Методическое руководство к лабораторной работе «Алгоритм Евклида»

(Глава 3, 7 класс)

Цель работы – создать в Excel «машину» для автоматического вычисления НОД двух чисел по алгоритму Евклида. При этом продолжается знакомство с возможностями и приемами работы в Excel. Появляется очень важное для информатики понятие условного оператора. Готовится основа к лабораторной работе о линейных диофантовых уравнениях.

Инструментарий работы состоит из одной «книги» Excel, имеющей три листа, – рабочий лист с краткими формулировками заданий, лист «Алгоритм с вычитанием» и лист «Алгоритм с делением» на которых представлены реализованные варианты алгоритма Евклида. Их можно использовать так же, как и в ЛР-03 («Ряд Фибоначчи»).

Общие замечания

Алгоритм Евклида для нахождения наибольшего общего делителя Евклида прост, но фундаментально важен для элементарной теории чисел. Он рассматривается в Беседе 3 главы 3 (История) учебника в связи с изучением деления многочленов с остатком и попутным повторением деления целых чисел. Таким образом, эта тема является в определенной мере факультативной и в Рабочей тетради такой лабораторной работы нет. Однако с ней необходимо познакомить учеников в том или ином объеме, если в дальнейшем планируется выполнение компьютерной версии лабораторной работы «Линейное диофантово уравнение» (ЛР-04 к гл. 4).

Идея алгоритма Евклида в том, чтобы шаг за шагом уменьшать данную пару (натуральных) чисел, точнее, большее из двух чисел, не изменяя их НОД. Процесс не может продолжаться бесконечно: рано или поздно одно из чисел впервые становится равным 0, при этом второе и будет равно искомому наибольшему общему делителю. В заданиях работы предлагается использовать немного другой способ «выхода» из вычислений, более простой для реализации в Excel: вычисление заканчивается тем, что числа пары становятся равными (их НОД при этом будет равен им самим), а далее эта пара повторяется. На листах с примерами приведена и более «умная» версия алгоритма: ячейки, следующие за полученными равными числами, оставляются пустыми. В работе предлагаются два способа «уменьшения» пары чисел. При первом способе, более простом (но и более длинном) на каждом шагу из большего числа вычитается меньшее, пока они не уравняются. При втором способе (приведенном в учебнике) вместо вычитания производится деление с остатком. Как минимум, нужно разобрать и реализовать только первый способ: он проще и он будет использован в работе ЛР-04 к 4-й главе (о линейном диофантовом уравнении). Кроме того, первый способ позволяет легко доказать, что алгоритм действительно «работает». Но это доказательство, как и построение второго алгоритма, – это, скорее, дополнительный материал, рассчитанный на более сильных учеников. А те из них, кто достаточно хорошо освоится в работе с Excel, могут попробовать воспроизвести и совсем уже необязательные «украшения», помещенные на листах с примерами: появление надписи «НОД» рядом с последней вычисленной парой.

Ход работы и комментарии к заданиям

Работа организуется так же, как компьютерная версия ЛР-03. Текст заданий следует раздать; можно показывать его и на экране, но экран понадобится и для демонстрации примеров в Excel. Техника автозаполнения таблицы должна быть уже знакома ученикам по ЛР-03, но данная работа сложнее с точки зрения содержания и может потребовать более активной помощи со стороны учителя. Свою таблицу с построенным алгоритмом каждый ученик должен сохранить, чтобы можно было ее использовать в работе ЛР-04 к 4-й главе. Как вариант, данную работу можно отложить и объединить с работой ЛР-04 к 4-й главе. На объединенную работу потребуется 2-часовое занятие.

Работа начинается с фронтального разбора вычисления НОД(1485, 405) (по первому варианту алгоритма Евклида – с вычитанием):

(1485; 405) → (1080=1485–405; 405) → (675; 405) → (270; 405) → (270; 135) → (135; 135);

замечаем, что первые три раза мы уменьшали первое число пары, затем второе, затем опять первое. В итоге получилась пара, в которой оба числа равны 135. Это и есть НОД исходных чисел.

