.5 Число A действительное

1. $A = \sqrt{\sqrt{2} - 1}$
2. $A = 0$
3. Куб числа A равен $1 - \sqrt{3}$
4. A удовлетворяет уравнению $x^2 + x + 1 = 0$
5. A – сумма квадратов корней уравнения $x^2 + x + 1 = 0$

2.6 Число A – действительное

1. $A = \sqrt{3}$
2. $A = \sqrt{2 - \sqrt{5}}$
3. A – корень уравнения $x^2 + x + 1 = 0$
4. A – корень уравнения $x^4 - 6x^2 + 1 = 0$
5. $A = (1 + i)^3 + (1 - i)^3$

3. Свойства действительных чисел

Арифметические операции

3.1 $A = 1$

1. $A = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$
2. $A = \left(\frac{5}{6} - \frac{1}{4}\right) \cdot \frac{12}{7}$
3. $A = 2{,}36 - 1{,}12 - 0{,}88 + 0{,}64$
4. $A = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{1}$
5. $A = \frac{95}{(12-7)(12+7)}$

3.2 $A = 1$

1. $A = \frac{33^2 - 32^2}{55}$
2. $A = \frac{10^3 - 9^3}{91}$
3. $A = (2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3})$
4. $A = 5^{-7} \cdot 6^{-3} \cdot 10^4 \cdot 15^4 \cdot 30^{-1}$
5. $A = \log_2 16 + \log_2 \frac{1}{8}$

3.3 $A = B$

1. $A = 7^3 + 3^3$; $B = 10\,(7^2 + 7 \cdot 3 + 3^2)$
2. $A = 3^3 + 5^3 - 8^3$; $B = -3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 8$
3. $A = \frac{1+\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}$; $B = -3 + 2\sqrt{2}$
4. $A = 4^{-\frac{1}{2}} \cdot 8^{\frac{2}{3}} \cdot 16^{\frac{5}{2}}$; $B = 1024$
5. $A = \lg 6 - \lg 14 + \lg 21$; $B = 2 \lg 3$

Действия над числами в стандартной записи

3.4 Порядок числа A равен 3.

1. $A = 1000$
2. $A = 21 \cdot 10^3$
3. $A = \frac{63854}{35}$
4. $A = \frac{15 \cdot 25 \cdot 35 \cdot 45}{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}$
5. $A = 7!$

3.5 Числа A и B имеют одинаковый порядок

1. $A = 12500$; $B = 86480$
2. $A = 0{,}0003$; $B = \frac{4}{20013}$
3. $A = 2{,}7 \cdot 10^{-6}$; $B = 6{,}1 \cdot 10^{-4} \cdot 3{,}2 \cdot 10^{-3}$
4. $A = \pi \cdot (2{,}1 \cdot 10^4)^3$; $B = 10^{12}$
5. $A = 14!$; $B = 10^{10}$

3.6 Если радиус шара R ед. удовлетворяет данному условию, то его объем V куб. ед. имеет порядок, не меньший 10.

1. $R = 5{,}0 \cdot 10^3$
2. $R > 1000$
3. $R \le 10^4$
4. $|R - 1500| \le 250$
5. Круг радиуса R имеет площадь (в кв. ед.) порядка 7.

Пропорции и проценты

3.7 Из данных четырех чисел можно составить пропорцию

1. $1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}$
2. 1; 0,5; 0,25; 0,125
3. –1; –0,1; 0,01; 0,001
4. $1; -\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{8}$
5. 36; 9; 8; 2

3.8 Если для числа выполнено данное условие, то оно равно 100.

1. 10% от него равны 10
2. 1% от него равен 1
3. 50% от него равны 200
4. 0,5% от него равны 0,5
5. 200% от него равны 50

3.9 Стоимость товара в первый раз снизили на a процентов, второй раз – на b процентов. В результате стоимость товара составила 60% исходной цены.

