

Алгоритмы

- А-1 Сравнение чисел
- А-2 Сложение и умножение неравенств
- А-3 Решение уравнений и неравенств с модулем
- А-4 Решение линейных неравенств
- А-5 Действия над приближенными значениями чисел
- А-6 Вычисление средних значений

А-1 Сравнение чисел

1. Сравнение чисел

Поставьте вместо \sphericalangle знак равно, больше или меньше ($=$, $>$ или $<$) так, чтобы получилось верное утверждение (равенство или неравенство).

1) $2 \cdot 2 \sphericalangle 5$

2) $-3 \sphericalangle -4$

3) $0 \sphericalangle -1$

4) $3^2 + 4^2 \sphericalangle 5^2$

5) $5! \sphericalangle 100$

6) $\frac{7}{12} \sphericalangle \frac{1}{2}$

7) $-\frac{1}{3} - \frac{1}{6} \sphericalangle -\frac{1}{2}$

8) $-\frac{7}{6} \sphericalangle -1$

9) $\left(\frac{2}{3}\right)^3 \sphericalangle \frac{1}{3}$

10) $\left(\frac{1}{2}\right)^{10} \sphericalangle 0,001$

11) $1,234 \sphericalangle 1,233$

12) $-0,012 \sphericalangle -0,0012$

13) $-\frac{2}{3} \sphericalangle -0,666$

14) $\frac{3,1}{10^5} \sphericalangle \frac{29}{10^6}$

15) $0,2^{10} \sphericalangle \frac{1}{10^7}$

16) $\frac{3}{40} \sphericalangle 0,075$

17) $(-1,1)^2 \sphericalangle 1,2$

18) $\frac{1}{0,12} \sphericalangle \frac{1}{0,13}$

19) $0,999 \sphericalangle 0,999^2$

20) $\frac{6!}{(3!)^2} \sphericalangle 20$

2. Определение знака числового выражения

Сравните с нулем значения выражений

1) $1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6$

2) $(-0,1)^7 + 0,1^6$

3) $\frac{17^2 - 19^2}{19^2 - 21^2}$

4) $\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} - \frac{1}{5^2}$

5) $\frac{99}{100} - \frac{100}{101}$

6) $3^4 + 4^4 - 5^4$

3. Расположение чисел в цепочку

Расположите в порядке возрастания числа

- 1) 2; -3; 4; -5; 6; -7
- 2) 0,2; $(0,2)^2$; $(-0,2)^3$; $(-0,2)^4$
- 3) $\frac{3}{4}$; $\frac{5}{7}$; $\frac{4}{5}$; $\frac{2}{3}$; $\frac{3}{5}$; $\frac{4}{7}$
- 4) -0,66; $-\frac{2}{3}$; -0,67; -0,667; -0,6666

4. Перебор целых чисел в промежутке

Найдите все целые числа, принадлежащие промежуткам

- 1) (3,1; 6,9)
- 2) (-10,1; -7,9)
- 3) [-2; 3,5)
- 4) (-3; 4]
- 5) [-5,5; 4,3]
- 6) (-1; -0,1)
- 7) $-2 < x < 3$
- 8) $-2,9 \leq x \leq 4,2$
- 9) $(-3,1; -1) \cup [1; 3]$
- 10) $[-4; -2,7] \cup [-1; 2,9]$

Найдите наибольшее и наименьшее целое число, принадлежащее промежуткам

- 11) [-99,9; -0,9]
- 12) (-12; 13)
- 13) [-4,9; -4,1]
- 14) $(-\infty; -3,1]$
- 15) (5,1; $+\infty$)
- 16) $10^3 < x < 10^4$
- 17) $[-100; 1] \cup [3; 10]$
- 18) $(-4,5; -1,4) \cup (-1,9; 0)$
- 19) $[-3; 10] \cup [11; +\infty)$
- 20) (-1,1; -0,9)

5. Поиск чисел, удовлетворяющих неравенствам

Найдите следующие числа

- 1) Целые числа, лежащие между -3,9 и 4,9.
- 2) Целые числа, отличающиеся от числа 2,2 не больше, чем на 3,9.
- 3) Целые числа, отличающиеся от числа 3,5 не меньше, чем на 2 и не больше, чем на 5.
- 4) Натуральные числа, кубы которых меньше 1000.
- 5) Целые числа, обратные к которым лежат между 0,051 и 0,195.
- 6) Целые числа, квадраты которых лежат между 500 и 1000.
- 7) Простые числа, лежащие между 10 и 100.
- 8) Целые числа, которые, будучи утроенными, лежат между 100 и 130.
- 9) Несократимые дроби со знаменателями, меньшими 10, которые лежат между 0,6 и 1,2.
- 10) Тройки целых чисел, сумма обратных к которым меньше 1, но больше 0,93.

