Геометрографические построения

В этой небольшой серии задач мы касаемся забытой области теории геометрических построений, т.н. "геометрографии". Алгоритмы построений рассматриваются в ней с точки зрения их простоты. Вопрос о простоте построения встает, если мы хотим реально его выполнить настоящим чертежным циркулем и линейкой или другими инструментами, например, угольником или двусторонней линейкой, и озабочены точностью результата: чем сложнее – по существу, длиннее – построение, тем большую ошибку вносят в него неизбежные погрешности, возникающие на каждом шагу. Наиболее полно этот вопрос был изучен французским математиком и инженером Эмилем Лемуаном (1840-1912) в работе "Геометрография, или искусство геометрических построений". Лемуан характеризовал простоту построения числом составляющих его элементарных операций, к которым он причислял не только проведение прямых и окружностей, но и помещение ножки циркуля в данную точку или прикладывание линейки к точке (в наших заданиях мы ограничимся только подсчетом количества линий). Он сумел сократить решения целого ряда классических задач. Например, считавшееся наиболее простым решение задачи о построении окружности, касающейся трех данных, требовало свыше 400 элементарных операций; Лемуан уменьшил это число до 199. Тем не менее, его работа не вызвала большого интереса современников – она не имела глубокого теоретического продолжения, а ее практическая значимость, очевидно, и в 19 веке была невелика (а в наше компьютерное время вообще свелась к нулю). Исследование сложности алгоритмов является одним из актуальных направлений современной математики, но к геометрографии Лемуана оно имеет весьма косвенное отношение.
Однако само по себе отыскание оптимальных способов выполнения самых простых и хорошо известных построений из школьного курса геометрии – это увлекательная и интересная задача. Ниже приводится список таких построений с указанием числа линий в построении, которое предлагается найти. К заданиям прилагаются чертежи-заготовки с условиями и данными для самостоятельного решения.

Задание 1. *Проведите через данную точку A перпендикуляр к данной прямой l, если а) точка лежит вне прямой, б) точка лежит на прямой.* (В обоих случаях 3 линии с учетом перпендикуляра.)
Задание 2. *Проведите через данную точку A прямую, параллельную данной прямой l.* (Три линии с учетом искомой прямой.)
Задание 3. *Постройте среднее геометрическое* $x = \sqrt{ab}$ *двух данных отрезков a и b.* (Для построения двух точек на расстоянии *x* друг от друга достаточно провести 4 линии.)
Задание 4. *Постройте отрезок x, четвертый пропорциональный к трем данным отрезкам m, n и p (т.е. решение уравнения m : n=p : x, или x=np/m).* (Обычное решение этой задачи с применением теоремы Фалеса можно осуществить, проведя не более 7 линий. Однако в том случае, когда обе величины *n* и *p* меньше 2*m*, достаточно провести всего 5 линий с учетом самого отрезка *x*, проводимого последним. Попробуйте найти это короткое решение.)
Задание 5. *Отложите на данном отрезке его n-ю часть.* (Вопрос о кратчайшем, «геометрографическом» решении в этой задаче сложнее, чем в предыдущих. Мы предлагаем для конкретного значения *n*=6 найти построение, в котором проводятся всего 7 линий. Общий случай обсуждается в методических замечаниях.)

Ко всем этим задачам мы даем демонстрационные чертежи с пошаговым показом решений. Однако обоснования приводимых в них построений – это отдельное, и не столь уж простое, задание. Комментарий к заданиям этой серии дан в методических замечаниях.

Методические замечания по теме «Геометрографические построения»

Опыт показал, что учащиеся с большим интересом воспринимают задания этой небольшой серии. Объясняется это тем, что знакомство с «обычными» решениями этих задач происходит на первых этапах изучения геометрии, и привлекательна уже сама возможность обнаружить новое в, казалось бы, давно известном; постановка же вопроса об оптимизации, «рационализации» методов решения весьма естественна. С другой стороны, найти эти оптимальные решения, даже в самых простых случаях, не столь уж легко, хотя и вполне доступно.
Отметим, что, несмотря на простоту формулировок, только лишь самую первую задачу (1а) можно предлагать при первой встрече с задачами на построение. В остальных задачах используются теоремы и понятия, изучаемые в 8 и 9 классах (в зависимости от учебника), поэтому использовать их целесообразно либо при изучении соответствующих тем, либо при повторении материала этих классов.