1. $a = 20$; $b = 20$
2. $a = 20$; $b = 25$
3. $a = 25$; $b = 20$
4. $a = 40$; $b = 0$
5. $a = 66\frac{2}{3}$; $b = 10$

Сравнение чисел

3.10 $A > B$

1. $A = \frac{13}{23}$; $B = \frac{13}{24}$
2. $A = \frac{90}{91}$; $B = \frac{91}{92}$
3. $A = \frac{14}{5}$; $B = \frac{19}{7}$
4. $A = 0{,}(123)$; $B = 0{,}1(23)$
5. $A = 0{,}3$; $B = \frac{1}{3}$

3.11 $A < 1$

1. $A = \frac{3}{\pi}$
2. $A = \frac{\sqrt{2}}{2}$
3. $A = \frac{3\sqrt{3}}{5}$
4. $A = \frac{5!}{120}$
5. $A = \frac{1}{10}\log_2 1000$

3.12 $A < B$

1. $A = \frac{1001}{10001}$; $B = \frac{10001}{100001}$
2. $A = 0{,}996$; $B = \frac{1}{1{,}004}$
3. $A = \sqrt{2002} + \sqrt{2004}$; $B = 2\sqrt{2003}$
4. $A = \sqrt{0{,}999}$; $B = 0{,}999$
5. $A = 3^{100} + 4^{100}$; $B = 5^{100}$

Свойства числовых неравенств

3.13 Для некоторого числа c выполняются данные условия. Из этого вытекает, что $a > b$.

1. $a > c$; $c > b$
2. $a > c$; $c > b + 1$
3. $a > c - 1$; $c > b + 1$
4. $a > 1 - c$; $c < 1 - b$
5. $a + 1 > c$; $c > b + 1$

3.14 a и b отрицательные числа, причем $a < b$. Тогда верно следующее неравенство.

1. $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$
2. $a^2 < b^2$
3. $a^3 < b^3$
4. $\sqrt{|a|} < \sqrt{|b|}$
5. $\frac{a}{b} < \frac{b}{a}$

3.15 Для любых положительных чисел a и b верно следующее неравенство.

1. $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \geq ab$
2. $\frac{a+b}{2} \geq \left(\frac{a^{-1}+b^{-1}}{2}\right)^{-1}$
3. $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \geq \frac{a^2+b^2}{2}$
4. $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$
5. $a^2 + b^2 \geq ab$

Приближенные вычисления

3.16 Округление чисел с точностью до второго знака после запятой сделано правильно.

1. $a = 1{,}1683$, $a \approx 0{,}17$
2. $a = 0{,}2309$, $a \approx 0{,}23$
3. $\sqrt{2} \approx 1{,}41$
4. $\frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0{,}86$
5. $\pi^2 \approx 9{,}86$

3.17 Относительная погрешность произведенного вычисления менее 1%.

1. $\pi \approx 3{,}16$
2. $2^{10} \approx 1000$
3. Площадь круга радиуса $3 \cdot 10^3$ примерно равна $3 \cdot 10^7$
4. $\sqrt[3]{10000} \approx 21$
5. $9^{11} \approx 3 \cdot 10^{10}$

3.18 Следующие приближенные формулы дают приближения с недостатком при $0 \leq x < 1$.

1. $(1 + x)^3 \approx 1 + 3x$
2. $\frac{1}{1+x} \approx 1 - x$
3. $(1 - x)^2 \approx 1 - 2x$
4. $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2}$
5. $\frac{1}{\sqrt{1-x}} \approx 1 + \frac{x}{2}$

4. Числа и точки

4.1 Точка M – середина отрезка AB

1. $A(-1)$, $B(3)$, $M(1)$
2. $A(-9{,}5)$, $B(-1{,}5)$, $M(-5)$
3. $A(2; -5)$, $B(-3; 1)$, $M(-0{,}5; -2)$
4. A и B – точки оси Ox, соответствующие корням уравнения $2x^2 + 7x - 11 = 0$, $M\left(-\frac{7}{2}\right)$.
5. A и B – точки оси Ox, соответствующие корням уравнения $|x + 2| = 5$, $M(-2)$.

4.2 При данных значениях a и b прямая $ax + by = 1$ проходит через точку $(-1; 2)$ и наклонена к оси абсцисс под тупым углом.

1. $a = 5$; $b = 3$
2. $a = -\frac{1}{2}$; $b = \frac{1}{4}$
3. $a = b = -3$
4. $a = -5$; $b = -2$
5. $a = 9$; $b = 5$

4.3 При данных k и b прямая $y = kx + b$ не пересекает окружность $x^2 + y^2 = 4$.