Задание 1. Вычислите самостоятельно НОД(1125; 350) в тетради. Впишите числа 1125 и 350 в желтые клетки на листе «Алгоритм с вычитанием» и сравните результат со своим вычислением.

Ответ: 25. Можно оформить вычисление «в столбик» – это будет больше похоже на то, что потом получится в Excel:

1125	**350**
775	350
425	350
75	350
75	275
75	200
75	125
75	50
25	50
25	25

Чтобы научить Excel вычислять НОД автоматически, надо формализовать правило вычисления. Для первого числа пары (a; b) это можно сделать вместе с классом: a заменяется разностью $a - b$, если $a > b$, и остается неизменным в противном случае.

Задание 2. Сформулируйте правило преобразования второго числа пары b.

Теперь можно выписать правило преобразования пары за один шаг: (a; b) $\to$ (a'; b'), где

$$a' = \begin{cases} a - b, \text{ ï ðè } a > b, \\ a \text{ â î ñòàëüíûõ ñëó÷àÿõ}; \end{cases} \quad b' = \begin{cases} b - a, \text{ ï ðè } b > a, \\ b \text{ â î ñòàëüíûõ ñëó÷àÿõ}. \end{cases}$$

В следующем задании объясняется, как и почему эти правила вычисляют НОД(a; b).

Задание 3*. а) Докажите, что рано или поздно образуется пара из двух равных натуральных чисел.
б) Докажите, что любой общий делитель чисел a и b является делителем преобразованных чисел a' и b', и наоборот, любой общий делитель a' и b' делит a и b. Выведите отсюда, что НОД(a; b) = НОД(a'; b').
в) Докажите, что если из исходной пары (a; b) получилась пара (m; m), то m = НОД(a; b).

«Звездочка» в этом задании обозначает не столько его сложность, сколько факультативность. Утверждения выводятся непосредственно из правила преобразования пары, но из-за ограниченности времени лучше заняться ими после того, как будет построен алгоритм.

Если a и b – неравные натуральные (целые положительные) числа, то после следующего шага они останутся натуральными, при этом большее из них уменьшится как минимум на 1. Поэтому, если, например, изначально $a > b$, то количество таких шагов не больше $a - 1$, т.е. к этому моменту числа должны стать равными. Этим и доказывается утверждение а).
Утверждение б) следует из того, что если два числа делятся на d, то их разность и сумма тоже делятся на d. Поэтому списки всех общих делителей пар (a; b) и (a'; b') совпадают; значит и наибольшие общие делители этих пар чисел совпадают.
Утверждение в) очевидно: в силу б), НОД(a; b) = НОД(m; m) = m.

При составления алгоритма в Excel по нашему правилу первые числа пар пишутся в столбце B рабочего листа, вторые – в столбце C. Если $a > b$, то следующее значение первого числа пары равно $a - b$; в противном случае оно не меняется. Для вычисления этого значения в Excel, используется «условная формула» вида

ЕСЛИ(условие; значение при выполнении условия; значение при невыполнении условия).

В нашем случае условие – это «$a > b$», значение при выполнении условия – «$a - b$», при невыполнении – «a» и формула для преобразования первого числа пары принимает вид

ЕСЛИ($a > b$; $a - b$; a). Эту формулу и надо занести в каждую ячейку столбца B, начиная с B3, подставив вместо a и b номера ячеек предыдущей строки. В задании 4 дается инструкция, как это сделать:

Задание 4. Запишите в (желтые) ячейки B2 и C2 на рабочем листе данные числа, например, 1485 и 405. Запишите в ячейку B3 условную формулу для нового значения a:
=ЕСЛИ(B2>C2; B2–C2; B2). Убедитесь, что получилось 1080.

Задание 5. Заполните самостоятельно ячейку C3 для нового значения b. Убедитесь, что получилось 405.