Комментарии к решениям задач.

Задача 1. (см. разбор решений 1-го и 2-го заданий).
а) По сути дела, в решении повторяется стандартное построение из учебников, из которого удален лишний для этой задачи первый шаг – построение двух точек на данной прямой как пересечений прямой с окружностью, проведенной из данной точки *A* как из центра.
б) Решение опирается на теорему о том, что вписанный угол, опирающийся на диаметр, прямой. Задачу можно прелагать после или одновременно с изучением этой теоремы.

Задача 2 (тот же чертеж). Приводимое решение связано с теоремой о равенстве хорд, соединяющих концы двух параллельных секущих окружности. Точнее, для обоснования построения нужно применить обратную теорему. Заметим, что если считать прямую заданной, если даны две ее точки, то как это построение, так и построение из задачи 1а, выполнимо с помощью одного циркуля. (Известная теорема Мора-Маскерони гласит, что любое построение циркулем и линейкой выполнимо одним циркулем.)

Задача 3 (см. разбор решений 3-го и 4-го заданий).

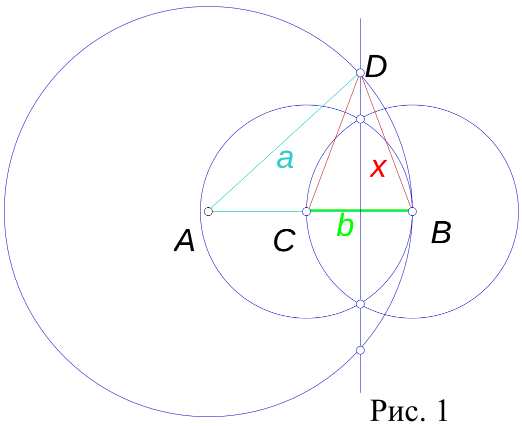

Рис. 1

Приведенное здесь построение заметно короче обычного (основанного на том, что высота, проведенная к гипотенузе прямоугольного треугольника, равна среднему геометрическому отрезков, на которые она разбивает гипотенузу). Но найти его – сложная задача, доступная только очень сильным ученикам. Возможно, прежде, чем ее предлагать, имеет смысл отдельно рассмотреть с учащимися конфигурацию из двух равнобедренных треугольников с общим углом при основании (на рис. 1 это треугольники *ABD* и *CBD*), доказать, что они подобны и предложить выразить общую сторону треугольников (*BD*) через другие стороны ($a = AB = AD$ и $b = BD = CD$). Из подобия (по углам) получим:

$$\frac{b}{x} = \frac{BC}{BD} = \frac{BD}{BA} = \frac{x}{a}.$$

Другой вариант работы: показать решение и предложить доказать, что построенный отрезок x действительно равен $\sqrt{ab}$.

Во избежание недопонимания отметим, что отрезок AB в нашем построении считается данным по условию, и мы его отдельно не проводим. Необязательно проводить и отрезок BD, т.к. искомая величина представлена расстоянием между точками B и D. Таким образом, провести нужно только 4 (синие) линии – 3 окружности и вертикальную прямую. В то же время, в построении предполагается, что $a > b$; иначе отрезки a и b надо поменять местами.

Задача 4 (тот же чертеж).

Как и в задаче 3, приводимое нами короткое решение целесообразно привести в готовом виде, а затем попросить учащихся обосновать его. Наибольший интерес представляет возникающая при этом теорема (см. ниже), тем более что само построение выполнимо лишь при указанном в задаче ограничении.

Покажем, что отрезок $x = CE$ на рис. 2 действительно равен ab/c.

Заметим, что треугольники CDH и CFB подобны (углы при вершинах H и B прямые, а углы при вершинах D и F – это вписанные в одну окружность углы, опирающиеся на одну и ту же дугу BC). Следовательно,

$$\frac{x}{b} = \frac{2CH}{CD} = \frac{2CB}{CF} = \frac{2a}{2c}.$$

Фактически, мы доказали такую теорему:

произведение двух сторон треугольника равно произведению высоты, проведенной из их общей вершины на диаметр описанной окружности