1. $k = 1$; $b = 3$
2. $k = -1$; $b = -2$
3. $k = 3$; $b = 0$
4. $k = \frac{3}{4}$; $b = \frac{8}{5}$
5. $k = -3$; $b = 10$

4.4 При данных значениях a и b вершина параболы $y = ax^2 + bx$ лежит во второй четверти.

1. $a = 1$; $b = 1$
2. $a = -1$; $b = -1$
3. $a = 2$; $b = -1$
4. $a = -1$; $b = 2$
5. $a = -2$; $b = -3$

5. Символьное исчисление

5.1 Выражение P приводится к многочлену, степень которого равна 7

1. $P = x\,(x + 1)^2\,(x^2 + 1)^2$
2. $P = (x + 1)^8 - x^8 - 7x^7$
3. $P = (x^3 + y^3)^2 + x + y$
4. $P = (x^2 - xy + y^2)^2\,(x + y)^3$
5. $P = \dfrac{x^8 - y^8}{x - y}$

5.2 Выражение P приводится к многочлену без свободного члена (свободный член равен нулю)

1. $P = (x - 1)^3 - 1$
2. $P = x\,(x + 1)(x + 2)(x + 3)$
3. $P = (x^2 + 2x - 3)(x^2 + x + 4) + (x + 6)(x + 2)$
4. $P = \dfrac{x^9 + 1}{x + 1}$
5. $P = \dfrac{x^4 - 16}{x - 2} - \dfrac{x^2 + 7x - 8}{x - 1}$

5.3 Сумма коэффициентов многочлена P равна 1

1. $P = 2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 5x + 6$
2. $P = (x^2 + x - 1)(x^2 + 3x - 3)$
3. $P = (x + 1)^{10} - 1023$
4. $P = (x^2 + 5x - 6)^{10}$
5. $P = 1 + (x - y) + (x - y)^2 + \ldots + (x - y)^{10}$

5.4 Выражение P приводится к многочлену относительно $y = x + \dfrac{1}{x}$

1. $P = x^2 + \dfrac{1}{x^2}$
2. $P = \dfrac{x^2 + 3x + 1}{x}$
3. $P = x^3 - \dfrac{1}{x^3}$
4. $P = \dfrac{x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 1}{x^2}$
5. $P = \left(x - \dfrac{1}{x}\right)^2$

5.5 Выражение A не имеет смысла

1. $A = \sqrt{2 - \sqrt{5}}$
2. $A = \dfrac{5 - 3 - 2}{5^3 - 3^3 - 2^3}$
3. $A = 5°$
4. $A = \left(-\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{3}{4}}$
5. $A = \dfrac{3}{\lg 100 - 2}$

5.6 Выражение P имеет смысл при всех целых значениях входящих в него букв

1. $P=\dfrac{x-2}{2x^2-x-1}$
2. $P=\dfrac{x}{x^2+2x-4}$
3. $P=\dfrac{x+y}{x^2-2y^2}$
4. $P=\sqrt{x^2-\dfrac{1}{4}}$
5. $P=\dfrac{x-y}{x^2+y^2-0{,}25}$

6. Равенство выражений

6.1 Написана правильная цепочка равенств

1. $\dfrac{x^4-x^2}{x^3-x}=\dfrac{x^2(x^2-1)}{x(x^2-1)}=x$
2. $\dfrac{3x^2-1}{3x-1}=\dfrac{x^2-1}{x-1}=x+1$
3. $\dfrac{x+\dfrac{1}{x}}{x-\dfrac{1}{x}}=\dfrac{x^2+1}{x^2-1}=-1$
4. $x+x^2+x^3+x^4=x(1+x+x^2+x^3)=x\cdot\dfrac{1-x^4}{1-x}$
5. $\dfrac{x^2}{x-y}+\dfrac{y^2}{y-x}=\dfrac{x^2}{y-x}+\dfrac{y^2}{x-y}=x+y$

6.2 Следующие утверждения верны

1. Если значения двух квадратных трехчленов от x совпадают при двух различных значениях буквы x, то трехчлены имеют одинаковые корни.
2. Если значения квадратных трехчленов $x^2+p_1x+q_1$ и $x^2+p_2x+q_2$ совпадают при двух различных значениях буквы x, то трехчлены имеют одинаковые корни.
3. Если дроби $\dfrac{A(x)}{B(x)}$ и $\dfrac{C(x)}{D(x)}$ равны между собой, но не определены при $x=1$, то многочлены $A(x)\cdot D(x)$ и $B(x)\cdot C(x)$ могут иметь при $x=1$ различные значения.
4. Если два многочлена имеют одинаковые корни и равные старшие коэффициенты, то они тождественно равны между собой.
5. Если многочлены от x имеют разные степени, то найдется такое значение x, при котором значения многочленов различны.

