

Тестовые задания и диктанты

- T-01** Составление рационального выражения
T-02 Допустимые значения
T-03 Равенство дробей
T-04 Умножение и деление рациональных дробей
T-05 Приведение дробей к общему знаменателю
T-06 Сложение дробей
T-07 Все действия над дробями
T-08 Условные тождества
T-09 Структура выражения
T-10 Диктант
T-11 Вероятность появления нужного слова
T-12 Зависимость между величинами

T-01

Составление рационального выражения

Приведите выражения к стандартному виду.

	Выражение	$A^2 - B^2$	$\frac{1}{A} - \frac{1}{B}$	$\frac{A^2}{B} + \frac{B^2}{A}$
1	$A = a^2$ $B = b^2$			
2	$A = \frac{a}{b}$ $B = -\frac{b}{a}$			
3	$A = a + b$ $B = a - b$			

Т-02

Допустимые значения

Дано выражение A . Отметьте те значения (пары значений) входящих в него букв, которые не являются допустимыми.

№	A	Значения букв				
1	$\frac{x}{x^2 - 4}$	4	-2	0	2	-4
2	$\frac{x}{x-3} + \frac{x-3}{x+1}$	-1	0	2	3	4
3	$\frac{1}{\frac{2}{x} - 1}$	-1	0	1	2	3
4	$\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$	(1; 1)	(0; 1)	(1; 0)	(0; 0)	(3; 0)
5	$\frac{x-1}{y-1} + \frac{y}{x^2-1}$	(1; 1)	(-1; 1)	(1; -1)	(-1; -1)	(3; -1)

Т-03

Равенство дробей

Для данной дроби A укажите равные ей выражения.

№	A				
1	$\frac{4}{18} \cdot \frac{a^3 b^2}{a^2 b^6}$	$\frac{6}{27} \cdot \frac{a^5}{(ab)^4}$	$\frac{1}{3} \cdot \frac{a}{b^4}$	$\frac{2}{9} \cdot \frac{a}{b^4}$	$\frac{8}{36} \cdot \frac{a^2 b^2}{b^6}$
2	$\frac{15}{20} \cdot \frac{(a^2 - b^2)^2}{b - a}$	$-\frac{3}{4}(a + b) \cdot (a^2 - b^2)$	$-\frac{3}{4} \cdot \frac{(b - a)(a + b)^2}{a + b}$	$\frac{3}{4}(b - a) \cdot (a + b)^2$	$-\frac{15}{20}(a + b)^2$
3	$\frac{a^4 - a^3 + a^2}{a^4 + a^2 + 1}$	$\frac{a^2}{a^2 - a + 1}$	$\frac{a^2}{a^2 + a + 1}$	a^2	$\frac{a^4}{a^4 + a^3 + a^2}$
4	$\frac{4}{50} \cdot \frac{(a-1)^2(a-2)^4}{(a^2-3a+2)^3}$	$\frac{8}{100} \cdot \frac{(a-2)^2}{a^2-3a+2}$	$\frac{2}{25} \cdot \frac{a-2}{a-1}$	$\frac{1}{10} \cdot \frac{a-2}{a-1}$	$\frac{2}{25}(a-2)$

Т-04

Умножение и деление рациональных дробей

Даны дроби A , B и C . Составьте новые рациональные дроби D и сделайте их несократимыми.

$$A = \frac{x^3(x^2 - 4)(y + 1)}{y^2(x - 1)(y - 2)}; \quad B = \frac{y(x - 2)(y - 2)}{x^2(x - 1)(x + 2)^2}; \quad C = \frac{xy^2(y^2 - 4)^2}{(x - 1)(x - 2)}.$$

№	D	
1	$A \cdot B \cdot C$	
2	$\frac{AC}{B}$	
3	$\frac{B^2}{AC}$	
4	$\frac{C^2}{A^2B}$	

Приведите дроби A , B и C к общему знаменателю.

