КМШ

Задачи

(см. «Квант» №4)

1. Не обязательно – см. рис. 1.

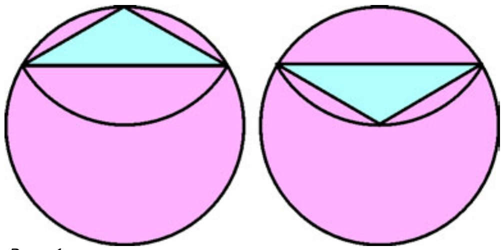

Рис. 1

2. Покажем, что наименьший периметр прямоугольника равен 14. Легко проверить, что не подходят прямоугольники размером $1\times n$, где $n\le 5$; $2\times n$, где $n\le 4$; $3\times n$, где $n\le 3$ (при других значениях n прямоугольник имеет периметр, превышающий 13). Прямоугольник 3×4 подходит. Действительно, если Малыш последовательно будет ставить крестики в отмеченные клетки (рис.2), то он выиграет, поскольку на каждый его ход Карлсон вынужден будет отвечать ходом на той же горизонтали (если он этого не сделает, то у Малыша будет возможность поставить 3 крестика по горизонтали).

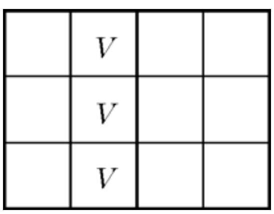

Рис. 2

3. Из всех артистов, кроме Удава, можно составить не более 3 пар для исполнения песни: Мартышка + Попугай, Мартышка + Слоненок и Попугай + Слоненок. Так как Удав исполнил 1 песню, то всего было исполнено не больше 1 + 3 = 4 песен.

Кроме того, из всех артистов, кроме Удава, можно составить не более 1 тройки для исполнения танца: Мартышка + Попугай + Слоненок. Так как Удав исполнил 2 танца, то всего было исполнено не больше 2 + 1 = 3 танцев.

Итого, на концерте могло быть исполнено не более 4 + 3 = 7 номеров, а так как, по условию, их и было ровно 7, то концерт состоял в точности из 4 песен и 3 танцев.

Итак, были исполнены 3 песни следующими составами: Мартышка + Попугай, Мартышка + Слоненок и Попугай + Слоненок, а также еще одна – четвертая – песня, которую кто-то из тройки Мартышка, Слоненок и Попугай исполнил вдвоем с Удавом. Поэтому из них троих кто-то исполнил 3 песни, а остальные двое – по 2 песни.

Перейдем к танцам. Один танец Мартышка, Слоненок и Попугай исполнили втроем, и еще 2 танца по двое из них исполнили вместе с Удавом. Поэтому кто-то из них дважды участвовал в этих двух танцах, а остальные двое – по разу. Таким образом, кто-то из тройки Мартышка, Слоненок и Попугай исполнил 3 танца, а остальные двое – по 2 танца.

Если кто-то из этой тройки исполнил 3 + 3 = 6 номеров, то остальные двое исполнил по 2 + 2 = 4 номера. По условию, Мартышка исполнила больше номеров, чем Слоненок, поэтому в данном случае Слоненок мог исполнить только 4 номера.

Если же двое из троих исполнили по 3 + 2 = 2 + 3 = 5 номеров, то один исполнил 2 + 2 = 4 номера. И опять же, так как Мартышка исполнила больше номеров, чем Слоненок, то в данном случае Слоненок мог исполнить только 4 номера.

Как видим, во всех случаях Слоненок исполнил 4 номера. О Мартышке и Попугае ничего определенного сказать нельзя, но это и не требуется.

4. Обозначим через А, Б, В, Г утверждения Ани, Бори, Вити, Гены соответственно. Верному утверждению припишем значение И (истина), неверному – Л (ложь). Логическое следование обозначим знаком $\Rightarrow$. Учитывая, что каждое из трех утверждений И $\Rightarrow$ И, Л $\Rightarrow$ И, Л $\Rightarrow$ Л истинно, а утверждение И $\Rightarrow$ Л ложно, составим таблицу истинности всевозможных вариантов утверждений ребят:

А	**Б**	**В** (**Б** $\Rightarrow$ **А**)	**Г** (**А** $\Rightarrow$ **Б**)	**В** $\Rightarrow$ **Г**	**Г** $\Rightarrow$ **В**
И	И	И	И	И	И
И	Л	И	И	И	И
Л	И	Л	И	И	Л
Л	Л	И	И	И	И

Из этой таблицы видно, что утверждение В $\Rightarrow$ Г всегда истинно, а утверждение Г $\Rightarrow$ В может быть ложным.

5. Покажем, как можно добиться равновесия. Две гирьки назовем *парой*, если сумма их масс равна 201 г. Ясно, что 50 пар образуют половину общей массы всех 200 гирек. Добьемся того, чтобы на левой чашке, так же, как и на правой, присутствовали 50 пар.

Если на левой чашке можно указать 50 гирек, парные для которых находятся на правой чашке, то оставим их на левой чашке, а с правой чашки переместим к ним парные гирьки (переместив также другие 50 гирек с левой чашки на правую).

Если на левой чашке можно указать 50 гирек, парные для которых находятся среди них (т.е. 25 пар), то на правой также существует не меньше 25 пар. Оставляя эти гирьки на месте, добавим к ним 25 пар с правой чашки (также переместив другие 50 гирек с левой чашки на правую).

Поскольку один из перечисленных случаев всегда имеет место, то с помощью указанных перекладываний можно добиться равновесия.

ДОПОЛНЯЙ И ВЛАСТВУЙ

1. *Указание*. Прибавьте к обеим частям предполагаемого равенства сумму

$$\frac{4n-1}{2}+\frac{4n-2}{3}+\frac{4n-3}{4}+\ldots+\frac{2}{4n-1}+\frac{1}{4n}.$$

2. а) Рассмотрим общий член данной последовательности:

$$3\cdot a_n=\underbrace{11\ldots1}_{n}0\underbrace{77\ldots7}_{n}8\underbrace{11\ldots1}_{n}1=\underbrace{11\ldots1}_{n}\cdot 10^{2n+2}+$$

$$+\underbrace{77\ldots7}_{n}\cdot 10^{n+2}+8\cdot 10^{n+1}+\underbrace{11\ldots1}_{n}\cdot 10+1=$$

$$=\frac{10^n-1}{9}\cdot 10^{2n+3}+\frac{7}{9}\cdot\left(10^n-1\right)\cdot 10^{n+2}+8\cdot 10^{n+1}+\frac{10^n-1}{9}\cdot 10+1.$$