А-2 Сложение и умножение неравенств

1. Перенос членов неравенства в одну часть

Приведите неравенства к виду $ax + by + c > 0$

1) $3x - y + 2 > x + 2y - 3$

2) $2x + 3y - 5 < 3x - y$

3) $\frac{x}{2} - \frac{y}{3} + \frac{1}{6} < \frac{2}{3}x + \frac{5}{6}y - \frac{1}{2}$

4) $y - 2(x + 3y) < x - 3(y - x - 1)$

5) $(x - 1)(x - 2) + (y + 1)(y + 2) > x(x + 3) + y(y - 3)$

6) $(x + y + 1)(x - y + 1) < (x - 3)(x + 1) - (y - 2)(y + 4)$

7) $(x + 2)(x - y) > x(x - y + 3)$

8) $(2x + y)(x - 3y + 1) < (2x + 3y - 1)(x - y) - 6xy$

2. Сложение и вычитание неравенств

Даны неравенства для чисел x и y : $-1 < x < 2$; $-2 < y < 3$. Выведите из них неравенства для следующих выражений

1) $x + y$

6) $-\frac{1}{2}x$

10) $x + y + 3$

2) $3x$

7) $-\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y$

11) $-2x + y - 5$

3) $2x + 3y$

8) $x + 0,1y$

12) $6 - x$

4) $-y$

9) $-4x - 5y$

5) $x - y$

3. Умножение и деление неравенств

Даны неравенства для чисел x и y : $1 < x < 2$; $2 < y < 4$. Выведите из них неравенства для следующих выражений.

1) $3x$

7) $x^2 - xy + y^2$

11) $\frac{x - y}{x^2 - y^2}$

2) $-2y$

8) $\frac{x}{y} + \frac{y}{x}$

3) xy

9) $\frac{1}{y - 1}$

12) $\frac{1}{x - y}$

4) $2x^2$

5) $\frac{1}{4}y^3$

10) $\frac{x + y}{x^2 + y^2}$

6) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$

4. Действия с неравенствами

Даны неравенства для чисел x и y . Укажите, какие из неравенств верны при всех данных значениях x и y .

	$x + y > 1$	$xy > 1$	$\frac{x}{y} > 1$	$x^2 + y^2 > 1$	$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} > 1$
$1 < x < 2$ $1 < y < 2$					
$x > 1$ $0 < y < 1$					
$x < -1$ $y < -1$					
$x > 2$ $-1 < y < 0$					
$-1 < x < -\frac{1}{2}$ $y > -\frac{1}{2}$					

А-3 Решение уравнений и неравенств с модулем

1. Решение уравнений с модулем

Решите уравнения

1) $|x| = 3$

5) $|x + 3| = 7$

9) $|x - 1| = |x - 3|$

2) $|-2x| = 4$

6) $|5 - x| = 1$

10) $|x + 5| = |x - 7|$

3) $|x - 1| = 0$

7) $|2x + 3| = 2$

11) $|x| + |x - 1| = 2$

4) $|x + 2| = -1$

8) $|2 - 3x| = 4$

12) $|x| + |x - 1| = 1$

2. Решение неравенств с модулем

Решите неравенства

1) $|x| < 0,5$

5) $|x - 2| < 4$

9) $|-x - 3| \leq 7$

2) $|3x| > 6$

6) $|x + 2| > 1$

10) $|x| \geq |x - 1|$

3) $|x| \leq 0$

7) $|3 - x| \leq 5$

11) $|x| + |x + 1| \leq 2$

4) $|2x| \geq -1$

8) $|-2 + 3x| \geq 6$

12) $|x| + |x + 1| < 1$

А-4 Решение линейных неравенств

1. Решение линейных неравенств

Решите неравенства

1) $x + 3 > 2x - 5$

3) $\frac{x}{2} < x$

2) $2 - \frac{x}{2} < \frac{x}{3} + 1$

4) $2(5 - 2x) \leq 3(2 - 3x)$

5) $\frac{x+4}{2} \leq \frac{x-2}{6}$

6) $2(|x|-1) = 3|x|$

7) $\frac{1}{2x-1} > 0$

8) $\frac{2}{x+4} \leq 0$

9) $\frac{1}{2-3x} < 0$

10) $\frac{-3}{|x|-2} > 0$

11) $x(x+3) \geq (x-1)(x+4)$

12) $(x+1)(3x-2) < (3x-1)(x+3)$

13) $\frac{x^2+x+3}{x^2+1} < 1$

14) $\frac{(x-1)(x+3)}{x^2+x+1} \geq 1$

2. Решение систем линейных неравенств

Решите системы неравенств. Ответ запишите в виде объединения промежутков и изобразите его на числовой оси.

