

Из равенства нулю его первой производной:

$$\frac{dW}{dr} = -\frac{p^2}{mr^3} + \frac{m\gamma}{r^2} = 0$$

мы немедленно найдем значение радиуса установившегося, в данном случае стационарного, движения:

$$R = \frac{p^2}{\gamma m^2},$$

которое, разумеется, тождественно найденному ранее значению.

Теперь для изучения устойчивости вычислим вторую производную функции W :

$$\frac{d^2W}{dr^2} = \frac{3p^2}{mr^4} - \frac{2m\gamma}{r^3}.$$

Но вычислить эту производную мало – надо в нее еще подставить только что найденное решение:

$$\frac{d^2W}{dr^2} = \frac{3p^2}{m \left(\frac{p^2}{\gamma m^2}\right)^4} - \frac{2m\gamma}{\left(\frac{p^2}{\gamma m^2}\right)^3} = \frac{\gamma^4 m^7}{p^6} > 0.$$

Это означает, что кеплеровская круговая орбита устойчива по радиусу, и Вселенной не грозит уничтожение (в рамках сделанных предположений) в смысле существенных изменений радиусов орбит.

Вместе с тем, в задаче Кеплера нет устойчивости «по углу». Иными словами, два спутника, запущенные из близких точек и с близкими скоростями, вообще говоря, разбегутся,

т.е. удалятся друг от друга, хотя радиусы их орбит будут оставаться близкими друг другу все время.

Задача Кеплера идеально «приспособлена» для ответа на этот вопрос с помощью только элементарных средств. В самом деле, хорошо известно, что в этой задаче траектории могут быть лишь конические сечения, т.е. эллипс, парабола или гипербола. Рассмотрим, наряду с найденной круговой орбитой, другую близкую орбиту. Нетрудно сообразить, что эта орбита окажется эллиптической. Но для эллиптической орбиты, выполняется соотношение $\omega^2 a^3 = \gamma$, где a – большая полуось эллипса (a в случае круговой орбиты – ее радиус). Ясно, что для наугад взятой эллиптической орбиты, близкой к рассматриваемой круговой, величина полуоси a не будет совпадать с радиусом круговой орбиты, да и орбитальная угловая скорость ω в общем случае будет слегка отличаться от угловой скорости при круговом движении. Вот эта разница в орбитальных угловых скоростях и определяет разбегание спутников по углу.

Какова же мораль из всего сказанного? Во-первых, силы инерции, в данном случае центробежные силы инерции, не так уж страшны, как может показаться на первый взгляд. Их потенциальный характер позволяет не только находить установившиеся движения, но и исследовать их устойчивость. Это, как мы видели, посильно школьнику. Единственное, что надо уметь, так это отличать те случаи, когда систему принудительно вращают с постоянной угловой скоростью, от случаев, когда она вращается совершенно свободно.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТАТИВ

Поляризованный шар – это просто

Е. РОМИШЕВСКИЙ, А. СТАСЕНКО

В СОВРЕМЕННОЙ ФИЗИКЕ ЕСТЬ ГЛАГОЛЫ «НАМАГНИТИТЬ» и «наэлектризовать» некое тело, т.е. сделать его источником длительно существующих магнитного и электрического полей. Вещества, у которых эти свойства проявляются наиболее ярко, называют ферромагнетиками и сегнетоэлектриками соответственно.

Мы собираемся рассмотреть структуру электрического поля поляризованного тела, имеющего наиболее совершенную форму – форму шара. Но прежде вспомним самые простые факты.

Возьмем две бесконечные параллельные пластины, имеющие одинаковые по величине, но противоположные по знаку заряды (рис.1,а). Пусть на единицу поверхности этих пластин приходится заряды $\pm\sigma_0$ (поверхностная плотность зарядов). Как известно, в таком устройстве – конденсаторе

– напряженность электрического поля равна $E_0 = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0}$ (здесь ϵ_0 – электрическая постоянная), а вне пластин поле отсутствует, т.е. напряженность равна нулю. Этот факт можно трактовать и так: при пересечении левой пластины нормальная составляющая электрического поля увеличивается от нуля до значения $+\frac{\sigma_0}{\epsilon_0}$, а при переходе через правую пластину ее скачок вниз равен

$-\frac{\sigma_0}{\epsilon_0}$. Иначе,

$$\Delta E_n = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0}.$$

Расположим теперь между этими пластинами слой вещества, способного поляризоваться. Это значит, что под действием первоначального поля молекулы этого вещества либо повернутся в одном направлении (конечно, вдоль вектора \vec{E}_0), если они заранее представляли собой электрические диполи, либо «центры тяжести» их отрицательных и положительных зарядов раздвинутся под действием этого поля, либо произойдет и то и другое. Как бы то ни было, в результате на поверхности слоя вещества