Таким образом,

$$27\cdot a_n=\left(10^n-1\right)\cdot 10^{2n+3}+7\cdot\left(10^n-1\right)\cdot 10^{n+2}+$$

$$+\ 72\cdot 10^{n+1}+\left(10^n-1\right)\cdot 10+9=$$

$$=\ 10^{3n+3}\underline{-10^{2n+3}+7\cdot 10^{2n+2}}\underline{\underline{-7\cdot 10^{n+2}+72\cdot 10^{n+1}+10^{n+1}}}-1=$$

$$=\ 10^{3n+3}-3\cdot 10^{2n+2}+3\cdot 10^{n+1}-1=\left(10^{n+1}-1\right)^3.$$

Поэтому $a_n=\left(\dfrac{10^{n+1}-1}{3}\right)^3=\left(\underbrace{33\ldots3}_{n+1}\right)^3.$

б) Заметим, что $m = 8\underbrace{9\ldots9}_{k}87 = 9\cdot10^{k+2} - 13$,

$$n = 8\underbrace{7\ldots7}_{k+2} = 8\cdot10^{k+2} + \underbrace{7\ldots7}_{k+2} = 8\cdot10^{k+2} +$$

$$+\left(\underbrace{7\ldots7}_{k+2} + \underbrace{2\ldots22}_{k+2} + 1\right) - \underbrace{2\ldots22}_{k+2} - 1 =$$

$$= 9\cdot10^{k+2} - \underbrace{2\ldots22}_{k+2} - 1 = 9\cdot10^{k+2} -$$

$$- \frac{2}{9}\cdot\left(10^{k+2}-1\right) - 1 = \frac{79}{9}\cdot10^{k+2} - \frac{7}{9}.$$

Поэтому

$$m\cdot n = \left(9\cdot10^{k+2} - 13\right)\cdot\left(\frac{79}{9}\cdot10^{k+2} - \frac{7}{9}\right) =$$

$$= 79\cdot10^{2k+4} - 10^{k+2}\cdot\left(\frac{79\cdot13}{9} + 7\right) + \frac{91}{9} =$$

$$= 79\cdot10^{2k+4} - \left(\frac{1090\cdot10^{k+2} - 91}{9}\right) =$$

$$= 79\cdot10^{2k+4} - \left(\frac{1089\cdot10^{k+2}}{9} + \frac{10^{k+2}-1}{9} - 10\right) =$$

$$= 79\cdot10^{2k+4} - \left(121\cdot10^{k+2} + \underbrace{11\ldots1}_{k+2} - 10\right) =$$

$$= 79\cdot10^{2k+4} - \left(121\cdot10^{k+2} + \underbrace{11\ldots101}_{k+2}\right) =$$

$$= 79\cdot10^{2k+4} - 121\underbrace{11\ldots101}_{k+2} =$$

$$= 79\cdot10^{k+2}\cdot10^{k+2} - 121\underbrace{11\ldots101}_{k+2}.$$

Очевидно, все цифры этой разности не меньше 7.

3. а) Дополним число N дробью $\dfrac{1}{2\cdot9\cdot11\cdot13\cdot\ldots\cdot2007}$. Получим

$$3 + \frac{4}{9} + \frac{5}{9\cdot11} + \frac{6}{9\cdot11\cdot13} + \ldots + \frac{1003}{9\cdot11\cdot13\cdot\ldots\cdot2005\cdot2007} +$$

$$+ \frac{1}{2\cdot9\cdot11\cdot13\cdot\ldots\cdot2005\cdot2007}.$$

Если складывать дроби с конца в начало, то все выражение «сложится», как телескопическая антенна:

$$3 + \frac{4}{9} + \frac{5}{9\cdot11} + \frac{6}{9\cdot11\cdot13} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{1002}{9\cdot11\cdot13\cdot\ldots\cdot2005} + \frac{1}{2\cdot9\cdot11\cdot13\cdot\ldots\cdot2005} =$$

$$= 3 + \frac{4}{9} + \frac{5}{9\cdot11} + \frac{6}{9\cdot11\cdot13} + \ldots + \frac{1}{2\cdot9\cdot11\cdot13\cdot\ldots\cdot2003} = \ldots$$

$$\ldots = 3 + \frac{4}{9} + \frac{5}{9\cdot11} + \frac{6}{9\cdot11\cdot13} + \frac{1}{2\cdot9\cdot11\cdot13} =$$

$$= 3 + \frac{4}{9} + \frac{5}{9\cdot11} + \frac{1}{2\cdot9\cdot11} = 3 + \frac{4}{9} + \frac{1}{2\cdot9} = 3{,}5.$$

Поскольку $2\cdot9\cdot11\cdot13\cdot\ldots\cdot2007 > 10^{997}$, то $0 < \dfrac{1}{2\cdot9\cdot11\cdot13\cdot\ldots\cdot2007} < 10^{-997}$ и получаем ответ:

$$N = 3{,}5 - \frac{1}{2\cdot9\cdot11\cdot13\cdot\ldots\cdot2007} = 3{,}4\underbrace{99\ldots9}_{99}9\ldots$$

б) Рассмотрим следующие дополнения:

$$B_1 = \frac{7998}{7997}\cdot\frac{7995}{7994}\cdot\frac{7992}{7991}\cdot\ldots\cdot\frac{1005}{1004}\cdot\frac{1002}{1001},$$

$$B_2 = \frac{7999}{7998}\cdot\frac{7996}{7995}\cdot\frac{7993}{7992}\cdot\ldots\cdot\frac{1006}{1005}\cdot\frac{1003}{1002}.$$

Понятно, что $B\cdot B_1\cdot B_2 = 8$. Очевидно также, что $B > B_1 > B_2$. Поэтому $8 = B\cdot B_1\cdot B_2 < B^3$. Значит, $B > 2$. Но тогда $2 = A < B$.

Докажем теперь, что $C < A$. Обозначим

$$D = C^3 = \sqrt{576} - \sqrt{575} + \sqrt{573} - \sqrt{572} +$$

$$+ \sqrt{570} - \sqrt{569} + \ldots + \sqrt{3} - \sqrt{2}.$$

Используем идею дополнения. Строим выражения

$$D_1 = \sqrt{575} - \sqrt{574} + \sqrt{572} - \sqrt{571} + \sqrt{569} - \sqrt{568} + \ldots + \sqrt{2} - \sqrt{1},$$

$$D_2 = \sqrt{574} - \sqrt{573} + \sqrt{571} - \sqrt{570} + \sqrt{568} - \sqrt{567}\ldots + \sqrt{1} - \sqrt{0}.$$

Очевидно, $D < D_1 < D_2$. Ясно также, что $D + D_1 + D_2 = 24$. Поэтому $D < 8$, а значит, $C < 2$.

Итак, $C < A < B$.