№	A	B	C	
1	$\frac{1}{x-y}$	$\frac{1}{x+y}$	$\frac{1}{x^2-y^2}$	
2	$\frac{1}{ab+ac}$	$\frac{1}{b^2+bc}$	$\frac{1}{bc+c^2}$	
3	$\frac{a}{a^2+4ab+4b^2}$	$\frac{a}{a^2-4b^2}$	$\frac{a}{2b-a}$	
4	$\frac{1}{x^4-x^2y^2}$	$\frac{1}{y^5-x^4y}$	$\frac{1}{x^3+xy^3}$	
5	$\frac{1}{a^3+8b^3}$	$\frac{1}{a^2-4b^2}$	$\frac{2}{a^3-8b^3}$	

Т-06

Сложение дробей

Сложите дроби.

$$1. \frac{a}{a-b} - \frac{b}{a+b} - \frac{a^2 + b^2 + 1}{a^2 - b^2}$$

$$2. \frac{1}{ab} + \frac{2}{bc} + \frac{1}{ca}$$

$$3. \frac{x-y}{2x+2y} + \frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$$

$$4. \frac{2a}{a-b} - \frac{a}{a-b}$$

$$5. x + y - \frac{x^2 + y^2}{x - y}$$

$$6. \quad \frac{3}{a^3b^3} - \frac{4}{a^4b^2}$$

$$7. \quad \frac{1}{a+1} - \frac{a-1}{(a+1)^2} - \frac{2a}{(a+1)^3}$$

$$8. \quad \frac{1}{a-5b} - \frac{1}{a^2-25b^2}$$

$$9. \quad \frac{x}{x+1} + \frac{x+1}{x-2} - \frac{x^2+1}{x^2-x-2}$$

$$10. \quad \frac{b}{4b^2-9c^2} - \frac{a}{2b+3c}$$

T-07

Все действия над дробями

Упростите.

$$1 \quad \left(\frac{b^2 + c^2}{2b} + c \right) \cdot \left(\frac{b^2 + c^2}{2b} - c \right)$$

$$2 \quad \frac{\frac{a-b}{a^2+ab} - \frac{a}{b^2+ab}}{\frac{b^2}{a^3-ab^2} + \frac{1}{a+b}}$$

$$3 \quad \frac{\frac{a^2}{x+a} - \frac{a^3}{x^2+2ax+a^2}}{\frac{a}{x+a} + \frac{a^2}{x^2-a^2}}$$

$$4 \quad \frac{\frac{2x}{2x+y} - \frac{4x^2}{4x^2+4xy+y^2}}{\frac{2x}{4x^2-y^2} + \frac{1}{y-2x}}$$

$$5 \quad \left(1 + \frac{a}{x} + \frac{a^2}{x^2} \right) \cdot \left(1 - \frac{a}{x} \right) \cdot \frac{x^3}{a^3 - x^3}$$

6	одинаковые буквы не стоят рядом	
7	первая буква гласная, а потом согласные и гласные чередуются	
8	сначала идут две гласные буквы, а затем две согласные	
9	буква А встречается ровно два раза	
10	по краям стоят гласные буквы	

Т-12

Зависимость между величинами

Величины p , V и T связаны зависимостью $\frac{p}{c+T} = \frac{k}{V}$, где c и k — некоторые постоянные. Найдите правильное выражение одних величин через другие.

	Варианты ответов		
p	$\frac{k}{V(c+T)}$	$\frac{k(c+T)}{V}$	$\frac{V(c+T)}{k}$
V	$\frac{k(c+T)}{p}$	$\frac{c+T}{kp}$	$\frac{p(c+T)}{k}$
T	$\frac{pV}{kc}$	$\frac{pV-c}{k}$	$\frac{pV-kc}{k}$

Лабораторные работы

ЛР-01 Ряды равных отношений

ЛР-02 Условные тождества

ЛР-03 Ряд Фибоначчи

ЛР-04 Метод неопределенных коэффициентов

ЛР-01

Ряды равных отношений

Из пропорции, равенства отношений $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ можно получить много следствий. Важнейшее из них — возможность почленного сложения:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$$

