зований, состоящих в перекрашивании всех клеток какого-либо столбца или какой-либо строки в противоположный цвет, можно было сделать черными все клетки этого квадрата?

В.Алексеев

6. Точки A', B' и C' – середины сторон BC, CA и AB треугольника ABC соответственно, а BH – его высота. Докажите, что если описанные около треугольников AHC' и CHA' окружности проходят через точку M, отличную от H, то $\angle ABM = \angle CBB'$.

В.Филимонов

7. Миша мысленно расположил внутри данного круга единичного радиуса выпуклый многоугольник, содержащий центр круга, а Коля пытается угадать его периметр. За один шаг Коля указывает Мише какую-либо прямую и узнает от него, пересекает ли она многоугольник. Имеет ли Коля возможность наверняка угадать периметр многоугольника через 3 шага с точностью до 0,3?

О.Косухин

Публикацию подготовил Б.Френкин

Избранные задачи Московской физической олимпиады

Первый теоретический тур

7 класс

1. Марс удобнее всего изучать во время противостояния, когда Земля находится между Марсом и Солнцем. Определите, через какой промежуток времени повторяются противостояния Земли и Марса. Марс совершает оборот вокруг Солнца за 687 земных дней, а Земля – за 365 дней.

М.Ромашка

2. На земле лежит слой снега толщиной h = 70 см. Давление снега на землю (без учета атмосферного давления) p = 630 Па. Погода морозная, и снег состоит из воздуха и льда. Определите, сколько процентов объема снега занимает лед, а сколько – воздух. Плотность льда $\rho_л = 0{,}9\ г/см^3$. Ускорение свободного падения $g = 10\ м/с^2$.

М.Ромашка

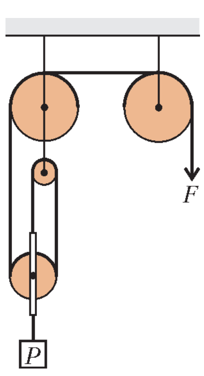

Рис. 1

3. На заводе для подъема тяжелых заготовок используется система из четырех блоков и одного троса, закрепленных на потолке, как показано на рисунке 1. С какой силой F надо тянуть вниз за конец троса, чтобы удерживать или медленно и равномерно поднимать заготовку, вес которой равен P? Участки троса, не лежащие на блоках, горизонтальны или вертикальны, весом блоков, троса и трением можно пренебречь.

М.Семенов

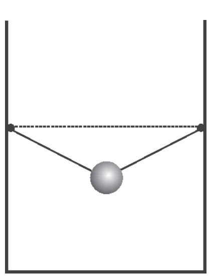

Рис. 2

4. Сплошной шарик подвешен в сосуде на двух легких нитях, как показано на рисунке 2. Свободные концы нитей закреплены на одной высоте. После того как сосуд заполнили водой и шарик оказался полностью погруженным в воду, натяжение нитей не изменилось. Определите плотность ρ материала, из которого изготовлен шарик. Плотность воды $\rho_в = 1000\ кг/м^3$.

И.Горбатый

8 класс

1. В широкий сосуд с водой медленно опускают на нити цилиндрический брусок так, что ось цилиндра все время остается вертикальной. График зависимости силы натяжения нити F от глубины погружения h нижнего основания цилиндра является отрезком прямой линии, как показано на рисунке 3. Найдите площадь основания цилиндра и его массу. Плотность воды $\rho_0 = 1\ г/см^3$, ускорение свободного падения $g = 10\ м/с^2$.

М.Ромашка

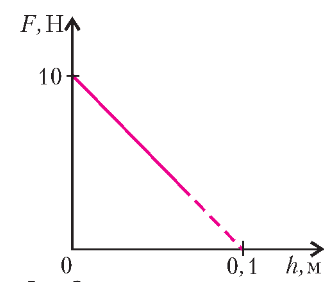

Рис. 3

2. В сосуде находился лед при температуре $t_л = 0\ ^\circ C$. Туда влили воду массой $m_в = 0{,}4$ кг, взятую при температуре $t_в = 60\ ^\circ C$. Какая температура установилась в сосуде, если конечный объем его содержимого V = 1 л? Чему равна масса содержимого сосуда? Плотности воды и льда $\rho_в = 1000\ кг/м^3$ и $\rho_л = 900\ кг/м^3$, их удельные теплоемкости $c_в = 4200\ Дж/(кг \cdot {}^\circ C)$ и $c_л = 2100\ Дж/(кг \cdot {}^\circ C)$, удельная теплота плавления льда $\lambda = 335$ кДж/кг. Теплоемкостью сосуда и потерями тепла пренебречь.