КАЛЕЙДОСКОП «КВАНТА»

Вопросы и задачи

1. Из-за конечного углового размера Солнца края теней от предметов размыты. В каждую точку отрезков A_1B_1 и A_2B_2 (рис.3) попадают лучи лишь от части солнечного диска. Границы полутеней – точки B_1 и B_2 – совпадут раньше, чем сблизятся предметы *1* и *2*.

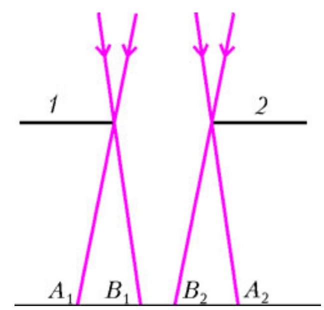

Рис. 3

2. Если спичка находится вблизи строки S, то ни один луч, выходящий из строки, не попадет в зрачок (рис.4,*а*). Если же спичка расположена у самого глаза, то некоторые лучи проходят внутрь зрачка (рис.4,*б*).

3. «Проведя» эту линию с помощью длинной линейки или ровной палки, вы, как и следовало ожидать, попадете на

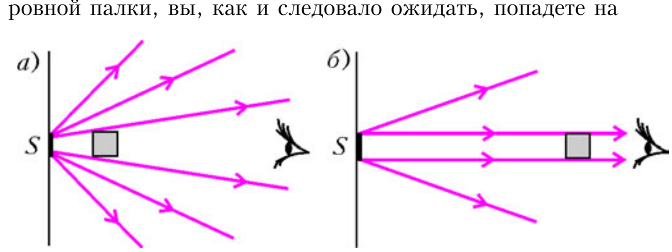

Рис. 4

Солнце. Но линия, проведенная лишь мысленно, может и «промахнуться». Эта иллюзия связана с тем, что небо представляется нам куполообразным.

4. Вблизи сетки-ограды даже отдельный ее прут может заметно перекрыть поле зрения глаза. Удаляясь от сетки, мы увеличиваем и поле зрения и световой поток от игроков, проходящий через большее число отверстий.

5. Нет. Небо вокруг звезды как через трубу, так и без нее выглядит одинаково ярко, а рассеянный атмосферой солнечный свет значительно ярче света звезд.

6. Конечно, можно. Отраженные лучи, идущие от зеркала к линзе, неотличимы от действительных солнечных лучей.

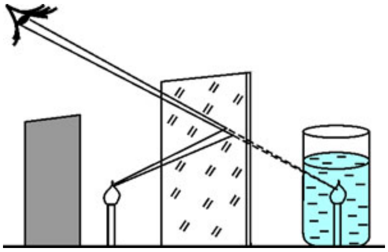

Рис. 5

7. Выпуклые зеркала имеют более широкую область обзора, чем плоские.

8. Можно. Для этого надо закрыть свечу от зрителя экраном и получить ее зеркальное отражение от стеклянной пластины (рис.5). Затем совместить изображение свечи с сосудом, наполненным водой.

9. Коэффициент отражения лучей заметно возрастает по мере приближения угла падения к прямому. (Этот случай не связан с возникновением миража из-за *искривления* лучей у поверхности разогретого асфальта.)

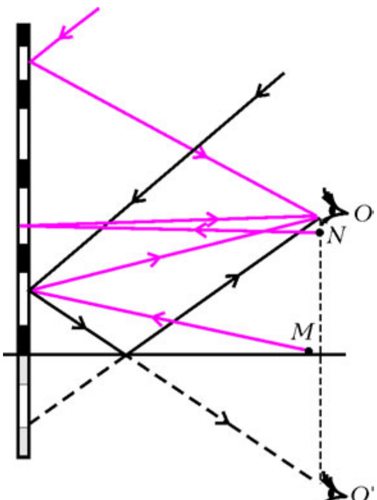

Рис. 6

10. Наблюдатель O (рис.6), судя по рисунку в тексте, находится на уровне второго этажа дома. Глядя непосредственно на дом, в окнах верхних этажей он видит отражение светлого неба, а в нижних – отражение темной земли (M) или своего места наблюдения (N). Глядя же на мокрый асфальт, наблюдатель O во всех окнах видит небо – то же, что видел бы зеркальный ему наблюдатель O'.

11. Из-за преломления света на границе вода – воздух изображение дна будет казаться наклонным с наибольшей глубиной у ног человека.

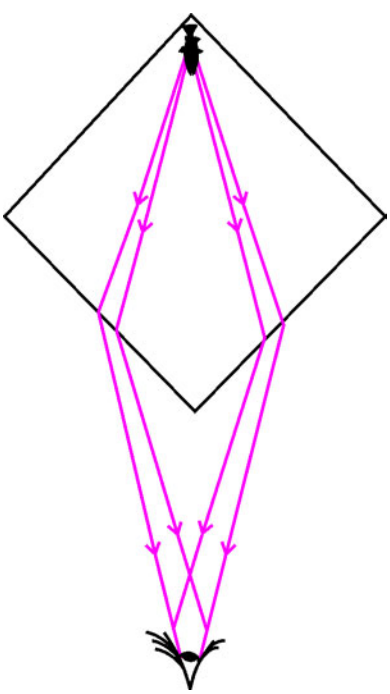

Рис. 7

12. Кажущаяся скорость меньше истинной в n раз, где n – показатель преломления воды.

13. В результате преломления лучей на гранях аквариума (см. рис.7 – вид сверху) в глаз попадают два потока лучей.

14. Идущие от монеты лучи отражаются от задней стенки банки и, преломившись на поверхности воды, попадают в глаз. От мокрой ладони, приложенной к задней стенке, отражения не будет – лучи или поглотятся или рассеются.

15. Из-за рефракции – искривления световых лучей при прохождении через атмосферу – уже ушедший за горизонт нижний край Солнца кажется нам приподнятым. Верхний край солнечного диска приподнимается рефракцией слабее. Поэтому Солнце у горизонта кажется немного сплюснутым по вертикали.

16. На более длинном пути в атмосфере, который проходит свет к глазу от низко стоящего светила, заметно рассеиваются практически все составляющие светового спектра, кроме самых длинных волн – красных.

Микроопыт

На левом рисунке в тексте ближний цилиндр кажется по крайней мере раз в восемь меньше, чем дальний. На правом рисунке все три цилиндра кажутся одинаковыми. Линейка, однако, удостоверит вас в том, что малый цилиндр в три раза меньше большого. Все дело – в эффекте перспективы.

ВОЗРОЖДЕНИЕ «БЕСПОЛЕЗНЫХ» ЧИСЕЛ

1. а) При четном k утверждение очевидно, для $k = 2s + 1$ из предположения, что N_k является квадратом, вытекает $2^{2s+1}-1=(2m+1)^2$, откуда $2^{2s}=2(m^2+m)+1$, что невозможно; б) 2^k-1 в двоичной системе записывается с помощью k единиц.