- 1** Пусть $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k$. Докажите, что при любых x и y отношение $\frac{xa+yc}{xb+yd}$ тоже равно k .
- 2** Пусть $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Докажите, что $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{xa^n+yc^n}{xb^n+yd^n}$, где x, y — произвольные числа, n — натуральное число.
- 3** Обобщите задачи 1 и 2 на случай пропорциональности любого количества чисел, т. е. получите следствие из равенства $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_k}{b_k}$.
- 4** Дано отношение $\frac{x}{y} = 3$. Вычислите $\frac{2x^2+3xy-y^2}{x^2+xy+y^2}$.
- 5** Обобщите задачу 4. Пусть дано отношение $\frac{x}{y} = k$ и дробь $A = \frac{f(x,y)}{g(x,y)}$, где f и g — однородные многочлены от x и y одной и той же степени. Тогда можно вычислить A , подставляя вместо x данное число k , а вместо y — 1: $A = \frac{f(k,1)}{g(k,1)}$.
- 6** Дано: $\frac{x}{a+b+c} = \frac{y}{a+b-2c} = \frac{z}{a-2b+c}$.
Докажите: $\frac{x}{x+y+z} = \frac{y}{-x+2y-z} = \frac{c}{x-y}$.
- 7** Докажите, что
 - 1.** $\frac{1}{x} = \frac{x}{2} \Rightarrow x^2 = 2;$
 - 2.** $\frac{1}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2} \Rightarrow x^3 = 2;$
 - 3.** $\frac{1}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{z} = \frac{z}{2} \Rightarrow x^3 = 2.$

Обобщите задачу.

Рассмотрим такую задачу.

Пусть a и b — катеты, c — гипотенуза прямоугольного треугольника. Доказать, что a , b и c связаны соотношением $\frac{a^4 + b^4 + c^4}{2} = c^4 - a^2b^2$.

Величины a , b , c не являются независимыми — они связаны соотношением $a^2 + b^2 = c^2$ (теорема Пифагора).

Поэтому задачу можно сформулировать так.

1 Доказать тождество $\frac{a^4 + b^4 + c^4}{2} = c^4 - a^2b^2$, если a , b , c связаны условием $a^2 + b^2 = c^2$.

Такого рода задачи называют условными тождествами.

Есть два способа доказательства условных тождеств.

При первом способе можно из условия выразить одну букву через другую и подставить это выражение в тождество.

При втором способе делают преобразования данного соотношения, пользуясь его симметрией.

Докажите следующие условные тождества. Постарайтесь использовать оба описанных выше способа.

2 Если $p + q = 1$, то $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{pq}$.

3 Если $a + b = 0$, то $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 0$.

4 Если $a + b = 0$, то $a^3 + b^3 = 0$.

5 Если $a + b = ab$, то $\frac{a-1}{a} + \frac{b-1}{b} = 1$.

6 Если $a + b = 1$, то $a^3 + b^3 = 1 - 3ab$.

7 Если $\frac{4}{a+b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$, то $a = b$.

От легких задач с двумя буквами перейдем к тождествам с тремя буквами и выведем следствия из соотношения $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a+b+c}$.

8 Сначала проверьте, что если $a + b = 0$, то написанное соотношение верно.

9 Пользуясь симметрией, сформулируйте еще два условия, когда выполняется исходное соотношение.

Нашей задачей является доказательство обратного утверждения: из соотношения $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a+b+c}$ следует, что хотя бы одна из сумм $a + b$, $b + c$ или $c + a$ равна нулю.

10 Докажите тождество $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} - \frac{1}{a+b+c} = \frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc(a+b+c)}$.

11 Докажите сформулированное выше утверждение.

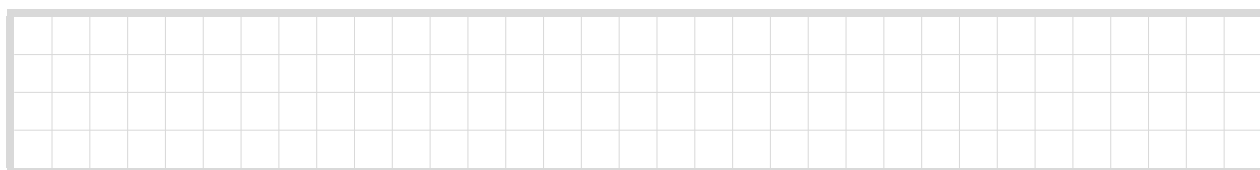
12 Докажите, что если $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a+b+c}$, то $\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} = \frac{1}{a^3 + b^3 + c^3}$.