М.Ромашка

3. В одном из двух одинаково длинных «черных ящиков» находится постоянный магнит, а в другом – длинная катушка из медной проволоки, подключенная к источнику постоянного тока. Как, используя только эти «черные ящики», определить, в каком из них находится постоянный магнит? Нельзя заглядывать внутрь ящиков, разбирать ящики и разрушать их.

И.Горбатый

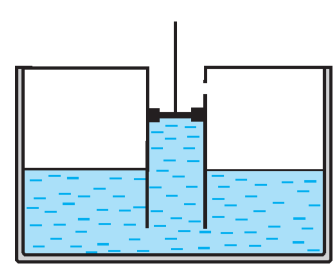

Рис. 4

9 класс

1. «Черный ящик» представляет собой систему, изображенную на рисунке 4. Внутри находятся вода и погруженный в нее узкий вертикальный цилиндр с поршнем. К поршню прикреплен выходящий наружу вертикальный шток. Потянув за шток и подвигав его вверх-вниз, школьник решил, что в «черном ящике» находится прикрепленная к штоку пружина, и измерил ее жесткость. Она оказалась равной $k = 100$ Н/м. Чему равна площадь поршня? Трением и массой поршня можно пренебречь. Плотность воды $\rho = 1000\ \text{кг}/\text{м}^3$, ускорение свободного падения $g = 10\ \text{м}/\text{с}^2$.

М.Ромашка

2. В электрической цепи, изображенной на рисунке 5, напряжение источника равно $U = 9$ В, сопротивления резисторов $R_1 = R_3 = 60$ Ом и $R_2 = 100$ Ом. Амперметр, который можно считать идеальным, показывает силу тока $I = 0{,}185$ А. Найдите силы токов, текущих через резисторы с сопротивлениями R_2 и R_3, и сопротивление четвертого резистора.

М.Ромашка

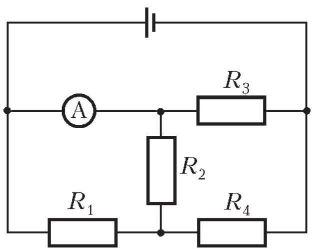

Рис. 5

10 класс

1. По гладкому горизонтальному столу скользит однородная линейка длиной $L = 25$ см. В некоторый начальный момент времени скорости концов линейки перпендикулярны к ней, направлены в разные стороны и равны $v_1 = 10$ см/с и $v_2 = 30$ см/с. Какая скорость будет у центральной точки линейки через время $t = 5$ с после начального момента? За какое время от начального момента линейка повернется на угол $90°$ от исходного положения?

А.Зильберман

2. В системе, изображенной на рисунке 6, грузы *1* и *2* прикреплены к нитям, массы грузов *1*, *2* и *3* равны M, $2M$ и $3M$ соответственно. Найдите их ускорения. Трение отсутствует. Блоки невесомы, нити невесомы и нерастяжимы, не лежащие на блоках участки нитей вертикальны.

А.Зильберман

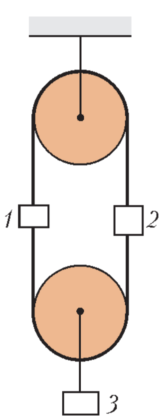

Рис. 6

3. По горизонтальному столу катится без трения тележка массой M со скоростью v_0. На горизонтальную поверхность тележки положили кирпич массой m, начальная скорость которого относительно стола была равна нулю. Кирпич продвинулся по тележке на расстояние l и остановился относительно нее. Найдите коэффициент трения между кирпичом и тележкой.