7. Тождества

7.1 Верно тождество $A=x$

1. $A=\dfrac{1}{6}((x-1)(x-2)(x+1)-(x-1)(x-2)(x+2)+(x-1)(x+1)(x+2)-(x-2)(x+1)(x+2))$
2. $A=\dfrac{a(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{b(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)}+\dfrac{c(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}$
3. $A=\dfrac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)}+\dfrac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}$
4. $A=\dfrac{x^2+px+q}{x_1-x_2}\left(\dfrac{x_1}{x-x_1}-\dfrac{x_2}{x-x_2}\right)$, где x_1, x_2 – корни трехчлена x^2+px+q
5. $A=\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{x^2+2x+1}+\sqrt{x^2-2x+1}\right)$

7.2 Многочлен P является полным квадратом

1. $P = x^2 + x + \frac{1}{4}$
2. $P = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2bc - 2ac$
3. $P = 3x^2 - 2x + \frac{1}{3}$
4. $P = (a^2 + b^2)(x^2 + y^2) - (ax + by)^2$
5. $P = x\,(x + 1)(x + 2)(x + 3) + 1$

8. Корни

8.1 Следующие выражения имеют смысл

1. $\sqrt{\sqrt{5}-2}$
2. $\sqrt[3]{1-\sqrt{3}}$
3. $\sqrt[4]{\sqrt[3]{-8}}$
4. $\sqrt{(-2)\cdot(-3)}$
5. $\left(\sqrt{1-\sqrt{2}}\right)^2$

8.2 Следующие преобразования степеней произведены правильно

1. $2^{\frac{1}{2}}\cdot 4^{\frac{1}{6}}\cdot 8^{\frac{1}{18}}=2$
2. $81^{\frac{1}{4}}-3\sqrt{3}\cdot 3^{\frac{1}{2}}=\sqrt{3}$
3. $\dfrac{a^{\frac{2}{3}}-16}{a^{\frac{1}{3}}-4}-a^{\frac{1}{3}}=-4$
4. $\dfrac{a^{\frac{3}{4}}-b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{8}}+b^{\frac{1}{12}}}=\left(a^{\frac{1}{8}}-b^{\frac{1}{12}}\right)\cdot\left(a^{\frac{1}{2}}+a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{1}{6}}+b^{\frac{1}{3}}\right)$
5. $\left(a^{-1}+b^{-1}\right)^{-1}=\dfrac{a+b}{ab}$

9. Составление уравнения

9.1 Области допустимых значений неизвестного указаны правильно

1. Уравнение для нахождения времени движения: $\dfrac{10}{t-1}-\dfrac{10}{t}=\dfrac{5}{2}$; ОДЗ: $t > 1$
2. Уравнение для нахождения числа сторон многоугольника: $n^2 - 11 = 7(n - 1)$; ОДЗ: n – целое число
3. Уравнение для нахождения процента p содержания вещества: $\dfrac{p-10}{100}\cdot\dfrac{p}{100}\cdot a=b$; ОДЗ: $0\le p\le 100$
4. Уравнение для нахождения скорости движения v: $\sqrt{v+2}=v$; ОДЗ: $v \ge -2$
5. Уравнение для нахождения числа цифр x в десятичной записи некоторого числа: $10^x + 10^{x-2} = 2\cdot 10^{x-1} + (900)^2$; $x \ge 2$, целое число

10. Логическая связь между уравнениями

10.1 Уравнение A равносильно уравнению $Б$

	A	$Б$
1.	$x^2 = 9$	$\lvert x\rvert = 3$
2.	$x^2 = (2x - 1)^2$	$x = 2x - 1$
3.	$\dfrac{x^3-x}{x-1}=2$	$x^2 + x - 2 = 0$
4.	$\dfrac{x^3-x}{x+1}=2$	$x^2 - x - 2 = 0$
5.	$\sqrt{x^2-1}=1$	$x^2 - 1 = 1$