ЛР-03

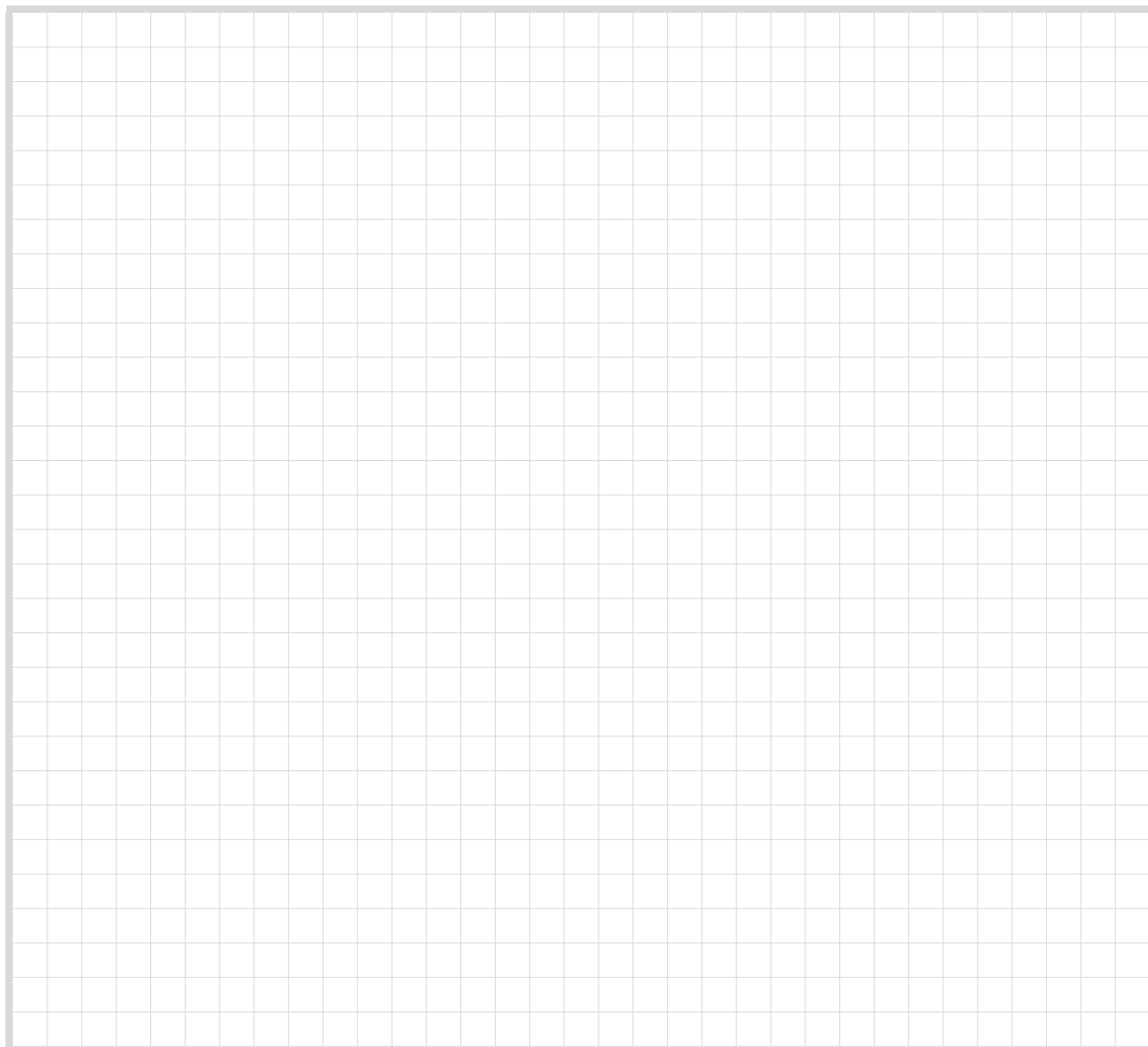
Ряд Фибоначчи

Дана дробь $A_1 = \frac{1}{1+x}$.