Ответ: В C3 записывается «=ЕСЛИ(C2>B2; C2–B2; C2)». Желательно, чтобы ученики сделали это самостоятельно. (Еще лучше, если после ознакомления со структурой условной команды, кто-то сам заполнит и ячейку B3, не заглядывая в инструкцию из задания 4.)

Задание 6. Выделите ячейки B3 и C3 и растяните выделение вниз настолько, чтобы числа a и b стали равными (должна возникнуть и затем повторяться пара (135; 135)); проверьте результат по листу «Алгоритм с вычитанием».

После этого задания необходимый минимум можно считать выполненным. Желательно оставить несколько минут на то, чтобы воспользоваться плодами своего труда и вычислить НОД для нескольких пар чисел, например, 1755 и 1176, 1755 и 350. Во втором случае для получения равных чисел (пары (5; 5)) потребуется 75 строк и две «серии» вычитаний: 5 раз из левого числа вычитается правое, а потом 70 раз из правого (350) левое (5). Возникает естественно желание улучшить алгоритм. Это можно сделать путем замены вычитания делением.

Дальнейший ход работы определяется учителем: можно вернуться к заданию 3 и обосновать построенный алгоритм или перейти к заданию 7 и составить второй вариант алгоритма. Можно направить одних учеников по одному пути, а других по другому.

Прежде, чем перейти к заданию 7, нужно рассмотреть примеры и заметить, что вычисление по нашему алгоритму состоит из серий вычитаний: если $a > b$, то из первого числа пары (a; b) вычитается второе, пока не получится разность, меньшая или равная b. В первом случае начинается серия вычитаний первого числа из второго, во втором (разность равна b) всё заканчивается.

Задание 7. Как, не производя вычитаний, узнать, сколько вычитаний будет в одной серии, и какая разность получится в итоге? Какие случаи нужно рассмотреть? (*Указание*: вспомните про деление.)

Если одно из чисел делится на другое (например, $a = qb$), то число вычитаний в серии будет на 1 меньше частного, т.е. $q – 1$, а в итоге получается пара (b; b). Если же ни одно из чисел на другое не делится, то длина серии равна (неполному) частному от деления большего числа на меньшее, а в результате большее число заменяется остатком от этого деления: пусть $a = qb + r$, где $0 \le r < b$; тогда длина серии равна q и из пары (a; b) получается пара (r; b). Заметим, что в случае $a < b$ остаток от деления a на b равен a. Поэтому можно сказать, что <u>a всегда заменяется своим остатком от деления на b, за исключением случая, когда a делится на b и $a \to b$</u>. Такое же правило, с перестановкой a и b, действует и для b. Остаток от деления a на b записывается в Excel формулой ОСТАТ(a;b); вместо a и b в нее можно подставить номера ячеек, где находятся эти числа. В частности, условие делимости нацело запишется в виде ОСТАТ(a;b) = 0.

Задание 8. Пользуясь этими правилами, составьте вычислитель НОД по алгоритму Евклида на Рабочем листе. Найдите НОД чисел 1125 и 663, 1755 и 1176. Придумайте примеры сами и сравните свои ответы с вычислениями на листе «Алгоритм с делением».

За один шаг текущая пар чисел (a; b) переходит в пару (a'; b'), вычисляемую по формулам

a' = ЕСЛИ(ОСТАТ(a;b)>0;ОСТАТ(a;b);b); b' = ЕСЛИ(ОСТАТ(b;a)>0;ОСТАТ(b;a);a).

Эти формулы нужно вписать в ячейки B3 и C3 на рабочем листе, заменив буквы a и b номерами ячеек B2 и C2, а затем, как обычно, выделить их и «растянуть за правый нижний угол» пока два числа не станут равными. Общее значение этих чисел и есть НОД исходных чисел. При изменении исходных чисел их НОД будет вычисляться автоматически, если только вычисления были продолжены достаточно далеко. В противном случае столбец вычислений нужно продолжить еще дальше.