1) $\begin{cases} 5x - 25 \geq 0 \\ 3x > 12 \end{cases}$

2) $\begin{cases} 5x \geq -2 \\ 3x - 1 > 5x - 3 \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2(x-7) > 7-5x \\ 4-x < 3(5-4x) \end{cases}$

4) $\begin{cases} 2(x+3) > 2x-2 \\ 3x-5 \leq 4(x-1) \end{cases}$

5) $\begin{cases} 7(x-1) > 7x+5 \\ 5(3-2x) \leq 10-4(x+1) \end{cases}$

6) $\begin{cases} -7x \leq x \\ 2(3x-14) \geq 8(x-5) \end{cases}$

7) $\begin{cases} 2x > \frac{x}{3} \\ \frac{x-3}{5} < \frac{x+5}{3} \end{cases}$

8) $\begin{cases} 1+2x > \frac{x+1}{4} \\ \frac{x+3}{2} + 1 > \frac{x-2}{3} \end{cases}$

9) $\begin{cases} -3(-2x-1) < 2\left(x-8\frac{1}{2}\right) \\ x(x+1) \geq (x-2)(x+2) - 6 \end{cases}$

10) $\begin{cases} (x-3)(x+4) < (x+5)(x-7) \\ 9x-2 \geq 11x-5 \end{cases}$

11) $\begin{cases} 6-x > 0 \\ x+2 \geq 0 \\ 3x-6 < 0 \end{cases}$

12) $\begin{cases} 3x-1 \geq 2 \\ x-0,5 \leq 4,5 \\ 4x+4 > 0 \end{cases}$

А-5 Действия над приближенными значениями чисел

1. Стандартная запись числа

Запишите числа в стандартном виде. Укажите их порядки. Округлите их мантиссы до тысячных.

1) 73 513

3) 0,5638

5) 501,6

2) 60,396

4) 6 348 000

6) $357 \cdot 10^6$

7) $1\,236 \cdot 10^{10}$

9) $325\,694 \cdot 10^3$

11) 0,0000008

8) $0,0239 \cdot 10^{-3}$

10) 0,0004756

12) 6,0031

2. Действия над приближенными значениями

1) Вычислите с точностью до 0,01 значения выражений $x + y$, $x - y$, xy и $\frac{x}{y}$ для значений

x и y , указанных в таблице.

x	2,1	6,18	26,4	0,567	$1,12 \cdot 10^{-2}$	2315,67
y	3,5	2,24	17,3	0,314	$6,08 \cdot 10^{-2}$	0,23

2) Вычислите приближенно значения выражения $A = x^2 - xy + y^2$ при указанных значениях x и y . Ответ запишите в стандартном виде, округлив мантиссу до десятых.

x	$6,2 \cdot 10^6$	$1,04 \cdot 10^{-3}$	$5,761 \cdot 10^2$	$2,7 \cdot 10^{-3}$
y	$3,4 \cdot 10^6$	$2,16 \cdot 10^{-3}$	$6,23 \cdot 10^3$	$4,6 \cdot 10^4$

А-6 Вычисление средних значений

1. В таблицах указаны ряды статистических данных. Вычислите средние арифметические и медианы для каждого из этих рядов.

1) Распределение числа баллов, набранных учениками класса в игре «Кенгуру»

Число баллов	83	70	71	76	78	80	81	85	92	93	94
Число учеников с этим баллом	4	1	5	7	2	4	1	2	3	0	1

2) Распределение числа учеников, правильно решивших данную задачу. Общее число учеников – 40.

№ задачи	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Число учеников	32	24	11	38	6	20	16	31	32	24	8	2	24	8	16	18

2. Перед вами первые 100 знаков после запятой в десятичной записи числа π .

$$\pi = 3,1415926535897932384626433$$

$$8327950288419716939937510$$

$$5820974944592307816406286$$

$$2089986280348253421170679$$

а) Вычислите, сколько раз появляется каждая цифра.

б) Каковы средние значения для частоты четных и нечетных цифр?

3. В таблице приведены среднемесячные температуры воздуха в Петербурге и Бресте (Франция).