М.Ромашка

4. Изображенная на рисунке 7 электрическая цепь состоит из двух соединенных друг с другом «черных ящиков», каждый из которых имеет три вывода. При подключении к клеммам A и C омметр показывает значение сопротивления R_{AC}, при подключении к клеммам B и D – значение R_{BD}, при подключении к клеммам A и D – значение R_{AD}. Что покажет омметр при подключении к клеммам B и C? Известно, что в «черных ящиках» находятся только различным образом соединенные резисторы.

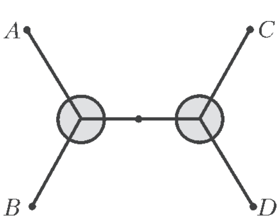

Рис. 7

Д.Харабадзе

11 класс

1. Одна из разновидностей так называемой планетарной передачи состоит из центральной (солнечной) шестерни (С), нескольких планетарных шестерен (П), оси которых соединены жесткой рамой – водилом (В), и кольцевой шестерни (К), имеющей внутреннее зацепление с планетарными (рис.8). Пусть радиусы солнечной и планетарных шестерен равны и солнечная шестерня приводится во вращение с угловой скоростью ω. С какой угловой скоростью будет вращаться кольцевая шестерня, если водило зафиксировано? С какой угловой скоростью будет вращаться водило, если кольцевая шестерня зафиксирована? С какой угловой скоростью в последнем случае будет вращаться планетарная шестерня?

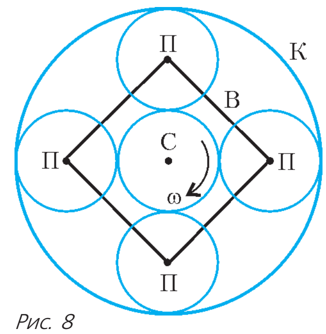

Рис. 8

Б.Обморошев

2. На длинной нити, перекинутой через блок, висят грузы массами m_1 и m_2 (рис.9). На высоте h_0 над более легким грузом держат шайбу из пластилина массой m_3. Известно, что $m_3 > m_2 - m_1 > 0$. В некоторый момент грузы массами m_1 и m_2 приходят в движение без начальной скорости. Когда первый груз доходит до шайбы, ее отпускают без начальной скорости, и шайба прилипает к грузу. На какую максимальную высоту над начальным положением поднимется шайба? Трение и масса блока пренебрежимо малы. Нить невесомая и нерастяжимая, ее участки, не лежащие на блоке, вертикальны.

М.Ромашка

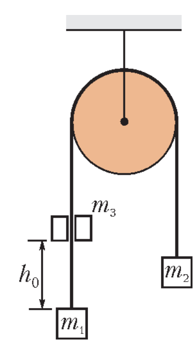

Рис. 9

3. Если направить поток протонов на кусок льда из тяжелой воды D_2O, то при минимальной кинетической энергии протонов $E_1 = 1{,}4$ МэВ происходит ядерная реакция с образованием ядер ${}^3_2He$. Какую минимальную кинетическую энергию E_2 надо сообщить ядрам дейтерия, чтобы при их попадании на кусок льда из обычной воды произошла та же ядерная реакция?

С.Варламов

4. В сосуде находился лед при температуре $t_л = -20\ °C$. Туда влили воду массой $m_в = 0{,}4$ кг, взятую при температуре $t_в = 60\ °C$. Каким может быть конечный объем системы, если установившаяся в системе температура: а) положительна; б) отрицательна; в) равна нулю? Плотности воды и льда $\rho_в = 1000\ \text{кг}/\text{м}^3$ и $\rho_л = 900\ \text{кг}/\text{м}^3$, их удельные теплоемкости $c_в = 4200\ \text{Дж}/(\text{кг} \cdot °C)$ и $c_л = 2100\ \text{Дж}/(\text{кг} \cdot °C)$, удельная теплота плавления льда $\lambda = 335$ кДж/кг. Теплоемкостью сосуда и потерями тепла пренебречь.

М.Ромашка

5. Электрическая цепь состоит из двух конденсаторов емкостью C, двух одинаковых катушек индуктивностью L и идеального трансформатора с коэффициентом трансформации, равным единице (рис.10). Если зарядить один из конденсаторов и замкнуть ключ, подсоединяющий его к

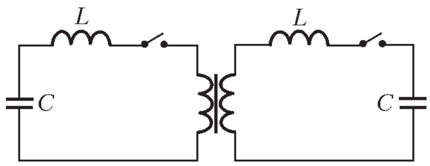

Рис. 10

трансформатору, в цепи возникнут гармонические колебания с частотой ω. Найдите возможные частоты гармонических электрических колебаний в цепи, если замкнуты оба ключа.