10.2 Уравнение *Б* является следствием уравнения *А*

	А	*Б*
1.	$x-3+\sqrt{x}=2x+\sqrt{x}$	$x-3=2x$
2.	$x=2x+1$	$\sqrt{x}=\sqrt{2x+1}$
3.	$3x=2x+1$	$\sqrt{3x}=\sqrt{2x+1}$
4.	$2x=5x-3$	$\frac{2x}{x+1}=\frac{5x-3}{x+1}$
5.	$2x=5x-3$	$\frac{2x}{x-1}=\frac{5x-3}{x-1}$

10.3 Уравнение *А* равносильно системе условий *Б*

	А	*Б*
1.	$\sqrt{x+12}=x$	$\begin{cases} x^2-x-12=0 \\ x>0 \end{cases}$
2.	$\frac{2x+1}{x-1}=\frac{3x+2}{x+1}$	$\begin{cases} (2x+1)(x+1)=(3x+2)(x-1) \\ x\neq\pm1 \end{cases}$
3.	$(x+y-1)^2+(2x-3y)^2=0$	$\begin{cases} x+y=1 \\ 2x-3y=0 \end{cases}$
4.	$\sqrt{\frac{2x-11}{x-2}}=3$	$\begin{cases} \frac{2x-11}{x-2}=9 \\ 2x-11\geq0 \\ x-2>0 \end{cases}$
5.	$(x+1)(2x-3)=0$	$\begin{cases} x+1=0 \\ 2x-3=0 \end{cases}$

10.4 Уравнение *А* равносильно совокупности условий *Б*

	А	*Б*
1.	$x(3x+2)=0$	$\left[\begin{array}{l} x=0 \\ 3x+2=0 \end{array}\right.$
2.	$(x+1)(x-1)=3x(x+1)$	$\left[\begin{array}{l} x+1=0 \\ x-1=3x \end{array}\right.$
3.	$(x-1)^2(x+1)=0$	$\left[\begin{array}{l} x-1=0 \\ x+1=0 \end{array}\right.$
4.	$\left(\sqrt{x^2}-\lvert x\rvert\right)(x+2)=0$	$\left[\begin{array}{l} x+2=0 \\ x\geq0 \end{array}\right.$
5.	$\lvert x^2+2x\rvert=4$	$\left[\begin{array}{l} x^2+2x=4 \\ x^2+2x=-4 \end{array}\right.$

11. Решение уравнений

11.1 Уравнение $f(x) = \frac{1}{2}$, где f – данная стандартная функция, имеет единственное решение.

1. $f(x) = 5 - 2x$
2. $f(x) = x - x^2$
3. $f(x) = \frac{1}{x-1}$
4. $f(x) = \frac{x}{2x+1}$
5. $f(x) = 1-\sqrt{x}$

11.2 Все решения данного уравнения – целые числа.

1. $|2x - 1| = 3$
2. $2x^2 - x - 1 = 0$
3. $x+\frac{1}{x}=2$
4. $x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$
5. $\sqrt{25-x^2} = 4$

12. Корни многочлена

12.1 Многочлен P не имеет целых корней

1. $P = x^2 + 4x - 12$
2. $P = x^3 - 5x^2 + 3$
3. $P = 6x^2 - 5x + 1$
4. $P = 2x^4 - 7x - 9$
5. $P = x^4 - 5x^2 + 6$

12.2 Многочлен P делится на $x - 2$

1. $P = x^3 - x - 2$
2. $P = x^4 - 5x^3 + x^2 + 20$
3. $P = x^{10} - 1000x^2 + 3$
4. $P = 4x^2 - 16x + 16$
5. $P = (x - 5)^3 + (x + 1)^3$

12.3 Сумма квадратов действительных корней уравнения равна A.

1. $x^2 + 6x - 5 = 0$, $A = 26$
2. $2x^2 - x - 6 = 0$, $A = \frac{25}{4}$
3. $x^2 + 3x + 4 = 0$, $A = 1$
4. $(x - 1)(x^2 - 4x + 7) = 0$, $A = 2$
5. $x^3 - x - 6 = 0$, $A = 2$

12.4 Симметричное выражение от корней многочлена P вычислено правильно

1. $P = x^2 + 2x - 5$ $\quad x_1^2 + x_2^2 = 12$
2. $P = 2x^2 - x - 3$ $\quad x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 = 4$
3. $P = 3x^2 + 2x - 2$ $\quad \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = -\frac{4}{3}$
4. $P = x^3 + 2x^2 + x - 5$ $\quad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 2$
5. $P = x^3 - 5x$ $\quad x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 0$

13. Исследование уравнения

13.1 Квадратное уравнение имеет два действительных корня одного знака.