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
П	-7	-8	-4	3	10	15	18	17	11	5	-1	-5
Б	7	7	8	11	13	16	18	18	16	13	9	7

а) Изобразите графически изменение среднемесячной температуры в течение года для каждого из указанных пунктов.

б) Вычислите средние температуры по временам года.

4. Численность населения (в млн. жителей) и площадь (в тыс. кв. км) для различных континентов представлена в таблице.

Континент	Население	Площадь
Европа	685	10 532
Африка	510	30 319
Азия	2700	44 387
Северная и Центральная Америка	390	24 249
Южная Америка	260	17 832
Австралия	25	8 510

а) Изобразите гистограммы для численности населения и площади континентов.

б) Вычислите среднюю плотность населения и изобразите гистограмму для плотности.

Соответствия

- С-1 Число \leftrightarrow точка на числовой оси
- С-2 Модуль \leftrightarrow расстояние
- С-3 Геометрический смысл неравенств
- С-4 Наглядное представление статистических данных

С-1 Число \leftrightarrow точка на числовой оси

1. Изображение чисел на числовой оси

Нанесите на числовую ось следующие числа и промежутки

- | | | |
|--------------------|---------------------------|---|
| 1) 2,5 | 10) $-\frac{10}{3}$ | 20) $2 < x < 3$ |
| 2) -3 | 11) $x > -2$ | 21) $[-1; 3]$ |
| 3) $\frac{1}{2}$ | 12) $x \leq 1$ | 22) $(0; 2,5)$ |
| 4) $-\frac{5}{4}$ | 13) $x < -\frac{1}{2}$ | 23) $[2; 3)$ |
| 5) 0 | 14) $x \geq \frac{3}{2}$ | 24) $(-4; -1]$ |
| 6) π | 15) $-1 < x < 1$ | 25) $(-\infty; 1]$ |
| 7) $\frac{\pi}{2}$ | 16) $x \geq 2, x \leq -1$ | 26) $(-3; +\infty)$ |
| 8) -2π | 17) $1 \leq x \leq 3$ | 27) $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$ |
| 9) $\frac{7}{2}$ | 18) $ x \leq 2$ | 28) $(-\infty; 1)$ |
| | 19) $ x > 3$ | 29) $(-\infty; +\infty)$ |
| | | 30) $(-3; -2) \cup (1; +\infty)$ |

2. Распознавание точек по их изображениям

1) Запишите числа, соответствующие точкам на рисунке.



2) Запишите промежутки, изображенные на рисунке, с помощью неравенств и с помощью стандартных обозначений промежутков.



3. Расположение трех чисел

Сопоставьте три числа и их взаимное расположение на числовой оси.

a	b	c	$\begin{array}{c} a & b & c \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline \end{array} \rightarrow$	$\begin{array}{c} a & c & b \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline \end{array} \rightarrow$	$\begin{array}{c} b & c & a \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline \end{array} \rightarrow$	$\begin{array}{c} b & a & c \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline \end{array} \rightarrow$	$\begin{array}{c} c & a & b \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline \end{array} \rightarrow$	$\begin{array}{c} c & b & a \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline \end{array} \rightarrow$
3	-1	2						
$-\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{3}{4}$						
0,33	$\frac{1}{3}$	0,34						
$-\frac{7}{6}$	$-\frac{6}{5}$	$-\frac{8}{7}$						
$21 \cdot 25$	23^2	$22 \cdot 24$						
-1,1	-1	-1,11						

С-2 Модуль \leftrightarrow расстояние

1. Запись расстояния с помощью модуля

Отметьте, какое соотношение выражает указанное в столбце условие.

	$ x - 3 = 2$	$ x - 3 = x - 2 $	$ x - 2 = 3$	$ x = 3$	$2 x - 3 = x $
Расстояние от точки x до точки 3 равно 2					
Расстояние от точки x до начала отсчета равно 3					
Расстояние от точки x до точки 2 равно 3					
Расстояние от точки x до точек 2 и 3 равны					
Расстояние от точки x до начала отсчета в 2 раза больше расстояния от точки x до точки 3					