О.Шведов

Второй теоретический тур

8 класс

1. Два велосипедиста одновременно выезжают навстречу друг другу из деревень Липовка и Демушкино, находящихся на расстоянии $L = 10$ км друг от друга. Каждый планирует ехать со скоростью $v = 20$ км/ч и, достигнув противоположной деревни, сразу повернуть обратно. Но на пути все время дует ветер, скорость и направление которого постоянны. При движении по ветру скорость увеличивается на столько же, на сколько уменьшается при движении против ветра. Велосипедист, который сначала ехал по ветру, достигнув противоположной деревни, сразу повернул назад, а велосипедист, который сначала ехал против ветра, задержался в противоположной деревне, чтобы отдохнуть, и только потом повернул обратно. Известно, что велосипедисты встречались в точках A и B, находящихся на расстояниях $L_A = 2$ км и $L_B = 6$ км от Липовки. Найдите времена движения из Липовки в Демушкино и из Демушкино в Липовку. В какой деревне и в течение какого промежутка времени отдыхал велосипедист, ехавший сначала против ветра?

М.Ромашка

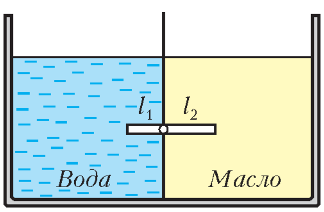

Рис. 11

2. Плотность масла измеряют в опыте, схема которого показана на рисунке 11. Сосуд разделен на две части вертикальной перегородкой. В одну часть сосуда налита вода, в другую – масло. В перегородку встроен шарнир, который может вращаться без трения. В шарнир вставлена однородная сосновая линейка, которая находится в равновесии. Длина левой части линейки $l_1 = 40$ см, правой $l_2 = 60$ см. Плотность воды $\rho_в = 1000$ кг/м^3, плотность линейки $\rho = 600$ кг/м^3. Чему равна плотность масла?

М.Ромашка

3. Вазон для цветов, стоящий на улице, имеет плоское дно и вертикальные стенки. Толщина слоя земли в вазоне $h = 15$ см, а температура земли $t = 11$ °C. На улице похолодало, и пошел снег. Снежинки состоят изо льда, имеют массу $m = 50$ мг, объем $V = 0{,}5$ см^3 и температуру $t_0 = 0$ °C. Они падают вертикально с постоянной скоростью $v = 1$ м/с. В объеме воздуха $V_0 = 1$ м^3 находится $N_0 = 100$ снежинок. За какое время на земле в вазоне нарастет слой снега толщиной $H = 10$ см? Считайте, что вся земля в вазоне равномерно пропитывается водой, имеет в любой момент одну и ту же температуру во всем объеме и почти не обменивается теплом со стенками вазона и с воздухом. Плотность земли $\rho = 1500$ кг/м^3, удельная теплоемкость земли $c = 900$ Дж/(кг·°C), удельная теплота плавления льда $\lambda = 335$ кДж/кг.

М.Семенов, М.Ромашка

9 класс

1. На неподвижно закрепленном цилиндре радиусом R лежит тонкая линейка длиной $l = 2\pi R$ и массой M. Линейка расположена горизонтально перпендикулярно к оси цилиндра и опирается на него своей серединой. На середине линейки сидит жук массой $0{,}2M$, который начинает медленно ползти к одному из концов линейки, прочно цепляясь за ее шероховатости; линейка при этом меняет угол своего наклона к горизонту, перекатываясь по цилиндру без проскальзывания. На каком расстоянии от середины линейки будет расположена точка соприкосновения линейки и цилиндра, когда жук доползет до конца линейки? Под каким углом к горизонту будет при этом наклонена линейка? При каких значениях коэффициента трения между цилиндром и линейкой возможно такое ее перекатывание без проскальзывания?