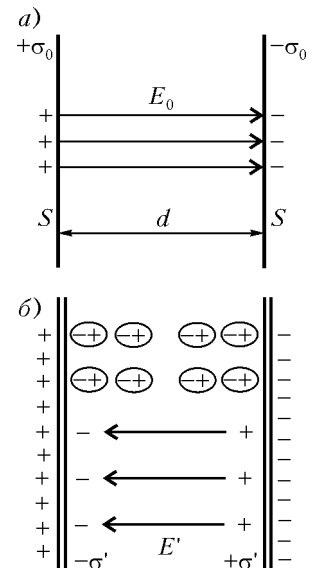


Рис. 1

появятся заряды плотностью $\mp\sigma'$, которые создадут поле \vec{E}' , противоположное по направлению полю \vec{E}_0 (рис.1,б). Таким образом, внутри первого конденсатора как бы вставили второй, и его поле равно $E' = -\frac{\sigma'}{\epsilon_0}$. В результате суммарное поле внутри слоя равно

$$E_c = E_0 - E' = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0} - \frac{\sigma'}{\epsilon_0} = \frac{E_0}{\epsilon}$$

где ϵ – диэлектрическая проницаемость вещества. Ясно, что оно будет слабее, чем E_0 .

Теперь представим, что возникшее распределение зарядов «заморожено», т.е. может существовать (даже после того, как исчезнет заряд конденсатора) достаточно долго – по крайней мере, пока вы читаете эту статью. Вынем наэлектризованный слой из конденсатора – внутри слоя останется однородное поле \vec{E}' . А наличие связанных зарядов плотностью $\pm\sigma'$ на поверхностях слоя можно трактовать еще и так. Весь слой заполнен равномерно распределенными диполями, каждый из которых имеет дипольный момент \vec{p}_1 . (Напомним, что дипольный момент диполя, т.е. системы двух одинаковых по величине, но противоположных по знаку точечных зарядов, направлен от отрицательного заряда к положительному и равен произведению величины заряда на расстояние между зарядами.) Если концентрация диполей n , то в единице объема слоя содержится суммарный дипольный момент $\vec{P} = n\vec{p}_1$. Его размерность $\frac{\text{Кл} \cdot \text{м}}{\text{м}^3} = \frac{\text{Кл}}{\text{м}^2}$ совпадает с размерностью поверхностной плотности заряда, и это неслучайно. Действительно, величину суммарного дипольного момента слоя можно записать как PSd , где Sd – объем слоя. С другой стороны, дипольный момент равен произведению заряда «пластины» $\sigma'S$ на толщину слоя d . Приравнявая эти два выражения, получим

$$PSd = \sigma'Sd, \text{ откуда } P = \sigma'.$$

Учтем еще, что вектор \vec{P} направлен от отрицательно заряженной пластины к положительной (т.е. против вектора \vec{E}'). Тогда легко понять, что при переходе, например, через положительно заряженную границу слоя его значение уменьшается от P до нуля, так как вне пластины никаких диполей нет. Значит, смысл полученного соотношения $P = \sigma'$ можно уточнить: речь идет о скачке нормальной составляющей вектора \vec{P} :

$$P^+ - P^- = \Delta P_n = -\sigma'.$$

Но где же обещанный шар? А вот теперь из обсуждаемого слоя вырежем шар радиусом a (рис.2). Положительные и отрицательные заряды «хвостов» молекул-диполей внутри шара по-прежнему взаимно компенсируют друг друга, а приповерхностные, которые «торчат наружу», создают поверхностный заряд плотностью $\sigma = \sigma' \cos \theta$, где θ – полярный угол. Действительно, если мы возьмем несколько элементарных слоев молекул общей толщиной $\Delta y \sim N\Delta y_1$, то их «хвосты» окажутся на поверхностном кольце шириной $a\Delta\theta = \Delta y / \cos \theta$ (см. треугольник ABC на рисунке 2), откуда

$$\frac{\Delta y}{a\Delta\theta} = \cos \theta \sim \frac{N\Delta y_1}{a\Delta\theta}.$$

Это же косинусоидальное распределение можно объяснить и полученным выше соотношением между скачком нормальной составляющей вектора \vec{P} и поверхностной плотностью связанных (теперь на поверхности сферы) зарядов:

$$P_n^+ - P_n^- = 0 - P_n = -P \cos \theta = -\sigma(\theta), \text{ и } \sigma(\theta) = \sigma' \cos \theta.$$

Интересно отметить, что косинусоидальное распределение зарядов на сфере всегда создает внутри сферы однородное поле. Вспомним хотя бы проводящий шар, помещенный в однородное электрическое поле \vec{E}_0 . По определению, поле внутри шара равно нулю. Значит, на поверхности возникает такое распределение зарядов, которое создает свое поле $-\vec{E}_0$, компенсирующее внешнее (рис.3). Можно найти нормальную составляющую E_n^+ поля снаружи сферы (у ее