2. Изображение условий с модулем на числовой оси

Изобразите на числовой оси числа x , удовлетворяющие данным условиям

1) $|x| = 3$

2) $|x + 1| = 2$

3) $|2x - 1| = 5$

4) $|2x - 5| = 0$

5) $\left| \frac{x}{3} \right| = 1$

6) $|3 - x| = 2$

7) $|x + 1| = -1$

$$8) |-2 - x| = 2$$

$$9) \left| \frac{x}{2} + 2 \right| = 1$$

$$10) \left| \frac{1}{3} - \frac{x}{6} \right| = 0$$

$$11) |x - 1| = |x + 3|$$

$$12) |x + 4| = |x + 3|$$

$$13) |x| = 2|x - 3|$$

$$14) |x - 1| = \frac{1}{3}|x + 3|$$

$$15) |x - 2| + |x + 1| = 4$$

$$16) |x + 2| + |x + 1| = 1$$

$$17) |x| - |x + 3| = 4$$

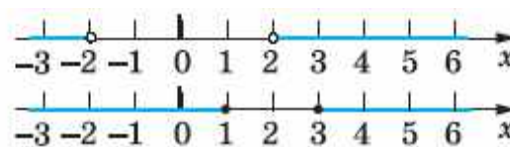
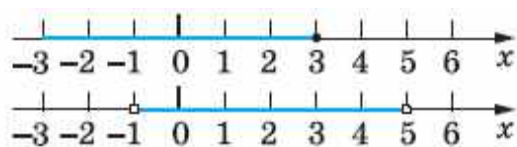
$$18) |x - 2| - |x| = 2$$

$$19) ||x| - 3| = 1$$

$$20) ||x - 1| + 1| = 3$$

3. Запись промежутков с помощью модуля

Запишите в виде неравенств с модулем промежутки, изображенные на рисунке.



4. Объединение и пересечение промежутков

Сопоставьте указанные объединения и пересечения промежутков с множествами точек на числовой оси.

$(-2; -1) \cup (1; 2)$						
$(-2; 1) \cup (-1; 2)$						
$(-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$						
$(-\infty; 2) \cap (-1; +\infty)$						
$(-2; 1) \cap (-1; 2)$						
$(-\infty; -1) \cap (1; +\infty)$						

5. Одновременное выполнение неравенств

Сопоставьте указанные условия на x с заштрихованными множествами точек на числовой оси.

$\begin{cases} x > a \\ x > b \end{cases}$								
$x > a$ или $x > b$								
$\begin{cases} x > a \\ x < b \end{cases}$								
$x > a$ или $x < b$								
$\begin{cases} x < a \\ x < b \end{cases}$								
$x < a$ или $x < b$								
$\begin{cases} x < a \\ x > b \end{cases}$								
$x < a$ или $x > b$								

С-3 Геометрический смысл неравенств

1. Неравенство треугольника

Существует ли треугольник, стороны которого равны данным числам?

1) 2; 4; 5

7) $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{4}$

2) 1; 2; 3

8) 2; 3; 2

3) 20; 10; 5

9) 1,15; 2,16; 3,30

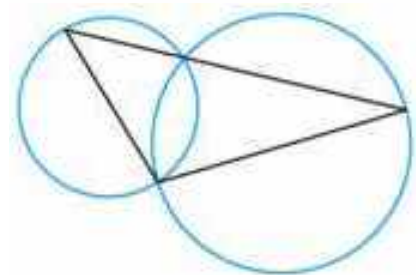
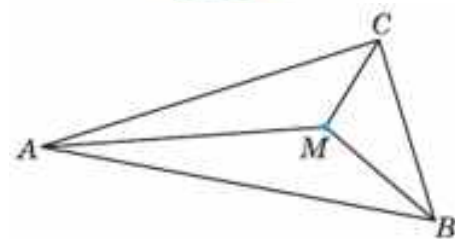
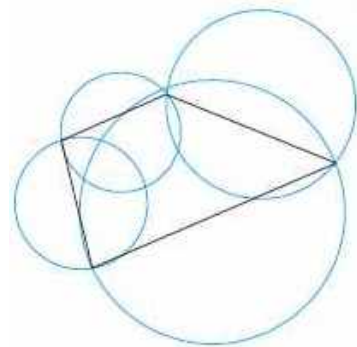
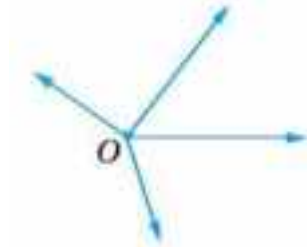
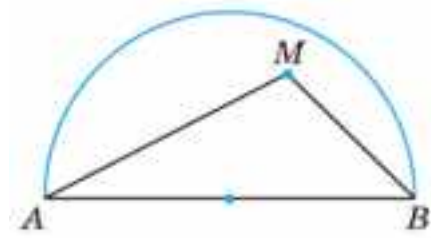
4) 4; 4; 10

10) 2; 0,9; 1

5) 1; 1; 2

6) 2,1; 2,2; 2,3

2. Покрытие многоугольника кругами



1) На отрезке AB как на диаметре описывается круг. Какому неравенству должен удовлетворять угол AMB , чтобы точка M попала внутрь этого круга?