2. а) Пусть $k = 2s + 1$, тогда

$$N_{2s+1}-1=2^{4s+1}-2^{2s}-1=$$
$$=2^{4s-2}\left(2^3+1\right)-2^{4s-2}-2^{2s}-1=9\cdot 2^{4s-2}-\left(2^{2s-1}+1\right)^2,$$

а $2^{2s-1}+1=(2+1)\left(2^{2s-2}-2^{2s-3}+\ldots-2+1\right)$ делится на 3;

б) из равенства $\sum_{t=1}^{m}t^3=\frac{m^2(m+1)^2}{4}$ получаем

$$\sum_{t=1}^{m}(2t-1)^3=\sum_{t=1}^{2m-1}t^3-\sum_{t=1}^{m-1}(2t)^3=$$
$$=(2m-1)^2m^2-2(m-1)^2m^2=m^2\left(m^2-1\right),$$

остается положить $m^2=2^{k-1}$ при нечетном k.

3. Искомая сумма равна $(\sigma(n)-n)/n$, а $\sigma(n)=rn$.

4. Так как $\sigma(2^8)=7\cdot 73$, $\sigma(2^8\cdot 7\cdot 73)=7\cdot 73\cdot 2^3\cdot 2\cdot 37$, $\sigma(37)=2\cdot 19$, $\sigma(19)=2^2\cdot 5$, то для числа $n=2^8\cdot 5\cdot 7\cdot 19\cdot 37\cdot 73$ имеем $\sigma(n)=3n$; если взять $n=2^8\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 19\cdot 37\cdot 73$, то получим $\sigma(n)=4n$. Равенства $\sigma(2^9)=3\cdot 11\cdot 31$, $\sigma(11)=2^2\cdot 3$, $\sigma(31)=2^5$ приводят к числу $n=2^9\cdot 3\cdot 11\cdot 31$, для которого $\sigma(n)=3n$. Поскольку $\sigma(2^{13})=3\cdot 43\cdot 127$, $\sigma(43)=2^2\cdot 11$, $\sigma(127)=2^7$, то получаем число $n=2^{13}\cdot 3\cdot 11\cdot 43\cdot 127$, для него $\sigma(n)=3n$. Из $\sigma(2^{14})=7\cdot 31\cdot 151$, $\sigma(151)=2^3\cdot 19$ находим $n=2^{14}\cdot 5\cdot 7\cdot 19\cdot 31\cdot 151$ и $\sigma(n)=3n$; добавив сомножитель 3, получим $n=2^{14}\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 19\cdot 31\cdot 151$ и $\sigma(n)=4n$.

5. Равенства $\sigma(2^{10})=23\cdot 89$, $\sigma(23)=2^3\cdot 3$, $\sigma(89)=2\cdot 3^2\cdot 5$, $\sigma(3^3)=2^3\cdot 5$, $\sigma(5^2)=31$ приводят к числу $n=2^{10}\cdot 3^3\cdot 5^2\cdot 23\cdot 31\cdot 89$, для которого $\sigma(n)=4n$. Из $\sigma(2^{11})=3^2\cdot 5\cdot 7\cdot 13$, $\sigma(2^{11}\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7\cdot 13)=2^5\cdot 3^3\cdot 5\cdot 7^2\cdot 13^2$, $\sigma(3^3)=2^3\cdot 5$, $\sigma(5^2)=31$, $\sigma(7^2)=3\cdot 19$ ($\sigma(13^2)$ не рассматриваем: второй сомножитель 13 появился за счет $(\sigma(3^2))$ получаем $n=2^{11}\cdot 3^3\cdot 5^2\cdot 7^2\cdot 13\cdot 19\cdot 31$, для него $\sigma(n)=5n$. Поскольку $\sigma(2^{15})=3\cdot 5\cdot 17\cdot 257$, $\sigma(257)=2\cdot 3\cdot 43$, $\sigma(43)=2^2\cdot 11$, $\sigma(17)=2\cdot 3^2$, $\sigma(3^5)=2^2\cdot 7\cdot 13$, $\sigma(7^2)=3\cdot 19$, $\sigma(5^2)=31$, то $n=2^{15}\cdot 3^5\cdot 5^2\cdot 7^2\cdot 11\cdot 13\cdot 17\cdot 19\cdot 31\cdot 43\cdot 257$ и $\sigma(n)=6n$.

ЗАКОН ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ИНДУКЦИИ

1. $q = \dfrac{\pi d^2 BN}{4R} = 5 \cdot 10^{-3}$ Кл .

2. $I = \dfrac{\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1 + kl^2/16}{R} = 0{,}5$ А . **3.** $P = \dfrac{\pi k^2 l^4}{16(\pi+1)^3 R}$.

4. $Q = \left(\dfrac{\mathcal{E} - Bvl}{R+r}\right)^2 Rt = 64$ Дж . **5.** $v = 3$ м/с.

6. $\mathcal{E} = \dfrac{\sqrt{2WL}}{t} = 14{,}1$ В . **7.** $P = \left(\dfrac{Bvd}{R + \rho d/S}\right)^2 R$.

8. $\Delta\varphi = \dfrac{\omega l^2 B}{2} = 0{,}3$ В **.**

XXXII ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ

Заключительный этап

9 класс

1. Ясно, что ломаная пересекает диагональ. Пусть A – одна из вершин ломаной, лежащая на диагонали. Будем двигаться по ломаной, пока не попадем первый раз снова в вершину B, лежащую на диагонали. Из симметрии, если двигаться по ломаной из A в другую сторону, то B также окажется первой вершиной на диагонали, в которую мы попадем. При этом ломаная уже замкнется, поэтому через остальные 13 центров клеток на диагонали ломаная не проходит.

Раскрасим доску в шахматном порядке так, чтобы диагональ была черной. Заметим, что на нашей ломаной белые и черные клетки чередуются, поэтому их количества равны. В исходном же квадрате черных клеток на одну больше. Поскольку клетки диагонали черные и ломаная не проходит через 13 из них, то она не проходит и через 12 белых клеток.

Итого, длина ломаной не более $15^2 - 13 - 12 = 200$.