И.Горбатый

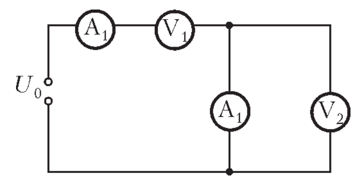

Рис. 12

2. Электрическая цепь, изображенная на рисунке 12, состоит из идеальной батарейки, двух одинаковых вольтметров и двух одинаковых миллиамперметров. Показание миллиамперметра A_1 равно $I_1 = 1{,}6$ мА, показания вольтметров равны $U = 1{,}2$ В и $U' = 0{,}3$ В. Какой из вольтметров – V_1 или V_2 – показывает меньшее напряжение? Найдите показание миллиамперметра A_2 и напряжение батарейки.

А.Зильберман

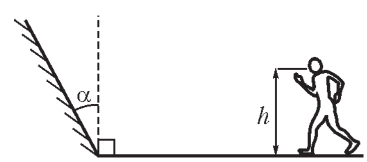

Рис. 13

3. Длинное наклонное зеркало соприкасается с горизонтальным полом и наклонено под углом α к вертикали (рис.13). К зеркалу приближается школьник, глаза которого расположены на высоте h от уровня земли. На каком максимальном расстоянии от нижнего края зеркала школьник увидит: а) изображение своих глаз; б) свое изображение полностью во весь рост?

М.Ромашка

10 класс

1. Школьник бросает мяч в баскетбольное кольцо. Чтобы попасть в цель при броске под углом $\alpha_1 = 30°$ к горизонту, он должен сообщить мячу начальную скорость $v_1 = v$, а при броске под углом $\alpha_2 = 60°$ – начальную скорость $v_2 = v/2$. На какой высоте над точкой бросания расположено баскетбольное кольцо? Под каким углом к горизонту наклонен отрезок, соединяющий точку бросания и кольцо? Бросок каждый раз производится из одной и той же точки. Сопротивлением воздуха можно пренебречь, ускорение свободного падения равно g.

А.Зильберман

2. Найдите ускорения грузов *1* и *2* и силу натяжения нити в системе, изображенной на рисунке 14. Массы грузов *1*, *2*, *3* и *4* равны M_1, M_2, m_1 и m_2 соответственно. Грузы *3* и *4* касаются грузов *1* и *2*, участки нити, не лежащие на блоках, горизонтальны или вертикальны. Нить натянута, невесома и нерастяжима, блоки легкие, трение отсутствует.

А.Зильберман

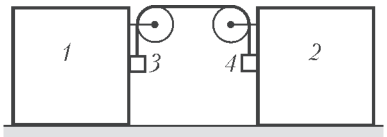

Рис. 14

11 класс

1. На конце невесомого проводящего стержня закреплен маленький металлический шарик, касающийся гладкой проводящей сферической поверхности радиусом R = 0,8 м (рис.15). Второй конец стержня закреплен в центре сферы при помощи проводящего шарнира так, что стержень может вращаться без трения вокруг него, сохраняя электрический контакт со сферой. Эта система помещена в однородное вертикальное магнитное поле с индукцией B = 0,5 Тл и подключена к батарее. Если стержень закрутить вокруг вертикальной оси в определенном направлении с частотой $\omega = 5\ \text{с}^{-1}$ и под определенным углом к вертикали, то этот угол и частота вращения в дальнейшем не будут меняться. Определите этот угол и ЭДС батареи. Ускорение свободного падения принять равным $g = 10\ \text{м/с}^2$.

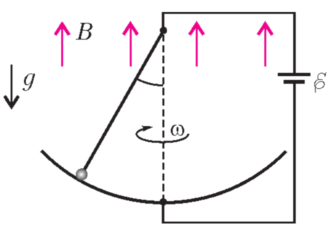

Рис. 15

Ю.Старокуров, М.Семенов

2. Звуковая волна от удаленного источника падает на стену, имеющую вогнутую цилиндрическую форму, под углом, близким к α, причем эта волна идет перпендикулярно оси цилиндра. Определите, в какую точку вблизи стены следует поместить чувствительный микрофон, чтобы он зарегистрировал максимально возможную интенсивность звука. Найдите расстояния от этой точки до стены и до оси цилиндра. Радиус цилиндра R много больше размеров стены, но много меньше расстояния до источника. Длина волны звука много меньше размеров стены.