2) Из точки O проведены четыре луча. Докажите, что хотя бы один из углов, образованных парой соседних лучей, больше или равен 90° .

3) Докажите, что круги, построенные на сторонах произвольного четырехугольника как на их диаметрах, полностью покрывают этот четырехугольник.

4) Точка M находится внутри треугольника ABC . Докажите, что хотя бы один из двух углов AMB или BMC всегда больше 90° .

5) На двух произвольно выбранных сторонах треугольника как на диаметрах построены круги. Докажите, что они полностью покрывают треугольник.

6) Приведите пример пятиугольника, который не покрывается кругами, построенными на его сторонах как на диаметрах.

С-4 Наглядное представление статистических данных

1. Графическое представление статистических данных

Для каждого ряда статистических данных дайте его изображение в виде гистограммы, секторной диаграммы и графика роста.

1) Число участников олимпиады по классам

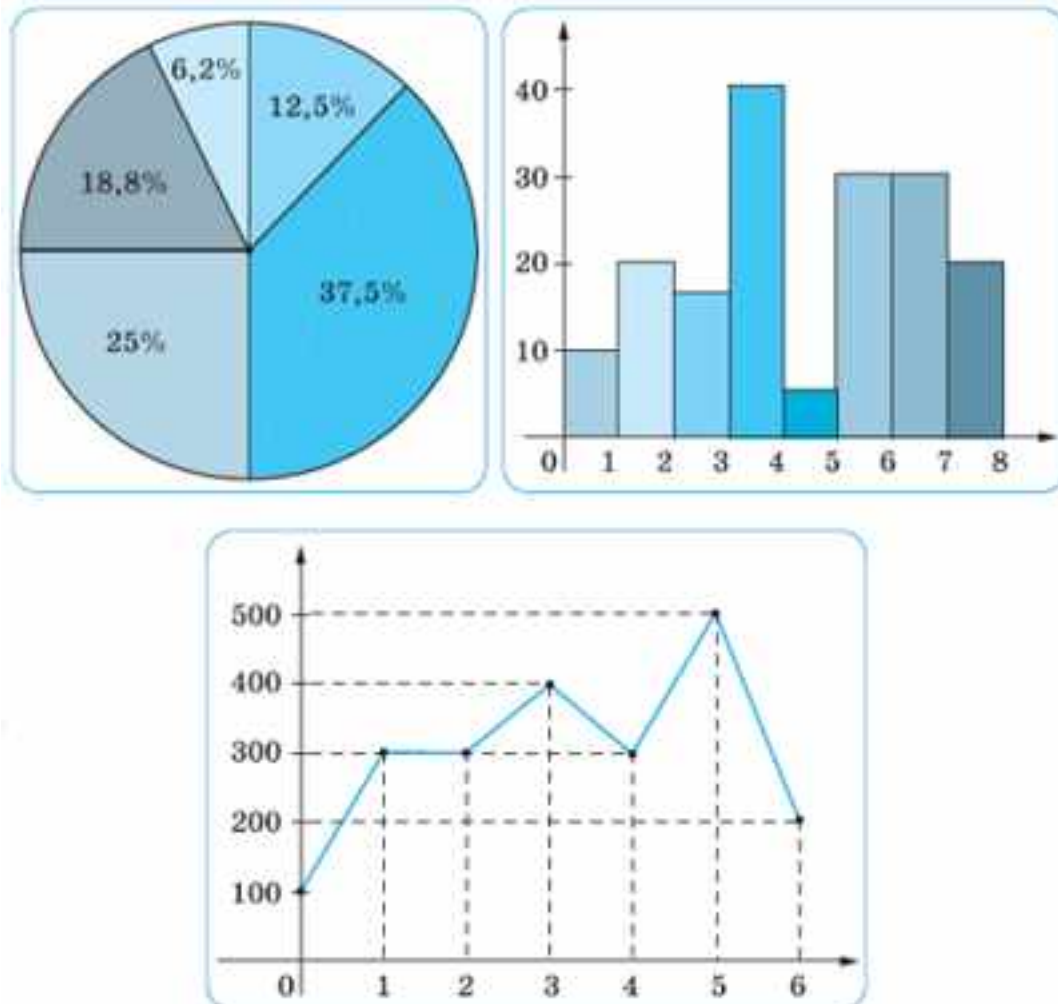
Класс	5	6	7	8	9	10
Число участников	15	30	45	30	15	45

2) Число заболевших гриппом во время эпидемии

Дата	13	14	15	16	17	18	19	20
Число заболевших	5	15	40	60	70	40	10	0

2. Обработка статистических данных

1) На рисунках приведены различные встречающиеся типы представления статистических данных. Для каждого из них вычислите среднее значение изображенной величины как среднее арифметическое известных значений.