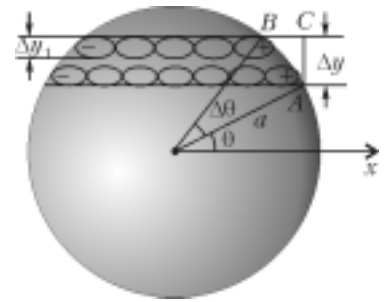


Рис. 2

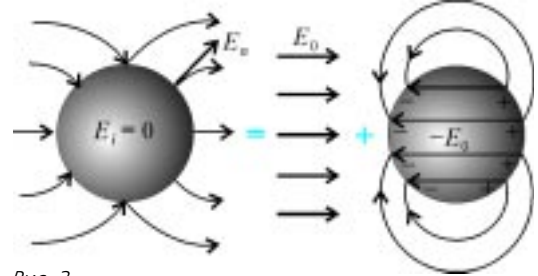


Рис. 3

внешней поверхности):

$$E_n^+ = \frac{\sigma(\theta)}{\epsilon_0}.$$

(А тангенциальная составляющая, естественно, равна нулю – иначе по поверхности проводящей сферы потек бы электрический ток.)

Кстати, в этом случае легко получить силу, действующую на единицу поверхности поляризованной сферы. Заряд σ , расположенный в этом месте, создает собственное поле напряженностью $\pm \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$, направленное как по радиусу, так и против радиуса (поле плоскости), значит, его составляющие равны $\pm \frac{1}{2} E_n^+$. Сам же заряд находится в поле, равном $+\frac{1}{2} E_n^+$, поэтому действующая на него сила равна $\sigma \cdot \frac{1}{2} E_n^+ = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0}$.

Этот результат можно перефразировать и так – давление на поверхность сферы (изнутри) равно произведению поверхностной плотности заряда на полусумму нормальных внутренней и внешней составляющих электрического поля:

$\sigma \frac{E_n^+ + 0}{2}$, или в общем случае (если поле E_n^- внутри не равно нулю): $\sigma \frac{E_n^+ + E_n^-}{2}$. Этот факт нам скоро пригодится.

Но вернемся к нашему поляризованному диэлектрическому шару. Мы уже знаем, что электрическое поле E_i внут-

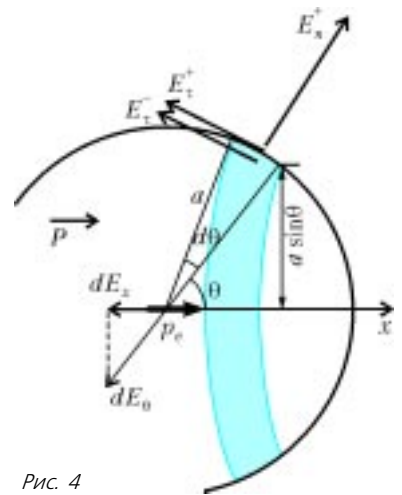


Рис. 4

при него однородно. Значит, его напряженность в любой точке такая же, как, например, в центре. А ее легко найти. Действительно, каждое кольцо на поверхности сферы площадью $2\pi a \sin \theta \cdot a d\theta$ (рис.4) имеет заряд $\sigma(\theta) \cdot 2\pi a \sin \theta \cdot a d\theta$, который в центре (на расстоянии a) создает (по закону Кулона) поле напряженностью

$$dE_x = dE_\theta \cos \theta = -\frac{\sigma(\theta) \cdot 2\pi a \sin \theta \cdot a d\theta}{4\pi\epsilon_0 a^2} \cos \theta.$$

(Тут мы не забыли спроектировать все элементарные поля на ось x , поэтому и появился $\cos \theta$ в конце выражения.) Напряженность поля внутри будет суммой вкладов от всех элементарных колец:

$$E_i = -\int_{\theta=0}^{\pi} \frac{P \cos \theta \cdot 2\pi a \sin \theta \cdot a d\theta}{4\pi\epsilon_0 a^2} \cos \theta = \frac{P}{2\epsilon_0} \int_{\theta=0}^{\pi} \cos^2 \theta \cdot d \cos \theta = \frac{P}{2\epsilon_0} \frac{\cos^3 \theta}{3} \Big|_{\theta=0}^{\pi} = -\frac{P}{3\epsilon_0}.$$