О.Шведов

Публикацию подготовили М.Семенов, А.Якута

Геометрические олимпиады имени И.Ф.Шарыгина

В память о ярком человеке, талантливом математике и выдающемся педагоге Игоре Федоровиче Шарыгине (1937–2004) ряд российских научных организаций и учебных заведений решили ежегодно, начиная с 2005 года, проводить геометрическую олимпиаду школьников. В оргкомитет и жюри олимпиады вошли известные ученые, педагоги, энтузиасты математического просвещения из разных российских регионов. Олимпиада состоит из двух туров: заочного и финального. В заочном туре, задачи которого публикуются в газете «Математика» и на сайте Московского центра непрерывного математического образования (www.mccme.ru), могут принимать участие все желающие школьники. Победители заочного тура приглашаются на финал. Кроме того, к участию в финальном туре допускаются победители региональных геометрических олимпиад. Финальный тур проводится в устной форме.

Финальные туры двух первых олимпиад прошли в сентябре 2005 в Москве и в июле 2006 года в Дубне. Материалы этих олимпиад опубликованы в книге «Геометрические олимпиады им. И.Ф.Шарыгина» (М.: МЦНМО, 2007), посвященной 70-летию И.Ф.Шарыгина.

Среди победителей двух первых олимпиад хочется отметить Е.Авксентьева (Ростов), С.Сафина (Краснодар), М.Лысова, Н.Печёнкина, Р.Девятова, М.Илюхину (все – Москва), не только показавших высокие результаты, но и нашедших в ряде задач более красивые решения, чем были у жюри.

Ниже приводятся избранные задачи первых двух олимпиад (с решениями) и несколько задач заочного тура третьей олимпиады (для самостоятельного решения).

Задачи

1 (В.Протасов). *Две окружности с радиусами 1 и 2 имеют общий центр в точке O. Вершина A правильного треугольника ABC лежит на большей окружности, а середина стороны BC – на меньшей. Чему может быть равен угол BOC?*

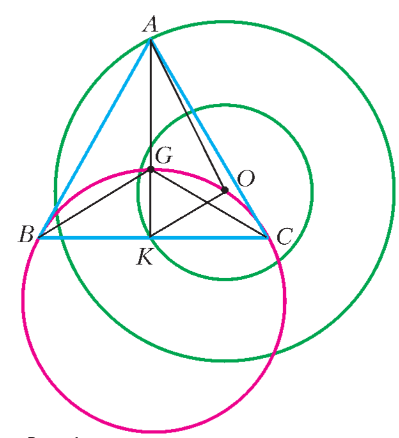

Рис. 1

Решение (М.Лысов). Это, пожалуй наиболее элегантное, решение основано на использовании следующей классической теоремы элементарной геометрии. Пусть имеется некоторый отрезок AB на плоскости и некоторое положительное число λ. Тогда геометрическое место точек X, таких что $\frac{AX}{BX} = \lambda$, есть некоторая окружность. Если P и Q – точки, которые делят отрезок в отношении λ (внутренним и внешним образом), то эта окружность совпадает с окружностью, построенной на отрезке PQ как на диаметре. Она называется окружностью Аполлония.

Из условия нашей задачи сразу следует, что $AG/KG = AB/KB = AC/KC = AO/KO = 2$ (рис.1), откуда вытекает, что точки B, G, O, C лежат на окружности Аполлония для отрезка AK и $\lambda = 2$. Понятно, что $\angle BOC = \angle BGC = 120^\circ$ (или $180^\circ - \angle BGC = 60^\circ$).

2 (В.Пайлс, Нидерланды). *На плоскости даны два отрезка A_1B_1 и A_2B_2, причем $\frac{A_2B_2}{A_1B_1} = k < 1$. На отрезке A_1A_2 взята точка A_3, а на продолжении этого отрезка за точку A_2 – точка A_4, так что $\frac{A_3A_2}{A_3A_1} = \frac{A_4A_2}{A_4A_1} = k$. Аналогично, на отрезке B_1B_2 берется точка B_3, а на продолжении этого*