1. $2x^2 + 5x + 1 = 0$
2. $-x^2 + 4x - 1 = 0$
3. $6x^2 - 5x + 2 = 0$
4. $4x^2 - 4x + 1 = 0$
5. $4x^2 - 6x + 1 = 0$

13.2 Уравнение $f(x) = 1 - x$, где f – данная функция, имеет ровно один корень.

1. $f(x) = -x + 5$
2. $f(x) = -x^2 + 5x - 8$
3. $f(x) = 2|x|$
4. $f(x) = \frac{1}{4x}$
5. $f(x) = \sqrt{1-x}$

13.3 Верны следующие высказывания об уравнении $y = 0$, где $y = ax^2 - 12x + 6(a + 1)$, зависящем от параметра a.

1. Уравнение $y = 0$ при $a > 1$ не имеет решений.
2. Любое число x может быть корнем уравнения $y = 0$ при некотором значении a.
3. Если уравнение $y = 0$ разрешимо, то оно имеет два корня, за исключением случая $a = 0$.
4. Значения a, при которых уравнение $y = 0$ имеет хотя бы один корень, заполняют конечный промежуток.
5. Уравнение $y = 0$ не может иметь двух корней разных знаков.

14. Задание функции

14.1 Значения указанных числовых выражений вычислены правильно.

1. $0{,}99 + \dfrac{1}{0{,}99} = 1{,}98$
2. $|3 - \sqrt{5}| + |2 - \sqrt{5}| = 1$
3. $\sqrt{\pi^4 - 20\pi^2 + 100} = 10 - \pi^2$
4. $2^{-\frac{1}{2}} + 2^{\frac{3}{2}} - 4^{-\frac{3}{4}} = \dfrac{9}{4}\sqrt{2}$
5. $2 \lg 2 - \dfrac{1}{3} \lg 125 + 3 \lg \dfrac{1}{2} = -1$

14.2 Данная функция определена во всех точках промежутка [1; 3].

1. $y = \dfrac{x}{x^2 - x - 2}$
2. $y = \dfrac{1}{x^2 - 4x}$
3. $y = \sqrt{5 - 2x}$
4. $y = \sqrt{(x-3)^2}$
5. $y = (x-2)^{\frac{1}{3}}$

14.3 Областью значений данной функции является множество всех действительных чисел.

1. $y = 5 - x$
2. $y = 2x + |x - 1|$
3. $y = 2|x| - x - 1$
4. $y = x^3 - x$
5. $y = \dfrac{x^3}{x^2 + 1}$

15. Свойства функции

15.1 Данная функция возрастает на промежутке [1; 3].

1. $y = 6x - x^2$
2. $y = \sqrt{4 - x}$
3. $y = |x + 1|$
4. $y = -\dfrac{1}{x}$
5. $y = -x^{\frac{1}{2}}$

15.2 Данная функция является либо четной, либо нечетной.

1. $y = x^2 + x$
2. $y = \dfrac{x}{x^2 + 1}$
3. $y = 1 + \dfrac{1}{x}$
4. $y = x^3 - 3x$
5. $y = \dfrac{|x|}{x^4 - x^2 + 1}$

15.3 Наибольшее значение на промежутке [1; 3] данная функция достигает на одном из концов этого промежутка.

1. $y = 2 - x$
2. $y = \dfrac{3}{x}$
3. $y = -|x - 3|$
4. $y = x^2 - 4x$
5. $y = \sqrt{4x - x^2}$

15.4 Неравенство верно при всех x из промежутка $[-1; 2]$.

1. $(x-3)(x-4) > 0$
2. $x^2 + 2x > 0$
3. $x^2 + x + 1 > 0$
4. $x^2 - x + 6 < 0$
5. $(x^2-4)(x^2-2x-15) \ge 0$

15.5 Неравенство $f(x) \le 1$, где f – данная стандартная функция, выполняется для всех x в промежутке $[0; 1]$.