2. Рассмотрим какое-нибудь натуральное число $n > 1000000$. Покажем, что условию будет удовлетворять четверка чисел $-n$, $n+1$, $n(n+1)+1$, $n(n+1)\big(n(n+1)+1\big)+1$. Действительно, применив трижды соотношение

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{a+1} = \frac{1}{a(a+1)},$$

получаем

$$\frac{1}{-n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n(n+1)+1} + \frac{1}{n(n+1)\big(n(n+1)+1\big)+1} =$$

$$= -\frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{n(n+1)+1} + \frac{1}{n(n+1)\big(n(n+1)\big)+1} =$$

$$= -\frac{1}{n(n+1)\big(n(n+1)+1\big)} + \frac{1}{n(n+1)\big(n(n+1)+1\big)+1} =$$

$$= \frac{1}{n(n+1)\big(n(n+1)+1\big)\Big(n(n+1)\big(n(n+1)+1\big)+1\Big)},$$

что и требовалось.

3. 117.

Заметим, что $2006 = 17 \cdot 118$, поэтому найдутся 2 цвета, в которые покрашены в сумме не менее $2 \cdot 118 = 236$ точек. Докажем индукцией по k, что через $2k-1$ точку двух цветов всегда можно провести $k-1$ непересекающуюся хорду с одноцветными концами. База очевидна. Пусть $k > 2$. Тогда среди точек возьмем две одноцветные, стоящие подряд. Соединим их хордой, выбросим и применим предположение индукции к оставшимся точкам.

Выбрав 235 точек двух цветов и применив данное утверждение, получаем, что 117 хорд Коля сможет провести всегда. Осталось привести пример, когда больше хорд провести нельзя.

Допустим, на окружности стоят $17k$ точек. Пусть Петя покрасит каждую точку в цвет, соответствующий остатку от деления на 17 ее номера. Докажем индукцией по k, что через эти точки можно провести не более $k-1$ хорды с выполнением условия. База очевидна, докажем переход. Пусть проведено некоторое количество хорд. Рассмотрев две соединенные точки A и B на минимальном расстоянии друг от друга, получим такую хорду AB, что на одной из дуг, на которые она делит окружность, нет концов других проведенных хорд. Теперь сотрем хорду AB и уберем с окружности все точки этой дуги, включая один из концов хорды. Мы получим исходную раскраску $17l$ точек при $l < k$. Они соединены не более чем $l-1$ хордой, поэтому изначально хорд было не больше $l - 1 + 1 \le k - 1$, что и требовалось.

4. Пусть M – вторая точка пересечения ω со стороной AC. Докажем, что четырехугольник $ATLC$ вписанный. Действительно, заметим, что при гомотетии с центром A, переводящей окружность ω в описанную окружность треугольника ABC, прямая MK переходит в прямую CB, а следовательно, они параллельны (рис.8).

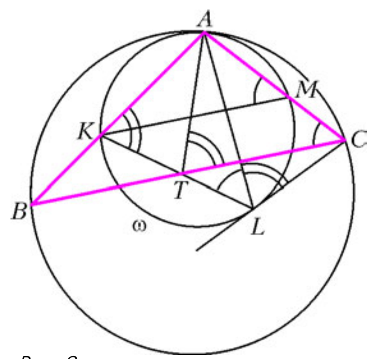

Рис. 8

Тогда получаем, что $\angle AMK = \angle ACB = \angle ACT$, но из вписанности четырехугольника $AMLK$ имеем $\angle AMK = \angle ALK = \angle ALT$. Отсюда $\angle ACT = \angle ALT$, т.е. четырехугольник $ATLC$ вписанный. Следовательно, $\angle CTA = \angle CLA$, но по свойству касательной $\angle CLA = \angle LKA$, т.е. $\angle CTA = \angle TKA$, и, значит, $\angle BTA = \angle BKT$. Тогда треугольники BTA и BKT подобны по двум углам, откуда $BT^2 = BK \cdot BA$. С другой стороны, произведение $BK \cdot BA$ равно квадрату касательной к окружности ω из точки B.

5. Заметим, что $b_k = \dfrac{a_k}{c_k}$, где c_k – наименьший простой делитель a_k. Так как $b_9 > b_{10}$, то $b_9 > 1$ и $b_9 \ge c_9$. Отсюда $a_{10} > a_9 \ge c_9^2$. Но из неравенств $a_i < a_{i+1}$, $b_i > b_{i+1}$ следует, что $c_i < c_{i+1}$, т.е. $c_1 < c_2 < \ldots < c_{10}$. Значит, $c_9 \ge 23$, так как 23 – девятое по счету простое число. Поэтому $a_{10} > c_9^2 \ge$ $\ge 529 > 500$.

6. Заметим, что точка X лежит на луче RP (рис.9), так как $\angle RAZ > \angle ARP$ ($\angle RAZ = \angle ABC = \pi - \angle PRQ = \angle ARP +$ $+ \angle QRC$). Аналогично, точка Y лежит на луче RQ. Тогда $\angle ACB = \angle XAB$ и $\angle APX = \angle RPB = \angle RQC$, и треугольники APX и CQR равны по стороне и двум углам. Следовательно, $PX = QR$. Аналогично, $PR = QY$, откуда и следует утверждение задачи.

7. Выигрывает игрок, делающий второй ход.

Приведем выигрышную стратегию для второго. Первыми несколькими ходами он склеивает каждую клетку, примыкающую к границе квадрата, со всеми ее соседями. На это потребуется не более $8 \cdot 99$ ходов, т.е. после этого будет склеено всего $16 \cdot 99$ пар сторон и, как следствие, не более $2 \cdot 16 \cdot 99 < \dfrac{10000}{2}$ до-

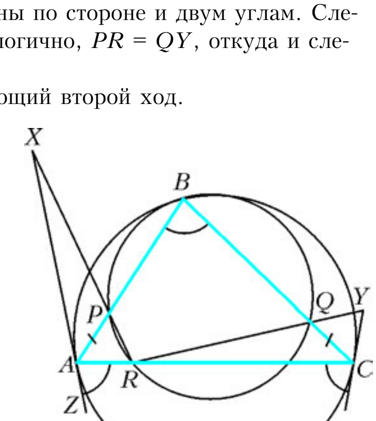

Рис. 9

миношек окажутся склеенными с чем-нибудь еще. Следовательно, после этого еще останутся отдельные доминошки, и фигура не будет связной. Далее второй будет действовать произвольным образом, следя только за тем, чтобы не проиграть прямо нынешним ходом.

Тогда все доминошки распадаются на две связные фигуры, причем все несклеенные отрезки – это граница между этими фигурами, так как любой другой отрезок можно склеить. При этом одна из этих фигур содержит все граничные клетки квадрата.

В границе внутренней фигуры четное число отрезков (если мы обойдем эту ломаную, то отрезков, по которым мы шли вверх и вниз, будет поровну; то же с отрезками вправо и влево). Подсчитаем изначальное число разрезанных сторон отрезков. Оно равно суммарному периметру всех доминошек, уменьшенному на периметр квадрата и деленному на 2 (так как каждый из остальных отрезков считался по два раза), т.е. $\frac{6\cdot 5000-400}{2}$ – четному числу. Значит, к данному моменту стерто также четное число сторон, и ходить должен первый. Противоречие.