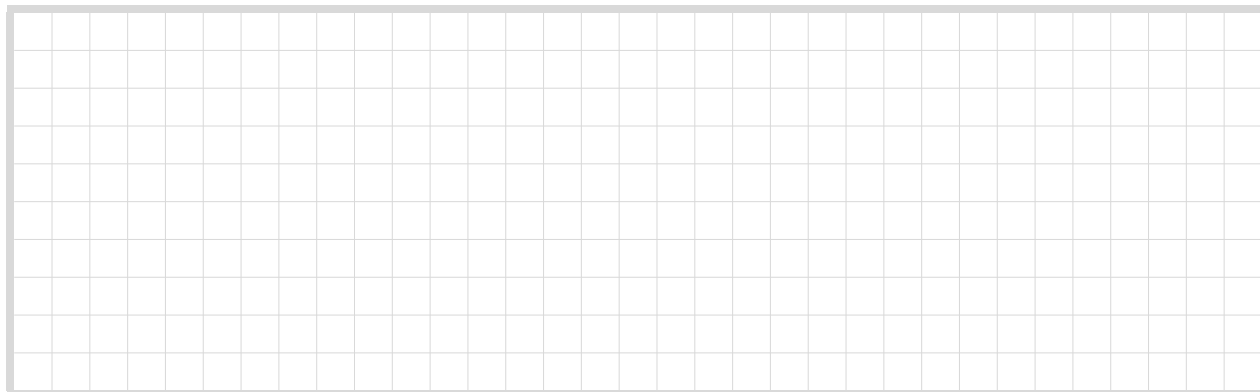
- 1** Подставьте в A_1 вместо x дробь A_1 , т. е. вычислите дробь $A_2 = \frac{1}{1 + \frac{1}{1+x}}$.



- 2** Прodelайте эту операцию еще 5-6 раз, т. е. в получающуюся на каждом шаге дробь подставьте вместо x исходную дробь $\frac{1}{1+x}$. Преобразуйте дроби к стандартному виду.



- 4** Достаточно взять одну из последовательностей, например, a_1, a_2, a_3, \dots .
Проверьте, что $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$.



Эта последовательность называется последовательностью чисел Фибоначчи, или рядом Фибоначчи, в честь открывшего ее итальянского математика, жившего в XII веке.

- 5** Проверьте на примерах следующие свойства чисел Фибоначчи.

$$a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} = a_{n+1} - 1$$

$$a_1 + a_3 + a_5 + \dots + a_{2n-1} = a_{2n}$$

$$a_2 + a_4 + a_6 + \dots + a_{2n} = a_{2n+1} - 1$$

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots + a_{2n-1} - a_{2n} = 1 - a_{2n-1}$$



$$2. \frac{1-x}{x^2-4}$$

$$3. \frac{x+1}{x(x-1)(x-2)}$$

$$4. \frac{1}{(x^2-1)(x^2-4)}$$

4 Иногда приходится использовать не только простейшие дроби вида $\frac{A}{x-a}$, но и дроби вида $\frac{A}{(x-a)^2}$. Представьте дробь $\frac{x}{(x-1)^2(x+1)}$ в виде $\frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+1}$.

Самостоятельные работы

СР-01 Рациональные дроби

СР-01

Рациональные дроби

А1

А1.1 Дано выражение $R = \left(A - \frac{1}{A}\right) : B$.

1. Подставьте $A = \frac{x+y}{x-y}$, $B = \frac{xy}{x^2-y^2}$.

2. Выполните все действия.

3. Как изменится выражение R , если вместо $A = \frac{x+y}{x-y}$ подставить $A = \frac{x-y}{x+y}$, а B оставить без изменения?

А1.2 Дано выражение $A = \frac{1}{(x-1)(x-3)} + \frac{1}{(x-3)(x-5)}$.

4. Докажите тождество $A = \frac{2}{(x-1)(x-5)}$.

5. Проверьте тождество $\frac{2}{(x-a)(x-a-2)} = \frac{1}{x-a-2} - \frac{1}{x-a}$.

6. Пользуясь доказанным тождеством, упростите

$$\frac{1}{(x-1)(x-3)} + \frac{1}{(x-3)(x-5)} + \frac{1}{(x-5)(x-7)}$$

A2

A2.1 Дано выражение $R = \left(A - \frac{1}{A}\right) : B$.

1. Подставьте $A = \frac{x}{x-y} - \frac{y}{x+y}$, $B = \frac{16x^2y^2}{x^4 - y^4}$.