1. $f(x) = 2 - 5x$
2. $f(x) = x^2 - x - 2$
3. $f(x) = \sqrt{1-x}$
4. $f(x) = 3^{-x}$
5. $f(x) = \lg(x+9)$

15.6 Решением неравенства $f(x) \le x - 1$ является один конечный промежуток

1. $f(x) = 2|x-1| - 1$
2. $f(x) = x^2 - 4x$
3. $f(x) = -\sqrt{2-x}$
4. $f(x) = -\dfrac{1}{10x}$
5. $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$

16. Классификация функций

16.1 Дана функция $y = f(x)$. Верно ли указана ее область определения D?

1. $f(x) = \dfrac{x}{x^2-5x+6}$, D: $x \ne 2; 3$
2. $f(x) = 2x^{-\frac{3}{4}}$, D: $[0; +\infty)$
3. $f(x) = \sqrt{2+x}$, D: $x \ge 2$
4. $f(x) = \sqrt{x^2+x+1}$, D: $\boldsymbol{R}$
5. $f(x) = \sqrt{|x|-1}$, D: $(-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$

16.2 Даны функции f и g. Функция $h = f \circ g$ является их композицией: $g(x) = f(g(x))$.

	$f(x)$	$g(x)$	$h(x)$
1.	x^3	$x + 3$	$x^3 + 3$
2.	$\dfrac{1}{x+1}$	$x^2 - 1$	$\dfrac{1}{x^2}$
3.	$x^2 - 1$	$x^2 + 1$	$(x^2+1)^2 - 1$
4.	$\sqrt{1-x}$	$1 - x^2$	$\|x\|$
5.	x^3	$x^{\frac{4}{3}}$	x^4

16.3 Функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ взаимно обратны.

	$f(x)$	$g(x)$
1.	$3x + 1$	$\dfrac{1}{3x+1}$
2.	x^4, $x \ge 0$	$\sqrt[4]{x}$
3.	$x^{\frac{3}{4}}$	$x^{\frac{4}{3}}$
4.	$\dfrac{2x}{x+1}$	$\dfrac{x}{2-x}$
5.	$3 - x^2$, $x \le 0$	$-\sqrt{3-x}$

17. Графики зависимостей и функций

17.1 Параболы, графики указанных квадратичных функций, имеют следующие свойства.

1. Парабола $y = 4 - x^2$ симметрична относительно оси ординат и ее ветви направлены вниз.
2. Парабола $y = x^2 + 2x$ симметрична относительно прямой $x = 1$ и ее ветви направлены вверх.
3. Парабола $y = -x^2 + 2x$ симметрична относительно прямой $x = 1$ и ее ветви направлены вверх.
4. Парабола $y = 2x^2 + x$ симметрична относительно прямой $x = -\frac{1}{2}$ и ее ветви направлены вверх.
5. Парабола $y = x - 2x^2$ симметрична относительно прямой $x = \frac{1}{4}$ и ее ветви направлены вниз.

17.2 График данной функции получается из графика функции $y = |x + 1|$ указанным преобразованием.

1. $y = -|x + 1|$ – симметрией относительно оси x.
2. $y = -|x - 1|$ – симметрией относительно начала координат.
3. $y = |x - 1|$ – симметрией относительно оси y.
4. $y = 2|x + 1|$ – растяжением вдоль оси x.
5. $y = \left|x + \frac{1}{2}\right|$ – преобразованием подобия с центром в начале координат и коэффициентом подобия $\frac{1}{2}$.

17.3 Графиком зависимости является окружность с указанными центром O и радиусом R

1. $x^2 + (y + 1)^2 = 1$; $O(0; 1)$; $R = 1$
2. $x^2 + y^2 = 2x + 2y$; $O(1; 1)$; $R = 2$
3. $(x + y)^2 + (x - y)^2 + x + y = 0$; $O\left(-\frac{1}{4}; -\frac{1}{4}\right)$; $R = \frac{1}{2}$
4. $x^2 + 2y^2 = 1$; $O(0; 0)$; $R = \frac{1}{\sqrt{2}}$
5. $x^2 + 2x + y^2 + 2y + 3 = 0$; $O(-1; -1)$; $R = 1$

18. Комбинаторика

18.1 Из пяти букв А, Б, В, Г, Е составили шестибуквенное слово с указанным ниже условием. Число таких слов получилось больше шести тысяч.