2) Как с помощью понятия площади вы могли бы описать вычисленные средние величины?

Приложения

- П-1 Оценки выражений с переменными
- П-2 Погрешности вычислений
- П-3 Текстовые задачи с неравенствами
- П-4 Приложение неравенств в геометрии

П-1 Оценки выражений с переменными

1. Определение порядка числового выражения

Порядок k числа A можно получить, записывая число a в стандартном виде $A = a \cdot 10^k$, где $1 \leq a < 10$. Порядок может быть любым целым числом, считая $10^0 = 1$ и $10^k = \frac{1}{10^{-k}}$

для отрицательного или равного нулю целого значения k . Иначе можно сказать, что если число A попадает в один из промежутков вида $[10^k; 10^{k+1})$, то есть если $10^k \leq A < 10^{k+1}$, то целое число k называется его порядком. Не проводя точных вычислений, найдите порядок числового значения выражения A .

- 1) $843 \cdot 412$
- 2) $(1534 \cdot 732)^2$
- 3) $0,041 \cdot 0,024 \cdot 0,019$
- 4) $\frac{3,3^2 \cdot 2,6}{2500}$
- 5) $\frac{1}{29 \cdot 30 \cdot 31}$
- 6) $\frac{625 \cdot 314}{320 \cdot 611}$

2. Оценка выражений с переменными

Оценка значений переменного x может быть записана в виде двойного неравенства типа $a < x < b$ (знаки неравенств могут быть нестрогими), в виде принадлежности промежутку: $x \in (a; b)$ (концы промежутка могут быть включены в него), в виде оценки расстояния до данной точки: $|x - a| < c$ (неравенство может быть нестрогим).

Исходя из данных оценок переменных, найдите оценку выражения A с этими переменными. Ответ укажите в том же виде, в каком задана оценка переменных.

- 1) $1 < x < 2, 3 < y < 5$

	а	б	в	г	д	е
A	$1,2x + 0,9y$	$0,5x - 0,3y$	$0,1(x^2 + y^2)$	$3xy$	$ x - y $	$\frac{\pi y^2}{x}$

2) $x \in [-3; -1], y \in [2; 6]$

	а	б	в	г	д	е
A	$-0,1x$	$\frac{x+y}{2}$	πx^2	$x^2 + y^2$	$\frac{2x}{y}$	$x(1 + 0,1y)$

3) $|x| < 3, |y| < 2$

	а	б	в	г	д	е
A	$x + y$	$x - y$	xy	$ x - y $	$\frac{1}{x^2 + y^2 + 1}$	$x^2(1 + y)$

3. Ограниченность выражений с переменными

Выражение A называется ограниченным *сверху* (снизу), если можно указать такое число C , что неравенство $A \leq C$ ($A \geq C$) выполняется при всех заданных значениях переменных. Соответствующее число C называется верхней (нижней) границей выражения A . Если выражение ограничено и сверху и снизу, то оно называется просто *ограниченным*.

Выясните ограниченность данных выражений (сверху, снизу, с двух сторон). Ответ может быть записан в таком виде:

1. A ограничено сверху, например, числом C_1 и снизу, например, числом C_2 .
2. A ограничено сверху, например, числом C и не ограничено снизу.
3. A ограничено снизу, например, числом C и не ограничено сверху.
4. A не ограничено ни сверху, ни снизу.

1) $A = x + y, |x| < 1, |y| < 2$

4) $A = \frac{1}{2 + x^2 + y^2}, x, y - \text{любые}$

2) $A = \frac{1}{x}, |x| > 2$

5) $A = xy, x > 2, y < -2$

3) $A = \frac{1}{x-y}, 1 < x < 2, 2 < y < 3$

6) $A = \left| \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \right|, x \neq 0, y \neq 0$

4. Оценки геометрических величин

1) Оцените периметр и площадь прямоугольника, если известны оценки его сторон a и b .