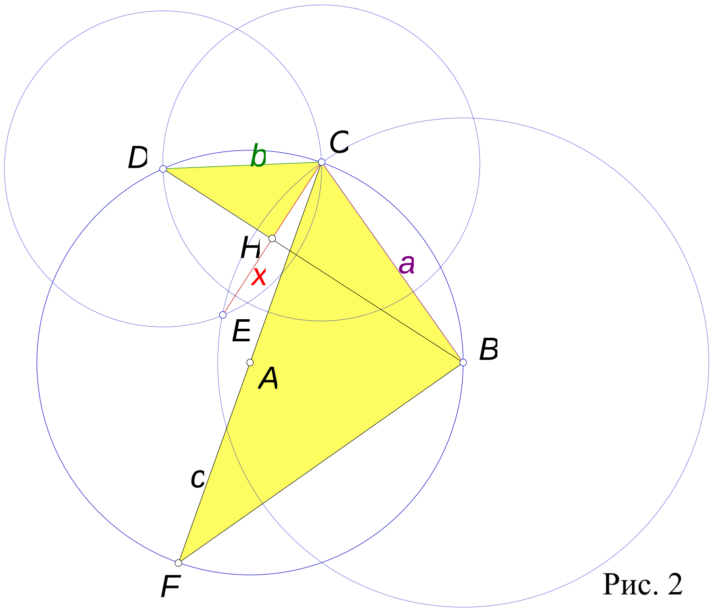

Рис. 2

(в данном случае речь о сторонах CB и CD). Другое ее доказательство получается сравнением двух выражений для площади треугольника – через сторону и высоту и через три стороны и радиус описанной окружности.

Обратим внимание, что и это построение выполнимо одним циркулем (отрезок CE, как и BD в предыдущей задаче, проводится последним и в самом построении не участвует); при этом требуется начертить всего 4 окружности.

Задача 5 (см. разбор решения). Обоснование приведенного на рис. 3 решения вполне очевидно: по построению, $AC_5 = 5 \cdot AC_1 = 5 \cdot BD$, откуда в силу подобия треугольников PBD и PAC_5 следует, что $BP = PA/5 = BA/6$; аналогичная конструкция используется и в стандартном решении, основанном на теореме Фалеса с той разницей, что в нем строится отрезок, в 6, а не в 5 раз более длинный, чем AC_1.

Поскольку мы стремимся к экономичности построений, представляет интерес вопрос о наиболее коротком способе *увеличения* отрезка в заданное число раз. Обычно это делают, последовательно откладывая на прямой отрезок, равный данному. Чтобы умножить отрезок на n таким способом, понадобится отложить его $n-1$ раз, т.е. надо провести $n-1$ окружность. Но нас интересует только последняя, n-я точка, а ее можно получить гораздо быстрее, ведь за один шаг отрезок можно сразу удвоить и, вообще, увеличить на расстояние между любыми двумя точками, полученными на предыдущих шагах. Найти кратчайший способ построения отрезка длины n по данному на прямой единичному отрезку – хорошая и не очень сложная задача, но скорее не по геометрии, а по алгебре. Мы приведем только ответ: если $2^{k-1} < n \le 2^k$, то наименьшее необходимое для этого число откладываний отрезков равно k.

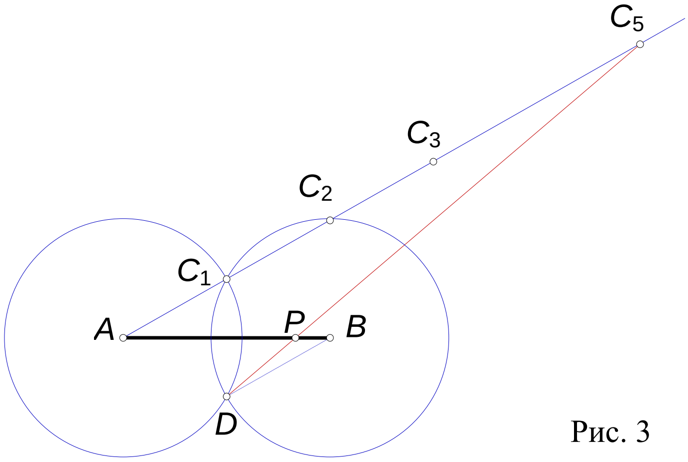

Рис. 3

А для того, чтобы отметить на отрезке его n-ю часть, достаточно провести $[\log_2(n-2)] + 4$ линии (при $n > 2$).