8. Обозначим через c_1 и c_2 корни уравнения $f(x)=0$, а через x_1 и x_2 – корни уравнения $f(f(x))=0$, сумма которых равна -1. Множество корней последнего уравнения совпадает с объединением множеств корней уравнений $f(x)=c_1$ и $f(x)=c_2$. Если x_1 и x_2 являются корнями одного из последних двух уравнений, то их сумма, равная -1, будет по теореме Виета равна и $-a$, откуда $a=1$. Можно считать, что $c_1 \ge c_2$. Но поскольку по теореме Виета $c_1+c_2=-1$, то $c_2 \le -\frac{1}{2}$. Из условия следует, что дискриминант уравнения $f(x)=c_2$ неотрицателен, поэтому $1-4b+4c_2 \ge 0$, откуда $b \le -\frac{1}{4}$.

В противном случае, не умаляя общности, можно записать, что $x_1^2+ax_1+b=c_1$ и $x_2^2+ax_2+b=c_2$. Складывая последние два равенства, получим $x_1^2+x_2^2+a(x_1+x_2)+2b=c_1+c_2$. Поскольку $c_1+c_2=-a$ по теореме Виета, а $x_1+x_2=-1$ по условию, то последнее равенство после сокращения перепишется так: $x_1^2+x_2^2+2b=0$. Но тогда $b=-\frac{1}{2}\left(x_1^2+x_2^2\right) \le$ $\le -\frac{1}{4}(x_1+x_2)^2=-\frac{1}{4}$.

10 класс

2. В решении латинскими буквами везде обозначены натуральные числа.

По условию, $(x-1)^3+x^3+(x+1)^3=y^3$, или $3x\left(x^2+2\right)=y^3$. Тогда y делится на 3, $y=3z$ и $x\left(x^2+2\right)=9z^3$. Очевидно, $\text{НОД}\left(x,x^2+2\right)\le 2$.

Докажем, что случай $\text{НОД}\left(x,x^2+2\right)=1$ невозможен. Действительно, в этом случае либо $x=9u^3$ и $x^2+2=v^3$, либо $x=u^3$ и $x^2+2=9v^3$ при некоторых натуральных u, v. В первом случае получаем $81u^6+2=v^3$, что невозможно, так как куб целого числа при делении на 9 дает остаток 0 или ±1. Аналогично, второе равенство влечет, что $u^6+2=9v^3$, что невозможно по тем же причинам.

Итак, $\text{НОД}\left(x,x^2+2\right)=2$, $x\left(x^2+2\right)=9z^3$. Тогда x (и, следовательно, z) четно, поэтому $x\left(x^2+2\right)$ делится на 8. Поскольку x^2+2 не делится на 4, получаем, что x делится на 4, что и требовалось.

Замечание. Можно доказать, что уравнение задачи имеет единственное решение в натуральных числах: (4; 6). Однако элементарное доказательство этого факта автору задачи неизвестно.

11 класс

1. При $x \ge 1$ имеем $1 \le \sqrt{x} \le x < \frac{\pi}{2}$. Отсюда $\sin\sqrt{x} \le \sin x$. Далее, поскольку $0<\sin x<1$, имеем $\sin x < \sqrt{\sin x}$. Пусть $0<x<1$. Перепишем неравенство: $\sin^2 t < \sin\left(t^2\right)$ при $0<t<1$. Так как $\sin^2 0=\sin\left(0^2\right)$, то достаточно доказать $\left(\sin^2 t\right)' < \left(\sin\left(t^2\right)\right)'$, или $2\sin t\cos t < 2t\cos\left(t^2\right)$. Поскольку $\frac{\pi}{2} > t > t^2 > 0$, то $\cos t < \cos\left(t^2\right)$. Перемножив это неравенство и неравенство $\sin t < t$, получим $\sin t\cos t < t\cos\left(t^2\right)$.

2. Заметим, что дробь с периодом T после домножения на 10^T-1 становится целым числом. Домножим наши две дроби a и b на число $10^T-1=\underbrace{99\ldots9}_{T}$. Получатся два новых рациональных числа $A=\left(10^T-1\right)a$ и $B=\left(10^T-1\right)b$. Числа $A+B=\left(10^T-1\right)(a+b)$ и $AB=\left(10^T-1\right)^2 ab$ целые, так как $a+b$ и ab – дроби с периодом T, становящиеся целыми при домножении на 10^T-1 и тем более на $\left(10^T-1\right)^2$. Но два рациональных числа, сумма и произведение которых целые, являются корнями приведенного квадратного уравнения с целыми коэффициентами, т. е. сами являются целыми числами. Значит, a и b могут быть записаны в виде обыкновенных дробей со знаменателем 10^T-1, откуда и следует утверждение задачи.

3. Выигрывает первый.

Разобьем все отмеченные точки на пары (множество отрезков в концах точек пары – горизонтальные отрезки длины 1). Опишем выигрышную стратегию первого игрока. Пусть первым ходом он соединит точки из какой-нибудь пары. Если второй соединяет отрезком две точки какой-нибудь пары, то первый должен соединить отрезком две точки другой пары – назовем эти два отрезка двойкой первого типа. Если же второй соединит отрезком две точки из разных пар, то первый должен соединить отрезом две оставшиеся точки их этих пар – назовем эти два отрезка двойкой второго типа. Заметим, что количество точек делится на 4, поэтому последний ход сделает второй. Первый будет делать ответные ходы до тех пор, пока не останется одна пара – эти две оставшиеся точки соединит отрезком второй игрок. Заметим, что в двойке первого типа можно выбрать направление так, чтобы сумма двух векторов равнялась нулевому вектору, а в двойке второго типа – так, чтобы сумма двух векторов равнялась горизонтальному вектору длины 2 (любого из двух направлений). Теперь первому нужно выбрать направления в двойках второго типа, чтобы суммарная длина всех векторов в этих двойках равнялась либо нулевому вектору, либо горизонтальному вектору длины 2. После этого останутся только два отрезка длины 1 (первый ход первого игрока и последний ход второго), на которых первому игроку нужно выбрать направления так, чтобы сумма всех векторов равнялась нулевому вектору.