А чтобы найти внешнее поле, вспомним известный мысленный эксперимент. Пусть имеется два шара, вложенных друг в друга и обладающих равными зарядами противоположных знаков, т.е. $\pm q$. Естественно, суммарный заряд этих шаров равен нулю, и никакого поля пока что нет. Но теперь давайте раздвинем шары в направлении оси x так, что расстояние между их центрами станет порядка размера молекулы l . В центре возникнет диполь с моментом $p_e = ql$, а на поверхности «вылезут» заряды плотностью $\pm\sigma$ (рис.5,а). При этом такое устройство останется почти шаром. Действительно, если радиус шара взять, например, равным $1 \text{ см} = 10^{-2} \text{ м}$, то размер молекул, измеряемый ангстремами ($1 \text{ \AA} = 10^{-10} \text{ м}$), в миллион раз меньше, и ни один файн-механик не заметит,

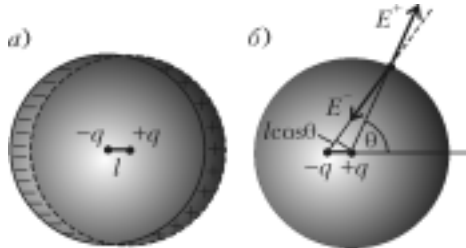


Рис. 5

что шар деформирован. Конечно, поле образовавшегося «диполя» внутри шара по-прежнему равно нулю, так что этот диполь – фикция, но он поможет найти поле поверхностных зарядов вне шара.

Рассмотрим рисунок 5,б. Электрические поля на поверхности шара от фиктивных зарядов $\pm q$ равны $E^+ = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a^2}$ (считаем, что положительный заряд расположен строго в центре координат) и $E^- = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 (a + l \cos \theta)^2}$. Так как эти два вектора лежат почти на одной прямой (вследствие того, что $l \ll a$), составляющую внешнего дипольного поля найдем просто:

$$E_n^+ \approx \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{(a + l \cos \theta)^2} \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 a^2} \left(1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{l}{a} \cos \theta\right)^2} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a^2} \frac{1 + 2\frac{l}{a} \cos \theta + \left(\frac{l}{a} \cos \theta\right)^2}{\left(1 + \frac{l}{a} \cos \theta\right)^2} \approx \frac{2ql \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 a^3}, \text{ где } ql = p_e.$$

Теперь у нас есть все, чтобы понять, что произойдет с поляризованным диэлектрическим шаром. Нормальная составляющая внешнего поля равна (см. рис.4)

$$E_n^+ = \frac{2p_e \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 a^3} = \frac{2}{3} \frac{P}{\epsilon_0} \cos \theta,$$

а внутреннего –

$$E_n^- = -\frac{P}{\epsilon_0} \cos \theta.$$

Тангенциальные составляющие внутреннего и внешнего полей одинаковы (свойство потенциальности в электростатике):

$$E_\tau^+ = E_\tau^- = E_i \sin \theta = \frac{P}{3\epsilon_0} \sin \theta.$$

Следовательно, нормальная составляющая силы, действующей на единицу поверхности шара, равна

$$f_n = \sigma(\theta) \frac{E_n^+ + E_n^-}{2} = \frac{P^2 \cos^2 \theta}{2 \cdot 3\epsilon_0},$$

а тангенциальная –

$$f_\tau = \sigma(\theta) E_\tau = \frac{P^2}{3\epsilon_0} \sin \theta \cos \theta.$$

Соответственно, x -компонента силы (на единицу площади поверхности шара) будет равна

$$f_x = f_n \cos \theta - f_\tau \sin \theta = \frac{P^2}{3\epsilon_0} \cos \theta \left(\frac{\cos^2 \theta}{2} - \sin^2 \theta \right).$$

Что же получилось? Выходит, что в приполярной области (при малых θ) эта сила положительна, а в экваториальной – отрицательна! Видно, что существует такое значение θ_* полярного угла, при котором эта сила обращается в ноль:

$$\sin^2 \theta_* = \frac{\cos^2 \theta_*}{2}, \quad \text{tg } \theta_* = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \theta_* \approx 35^\circ.$$

В направлении полярной оси ($\theta = 0$) силы стремятся растянуть шар, а в экваториальной плоскости – сжать (рис.6). Разумеется, если мы просуммируем все силы (проинтегрируем по поверхности), получим силу притяжения – это не удивительно, если вспомнить об эквивалентном диполе p_e , заряды которого, конечно же, притягивают друг друга.

Но чтобы решить задачу о деформации нашего поляризованного шара, нужно изучить теорию упругости. А можно ли решить аналогичную задачу для шара, вырезанного из куска магнита?

Все это вполне возможно, если вы поступите в МФТИ или МГУ. Чего вам и желаем.

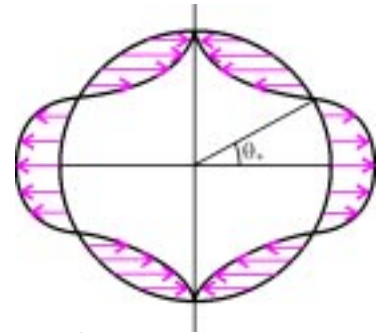


Рис. 6