2. Выполните все действия.

3. Как изменится выражение R , если вместо $A = \frac{x}{x-y} - \frac{y}{x+y}$ подставить $A = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$, а B оставить без изменения?

A2.2 Дано выражение $A = \frac{1}{(x+1)(x+3)} + \frac{1}{(x+3)(x+5)}$.

4. Докажите тождество $A = \frac{2}{(x+1)(x+5)}$.

5. Проверьте тождество $\frac{2}{(x+a)(x+a-2)} = \frac{1}{x+a-2} - \frac{1}{x+a}$.

6. Пользуясь доказанным тождеством, упростите

$$\frac{1}{(x+1)(x+3)} + \frac{1}{(x+3)(x+5)} + \frac{1}{(x+5)(x+7)}$$

Б1

Б1.1 Дано выражение $R = \frac{A - B - C}{A + B + C}$.

1. Подставьте $A = \frac{1}{x^2 - xy + y^2}$, $B = \frac{1}{x^2 + xy + y^2}$, $C = \frac{x^3 + y^3}{x^4 + x^2y^2 + y^4}$.

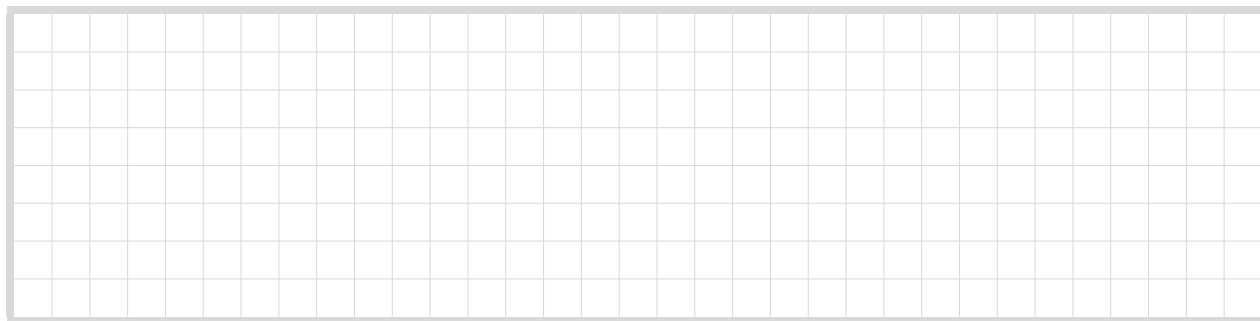
2. Выполните все действия.

3. Как изменится выражение R , если в выражениях для A , B и C поменять местами x и y ?

Б1.2 Дано выражение $A = \frac{1}{x^2 - 1} + \frac{1}{x^2 + 4x + 3}$.

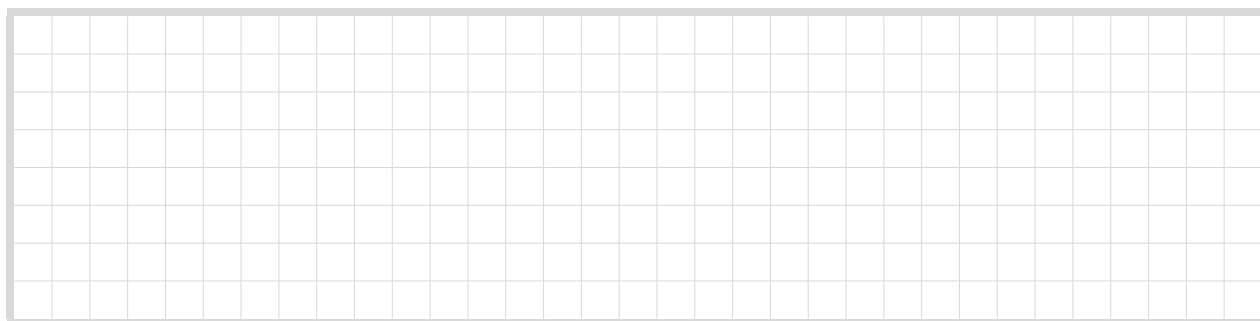
4. Докажите тождество $A = \frac{2}{x^2 + 2x - 3}$.

5. Проверьте тождество $\frac{k}{(x-a)(x-a-k)} = \frac{1}{x-a-k} - \frac{1}{x-a}$.