4. Пусть биссектрисы AI, BI, CI пересекают описанную окружность в точках A_0, B_0 и C_0 соответственно. Точки B_0 и C_0 являются серединами дуг AC и AB соответственно. Проведем через A прямую, параллельную B_0C_0, пересекающую биссектрисы в точках I_B и I_C (рис.10). Имеем

$$\angle AIB_0 = \angle ABI + \angle BAI =$$
$$= \angle ABB_0 + \angle BAA_0 = \angle B_0BC + \angle CAA_0 = \angle B_0AI,$$

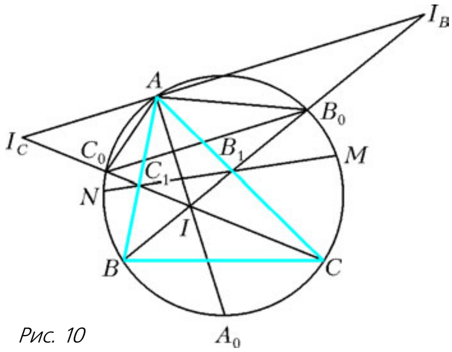

Рис. 10

поэтому треугольник B_0AI равнобедренный ($B_0A = BI$). Аналогично, $C_0A = CI$. Поэтому треугольники B_0AC_0 и B_0IC_0 равны. Далее, отрезок B_0C_0 является серединным перпендикуляром к AI, а AI – высота в треугольнике II_BI_C . Отсюда следует, что B_0C_0 – средняя линия треугольника I_BII_C . Получаем следующие равенства для радиусов описанных окружностей:

$$R\left(I_BII_C\right) = 2R\left(B_0IC_0\right) = 2R\left(B_0AC_0\right) = 2R\left(ABC\right) .$$

Теперь достаточно доказать, что точки M и N лежат на описанной окружности треугольника I_BII_C . Заметим, что $\angle AI_BI = \angle C_0B_0I = \angle C_0B_0A = \angle C_0CA = \angle ICA$, значит, точки A, I, C, I_B лежат на одной окружности, отсюда $B_1A \cdot B_1C = B_1I \cdot B_1I_B$. С другой стороны, $B_1A \cdot B_1C =$ $= B_1M \cdot B_1N$, так как точки A, M, C, N лежат на одной окружности. Следовательно, $B_1M \cdot B_1N = B_1I \cdot B_1I_B$, и точка I_B лежит на описанной окружности треугольника IMN. Аналогично, на ней лежит точка I_C , что и требовалось.

5. Очевидно, что, начиная со второго члена, наши последовательности возрастают: $x_{n+2} > x_{n+1}^2 > x_{n+1}$, $y_{n+2} > y_{n+1}$. Так как $x_3 > 1 + 1^2 = 2$, $y_3 > 1^2 + 1 = 2$, все члены каждой из последовательностей, начиная с третьего, больше 2. Аналогично, при $n > 3$ получим $x_n > 3$, $y_n > 3$.

Заметим теперь, что $x_{n+2} > x_{n+1}^2 > x_n^4$ при $n > 1$. С другой стороны, $y_{n+2} = y_n^2 + y_{n+1} = y_n^2 + y_n + y_{n-1}^2 < 3y_n^2 < y_n^3$ при $n > 3$.

Итак, при $n > 3$ имеем

$$\frac{\lg x_{n+2}}{\lg y_{n+2}} > \frac{4\lg x_n}{3\lg y_n}, \quad \text{а} \quad \frac{\lg x_{2k}}{\lg y_{2k}} > \left(\frac{4}{3}\right)^{k-1}\frac{\lg x_2}{\lg y_2} .$$

При достаточно большом k правая часть последнего неравенства больше 1, а значит, $x_{2k} > y_{2k}$, что и требовалось доказать.

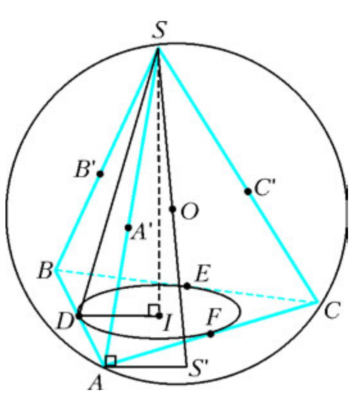

Рис. 11

6. Из теоремы о трех перпендикулярах следует, что SD – высота в грани SAB. Так как SS' – диаметр окружности, проходящей через S, S' и A, то $\angle SAS' = 90°$ (рис.11). Обозначив через R и r радиусы описанной сферы пирамиды и вписанной окружности треугольника ABC соответственно, имеем

$$S'A'^2 = S'A^2 + AA'^2 = \left(SS'^2 - SA^2\right) + AD^2 =$$
$$= SS'^2 - \left(SA^2 - AD^2\right) = SS'^2 - SD^2 =$$
$$= SS'^2 - \left(SI^2 + ID^2\right) = (2R)^2 - SI^2 - r^2 .$$

Аналогично вычисляя $S'B'$ и $S'C'$, получаем, что

$$S'A' = S'B' = S'C' = \sqrt{(2R)^2 - SI^2 - r^2} .$$

8. В решении будем пользоваться следующей известной теоремой.

Теорема Холла. *Пусть дан двудольный граф G, т.е. его вершины разбиты на два подмножества A и B таких, что любое ребро соединяет вершины из разных подмножеств. Предположим, что для любого подмножества вершин* $A_1 \subseteq A$ *количество вершин в* A_1 *не больше, чем количество вершин, соединенных хотя бы с одной вершиной из* A_1*. Тогда в графе найдется паросочетание (т.е. набор ребер с различными концами), содержащее все вершины множества A.*

Перейдем к решению задачи. Построим граф, вершины которого соответствуют пионерам, а ребра – знакомствам. Степени вершин этого графа не менее 50 и не более 100. Докажем вспомогательное утверждение.

Лемма 1. *Пусть* $k \le n \le m$ *– натуральные числа. Тогда из графа, степени вершин которого не менее n и не более m, можно удалить несколько ребер так, чтобы степени всех вершин стали не менее n – k и не более m – k.*

Доказательство. Понятно, что достаточно доказать утверждение леммы для $k = 1$. До тех пор пока есть ребра, соединяющие пары вершин степени m, будем удалять такие ребра. Пусть таких ребер больше нет, обозначим через A множество всех вершин степени m в полученном после удаления ребер графе G, а через B – множество всех остальных вершин. Рассмотрим двудольный граф G' на тех же вершинах, в котором останутся лишь ребра между A и B. Проверим выполнение условия теоремы Холла для этого графа. Рассмотрим множество $A_1 \subset A$, пусть B_1 – множество вершин, смежных с вершинами из A_1 . Из A_1 выходит не менее $m|A_1|$ ребер к вершинам множества B_1 , а в каждую вершину из B_1 входит менее m ребер, следовательно, $|B_1| \ge |A_1|$ (через $|X|$ мы, как обычно, обозначаем количество элементов в множестве X). Таким образом, по теореме Холла существует паросочетание, содержащее все вершины из A. Удалив из графа G ребра этого паросочетания, мы получим граф G_1 , степени вершин которого не менее $n - 1$ и не более $m - 1$. Лемма 1 доказана.