1. Слово начинается с гласной буквы.
2. В слове нет рядом двух одинаковых букв.
3. Первая и последняя буквы слова одинаковы.
4. Первые три буквы слова различны.
5. Буква А входит в слово ровно один раз.

18.2 В данном слове Р переставили буквы всеми возможными способами. Получили А возможных вариантов.

1. Р = комбинат, А = 40320
2. Р = теорема, А = 5040
3. Р = вариант, А = 2520
4. Р = панама, А = 240
5. Р = долото, А = 120

18.3. Из класса, в котором 20 девочек и 10 мальчиков, выбрана всеми возможными способами группа, удовлетворяющая следующим условиям. Получилось А возможных вариантов.

1. В группе 3 человека, А = C_{30}^3 = 4060.
2. В группе 2 девочки и 2 мальчика, А = $C_{20}^2 + C_{10}^2$ = 480.
3. Число людей в группе не больше четырех, но группа не пустая, А = $C_{30}^1 + C_{30}^2 + C_{30}^3 + C_{30}^4$ = 31930.
4. В группе 5 человек, причем есть как мальчики, так и девочки, А = 20 · 10 · C_{28}^3 = 655200.
5. В группе 4 человека, из которых один выделен в качестве старшего, А = 4 · $C_{30}^4 = 30 \cdot C_{29}^3$ = 109620.

19. Вероятности

19.1 Вероятность указанного события не превосходит половины.

1. При бросании игральной кости выпадет четное число очков.
2. При бросании пары игральных костей в сумме выпадет не более семи очков.
3. При двух последовательных бросаниях игральной кости ни разу не выпадет ни единица, ни шестерка.
4. При трех последовательных бросаниях пары игральных костей на них хоть раз выпадет в сумме 10 очков или больше.
5. При трех последовательных бросаниях игральной кости каждый раз выпадает разное количество очков.

19.2 9 монет случайным образом раскладывают в три различных кармана. Вероятность указанного ниже события обозначим через p.

1. Монеты различны, первый карман оказался пустым. $p = \left(\frac{2}{3}\right)^9 \approx 0{,}026$
2. Монеты различны, в каждом кармане по три монеты. $p = \frac{1680}{3^9} \approx 0{,}085$
3. Монеты одинаковы, первый карман оказался пустым. $p = \frac{1}{5} = 0{,}2$
4. Монеты одинаковы, в каждом кармане по три монеты. $p = \frac{1}{55} \approx 0{,}18$
5. Монеты различны, пустых карманов нет. $p = \frac{28}{55} \approx 0{,}51$

20. Последовательности

20.1 25-ый член последовательности вычислен правильно.

1. 1, 4, 7, 10, …; $a_{25} = 76$
2. $a_1 = 1$; $a_n = a_{n-1}\sqrt{2}$; $a_{25} = 4096$
3. $a_1 = a_2 = 1$; $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$; $a_{25} = 75040$
4. $a_1 = \frac{1}{1\cdot 2}$; $a_n = a_{n-1} + \frac{1}{n(n-1)}$; $a_{25} = 1 - \frac{1}{25} = 0{,}96$
5. $a_1 = 1^2$; $a_n = a_{n-1} + n^2$; $a_{25} = 5525$

20.2 Суммы n членов последовательности вычислены правильно.

1. $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \dfrac{n(n-1)}{2}$
2. $1 + q + q^2 + \ldots + q^n = \dfrac{q^n - 1}{q - 1}$
3. $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \ldots + n\,(n + 1) = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$
4. $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \ldots + n \cdot n! = (n + 1)! - 1$
5. $\dfrac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \ldots + \dfrac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} = \sqrt{n+1}$

20.3 Рекуррентное соотношение для последовательности a_1, a_2, … указано правильно

1. 1, 3, 6, 10, …; $a_{n+1} = a_n + n + 1$
2. 1, $\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{1}{3}$, …; $a_{n+1} = a_n + \dfrac{1}{n(n+1)}$
3. $a_n = 2^n - 1$; $a_{n+1} = 2a_n$
4. 1, $-\dfrac{1}{3}$, $\dfrac{1}{9}$, $-\dfrac{1}{27}$, …; $a_{n+1} = \dfrac{a_n}{3}$
5. 1, 2, 2^2, 2^3, …; $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$