6. Пользуясь доказанным тождеством, упростите

$$\frac{1}{(x-2)(x-4)} + \frac{1}{(x-4)(x-6)} + \frac{1}{(x-6)(x-8)} + \frac{1}{(x-8)(x-10)}.$$



Б2

Б2.1 Дано выражение $R = \frac{A - B + C}{A + B + C}$.

1. Подставьте $A = \frac{1}{x^2 + xy + y^2}$, $B = \frac{1}{x^2 - xy + y^2}$, $C = \frac{x^3 + y^3}{x^4 + x^2y^2 + y^4}$.

2. Выполните все действия.

3. Как изменится выражение R , если в выражениях для A , B и C поменять местами x и y ?

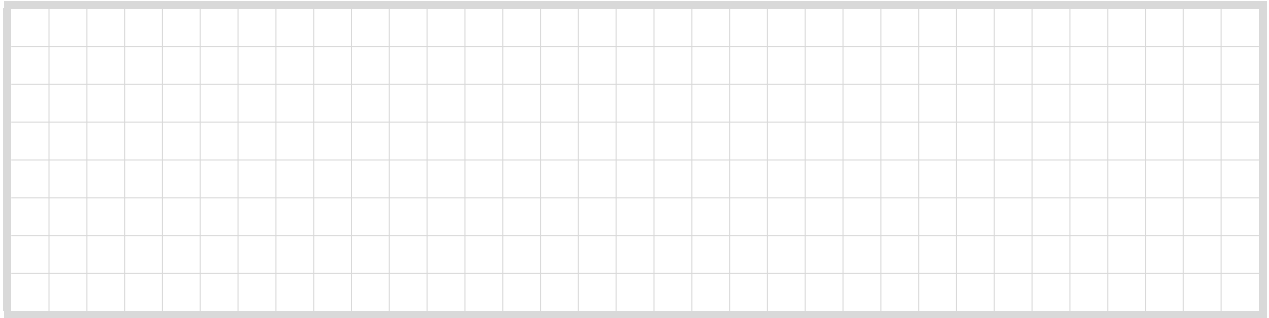
Б2.2 Дано выражение $A = \frac{1}{x^2 + 2x} + \frac{1}{x^2 + 6x + 8}$.

4. Докажите тождество $A = \frac{2}{x^2 + 4x}$.

5. Проверьте тождество $\frac{k}{(x+a)(x+a+k)} = \frac{1}{x+a} - \frac{1}{x+a+k}$.

6. Пользуясь доказанным тождеством, упростите

$$\frac{1}{(x+1)(x+3)} + \frac{1}{(x+3)(x+5)} + \frac{1}{(x+5)(x+7)} + \frac{1}{(x+7)(x+9)}.$$



Контрольные тесты

КТ-01 Составление выражения

КТ-02

КТ-03

КТ-04

КТ-05

КТ-01

Составление выражения

Выражение C составлено из выражений A и B . Выбери правильный ответ.

1. $C = A : B$, $A = a + b$, $B = a - b$

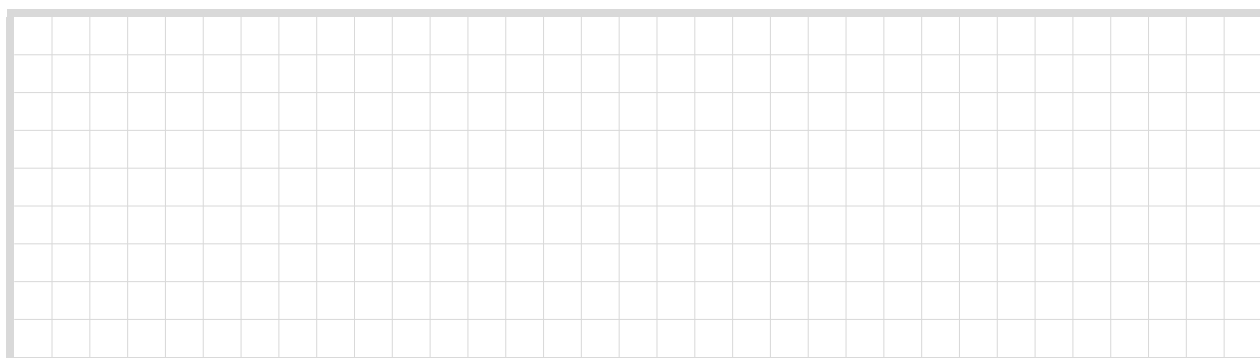
1) $C = a + b : a - b$	3) $C = (a + b) : (a - b)$
2) $C = a + b : (a - b)$	4) $C = (a + b) : a - b$