Вернемся к решению задачи. Применив лемму 1 для исходного графа и $k = 30$, мы получим граф H, степени вершин которого не менее 20 и не более 70. Сделаем его ребра красными. Для каждой вершины этого графа отметим 20 вершин среди ее соседей и попарно соединим эти 20 вершин зелеными ребрами. Так как из каждой вершины выходит не более 70 красных ребер, то из нее выходит не более чем $70 \cdot 19 = 1330$ зеленых ребер.

Рассмотрим граф H' с зелеными ребрами на вершинах графа H. Несложно по очереди покрасить эти вершины в 1331 цвет так, чтобы соседние вершины были разноцветными: рассматривая каждую следующую вершину, покрасим ее в любой незадействованный среди ее соседей цвет.

Теперь опять рассмотрим граф H с красными ребрами. Среди соседей каждой его вершины есть 20 выделенных, и все они покрашены в разные цвета.

Замечание. Можно покрасить пилотки пионеров всего в 761 цвет (это наблюдение принадлежит И.Богданову). Для доказательства этого факта надо заменить лемму 1 на более сильную лемму 2, доказательство которой предоставляется читателю.

Лемма 2. *Пусть* $k \le n$ *– натуральные числа. В графе G степени всех вершин не менее n и не более 2n. Тогда можно удалить несколько ребер так, чтобы степени всех вершин стали не менее k и не более 2k.*

XL ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО ФИЗИКЕ

Теоретический тур

9 класс

1. $x_m = \dfrac{gT^2}{4\pi^2} = 6{,}3$ см .

2. $l_1 = L\dfrac{V^2 + uv}{2vV}$; $l_2 = L\dfrac{V^2 - uv}{2vV}$.

3. $\alpha = \dfrac{\Delta R}{R_0}\dfrac{c}{\lambda}\dfrac{\tau_{\text{пл}}}{\Delta\tau} = 0{,}021\ (^\circ\text{C})^{-1}$, где $\dfrac{\Delta R}{R_0} = 0{,}068$, $\tau_{\text{пл}} = 600$ с и $\Delta\tau = 24$ с (все эти данные получены из графика); см. рисунок 12.

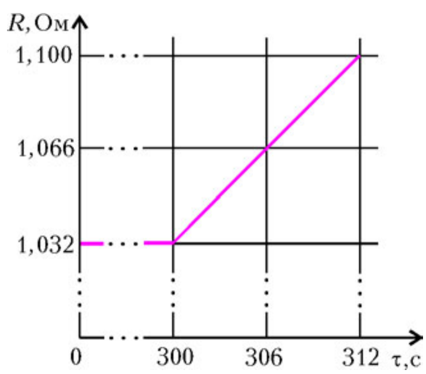

Рис. 12

4. Если ключ K_1 замкнут, а ключ K_2 разомкнут, то $I = 0$; если K_1 и K_2 разомкнуты, то ток течет от D и B и равен $I = \dfrac{U}{8R}$; если K_2 замкнут, а положение K_1 произвольное, то ток течет от B и D и равен $I = \dfrac{2U}{5R}$.

10 класс

1. $x = \dfrac{mv}{\alpha}$; после остановки система будет иметь вид «лесенки» с шагом x.

2. $x = \sqrt{\dfrac{3\nu R + C}{4\nu R + C}\left(L - \dfrac{2p_0}{\rho g}\right)L}$, где R – универсальная газовая постоянная; исходное положение жидкости в трубке устойчиво.

3. $\eta_p = \eta_V$.

4. $F = \dfrac{(3q_2 - q_1)(3q_1 - q_2)}{32\pi\varepsilon_0 R^2}$; заряды должны отличаться более чем втрое.

5. $U_V = -\dfrac{2\mathscr{E}}{1+\sqrt{5}} \approx -0{,}74$ В ; $I_A = -\dfrac{4\mathscr{E}}{\left(1+\sqrt{5}\right)^2 r} \approx -0{,}23$ А .

11 класс

1. $\dfrac{m_2}{m_1} = \dfrac{2}{3}$; $W_{\min} = \dfrac{p_1 p_2 (1 - \cos\alpha)}{M} = 4{,}32\cdot 10^6$ Дж .

2. 1) $t = \dfrac{L^2}{2Rv_0}$; 2) если $v_0 \le L\sqrt{\dfrac{\mu g}{R}} = v^*$, то $t = \dfrac{v_0}{\mu g}$; если $v_0 \ge v^*$, то $t = \dfrac{v_0}{\mu g}\left(1 - \sqrt{1 - \dfrac{\mu g L^2}{v_0^2 R}}\right)$.

3. 1) $Q = p_0 k V_0 \ln k = 0{,}54\cdot 10^5$ Дж ;

2) $Q = \dfrac{5}{2}p_0 k V_0\left(k^{\gamma-1} - 1\right) = 6{,}69\cdot 10^4$ Дж .

4. $C_2 = \dfrac{L_3}{r_1 r_4} = 0{,}5$ мкФ ; $r_2 = \dfrac{r_1 r_4}{r_3} = 200$ кОм .

5. 1) $I_0 = \sqrt{\dfrac{mgL}{2\beta}}\dfrac{2}{\mu_0 nS} = 11{,}1$ А ;

2) $z = \dfrac{3}{4\alpha} = 2{,}08$ см ; 3) $f = \dfrac{\sqrt{\alpha g}}{\pi} = 6$ Гц .

Информацию о журнале «Квант» и некоторые материалы из журнала можно найти в ИНТЕРНЕТЕ по адресам:

Редакция журнала «Квант»
kvant.info
Московский центр непрерывного математического образования
kvant. mccme.ru
Московский детский клуб «Компьютер»
math.child.ru
Костромской центр дополнительного образования «Эврика»
ceemat.ru

Квант журнал ©

НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ
А.А.Егоров, С.П.Коновалов, А.Ю.Котова, В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан

НОМЕР ОФОРМИЛИ
В.Н.Власов, Д.Н.Гришукова, В.В.Иванюк, А.Е.Пацхверия, З.М.Сурова

ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР
Е.В.Морозова

КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА
Е.А.Митченко, Л.В.Калиничева

Журнал «Квант» зарегистрирован в Комитете РФ по печати. Рег. св-во №0110473

Адрес редакции:
119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант»
Тел.: 930-56-48
E-mail: admin@kvant.info, math@kvant.info, phys@kvant.info

Отпечатано в ОАО ордена Трудового Красного Знамени «Чеховский полиграфический комбинат»
142300 г.Чехов Московской области
Тел./факс: (501) 443-92-17, (272) 6-25-36
E-mail: marketing@chpk.ru