2. $C = \frac{A}{B^2} + \frac{B}{A^2}$, $A = x^2 + y^2$, $B = x + y$

1) $C = \frac{x^2 + y^2}{(x + y)^2} + \frac{x + y}{x^2 + y^2}$	3) $C = \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2} + \frac{x + y}{x^4 + y^4}$
2) $C = \frac{x^2 + y^2}{(x + y)^2} + \frac{x + y}{(x^2 + y^2)^2}$	4) $C = \frac{x^2 + y^2}{(x + y)^2} + \frac{x + y}{x^4 + y^4}$

3. $C = (A : B) \cdot (A + B)$, $A = \frac{a}{a + b}$, $B = \frac{b}{a - b}$

1) $C = \frac{\frac{a}{a+b}}{\frac{b}{a-b}} \cdot \left(\frac{a}{a+b} + \frac{b}{a-b} \right)$	3) $C = \left(\frac{a}{a-b} + \frac{b}{a+b} \right) \cdot \left(\frac{a}{a+b} + \frac{b}{a-b} \right)$
2) $C = \frac{a(a-b)}{(a+b)b} \cdot \frac{a+b}{a^2-b^2}$	4) $C = \frac{ab}{a^2-b^2} \cdot \frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$



КТ-02

Для каждой дроби слева найдите равную ей дробь справа.

1	$\frac{a^2b(a-b)}{a(a^2-b^2)}$	$A = \frac{a}{a+b}$
2	$\frac{ab^2(a+b)}{b(a^2-b^2)}$	$B = \frac{ab}{a-b}$
3	$\frac{a^3-a^2b}{a^3-ab^2}$	$C = \frac{a+b}{a-b}$
4	$\frac{ab^2-b^3}{a^2b-b^3}$	$D = \frac{ab}{a+b}$
5	$\frac{a^2b+ab^2}{a^2b-ab^2}$	$E = \frac{b}{a+b}$

КТ-03

Укажите равные выражения.

	$\frac{a^2-1}{a}$	$\frac{1-a^2}{a}$	$\frac{1+a^2}{a}$	$\frac{1-a}{a}$	$\frac{1+a}{a}$	$\frac{a-1}{a}$
$\frac{1}{a} - 1$						
$1 - \frac{1}{a}$						
$\frac{1}{a} + 1$						
$a - \frac{1}{a}$						
$\frac{1}{a} - a$						
$a + \frac{1}{a}$						

КТ-04

а) Для каждого равенства определите, является ли оно тождеством.

1	$\frac{x+y}{x-y} - \frac{x^2+y^2}{x^2-y^2} = \frac{xy}{x^2-y^2}$	
2	$\left(\frac{x^2}{a^2} - \frac{x}{a} + 1\right) \cdot \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{x}{a} + 1\right) : \left(\frac{x^4}{a} + ax^2 + a^3\right) = \frac{1}{a^3}$	
3	$\left(\frac{a-b}{a+b} - \frac{a^3-b^3}{a^3+b^3}\right) \left(\frac{a-b}{a+b} + \frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}\right) = \frac{4ab}{(a+b)^2}$	
4	$\left(a^2 - b^2 - \frac{4a^2b - 4ab^2}{a+b}\right) : \left(\frac{a}{a+b} - \frac{b}{b-a} - \frac{2ab}{a^2-b^2}\right) = (a+b)^2$	

б) Исправьте правые части неверных равенств так, чтобы получились тождества.

КТ-05

Вместо букв a и b в выражение $\frac{(x-a)(bx-6)}{x^2-5x+6}$ независимо друг от друга подставляются числа $1, 2, \dots, 9$. Какова вероятность того, что получится несократимая дробь?

A	B	C	D
$\frac{7}{9}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{77}{81}$