а) $a \leq 2, b \leq 3$

г) $2 \leq a \leq 3, b \leq 5$

б) $a \geq 3, b \geq 5$

д) $a + b \leq 5$

в) $1 \leq a \leq 5, 2 \leq b \leq 4$

2) Оцените угол γ треугольника, если известны оценки двух других его углов.

а) $\alpha < 60^\circ, \beta < 30^\circ$

в) $\alpha + \beta < 80^\circ$

б) $\alpha > 100^\circ, \beta > 20^\circ$

г) $10^\circ \leq \alpha \leq 30^\circ, 30^\circ \leq \beta \leq 90^\circ$

3) Две стороны треугольника равны a и b , периметр – p . При данных ограничениях на a , b и p найдите, какой может быть третья сторона треугольника c .

а) $a = 3; b = 5; p \leq 12$

г) $1 \leq a \leq 3; b = 5; p = 12$

б) $a = 3; b \geq 5; p = 12$

д) $a \leq 3; b = 5; p \geq 12$

в) $a \geq 3; b = 5; p = 12$

е) $|a - 3| \leq 1; |b - 5| \leq 1; p = 12$

П-2 Погрешности вычислений

1. Определение абсолютной и относительной погрешности

1) Найдите абсолютную и относительную (в процентах) погрешности приближенного значения, полученного в результате указанного округления следующих чисел.

а) 21,46 до единиц

д) 3,64 до одной десятой

б) 736 до десятков

е) 6,738 до одной сотой

в) 13625 до сотен

ж) 0,07354 до одной тысячной

г) 736814 до тысяч

з) 0,07354 до одной десятитысячной

2) Оцените абсолютную погрешность приближенного значения, если все указанные цифры верные.

а) 45

в) 1,06

д) 3,50

ж) 7500

б) 40,3

г) 5,357

е) 0,800

з) 44,0

3) Оцените относительную погрешность приближенного значения, если все указанные цифры верные.

а) $5,1 \cdot 10^6$

б) $1,32 \cdot 10^4$

в) $2,10 \cdot 10^{-4}$

г) $5,364 \cdot 10^{-7}$

4) Найдите абсолютную погрешность приближения.

а) $3,86 \approx 3,9$

е) $\frac{2}{3} \approx 0,667$

б) $4,833 \approx 4,83$

в) $4,833 \approx 4,8$

ж) $\frac{1}{101} \approx 0,01$

г) $4,833 \approx 5$

з) $1,01^2 \approx 1,02$

д) $\frac{3}{22} \approx \frac{1}{7}$

2. Определение относительной погрешности измерений

Найдите относительную погрешность (в процентах) следующих вычислений (проценты вычислить с точностью до 0,1).

1) $A = 100 \pm 1$

2) $R = 6380 \pm 10$ (радиус Земли в км)

3) $|c - 2,998 \cdot 10^5| < 100$ (скорость света в км/с)

4) $m = 5,976 \cdot 10^{24}$, все цифры верные (масса Земли в кг)

5) $d = 1,392 \cdot 10^6$, все цифры верные (диаметр Солнца в км)

6) $l = 3476 \pm 1$ (диаметр Луны в км)

П-3 *Текстовые задачи с неравенствами*

1. Задачи на оценку параметров движения

1) Если бы автомобиль увеличил свою скорость на 20 км/ч, то за восемь часов он проехал бы меньше 1000 км. А если бы он уменьшил скорость на 15 км/ч, то за 12 часов он проехал бы больше 1000 км. Что можно сказать о его скорости?

2) Стокилометровый путь по стоячей воде теплоход проходит за 5 часов. При какой скорости реки теплоход, двигаясь по течению, выиграет, по крайней мере, один час?

2. Задачи на оценку процентов

1) Смешали некоторое количество 10- и 25-процентного растворов соли и получили 3 кг смеси. Оцените процентное содержание соли в смеси, если известно, что более крепкого раствора взяли не менее 1 кг.

2) 100 тонн стали получили сплавом двух сортов стали, один из которых содержит 40% никеля, а другой – 30%. Оцените процент никеля в сплаве, если более бедной никелем стали взяли не менее 20 т, а более богатой – не менее 30 т.

3. Задачи на оценку производительности труда

1) Завод, выпуская 100 единиц продукции в день, выполняет месячный план за 25 дней. Дайте оценку того, на сколько нужно увеличить ежедневный выпуск продукции, чтобы обеспечить выполнение месячного плана быстрее, чем за 20 дней.

2) Один кран наполняет бассейн за 10 часов, другой, более мощный – за 2 часа. На какое наименьшее время надо открыть второй кран одновременно с первым, чтобы наполнить бассейн не более, чем за 5 часов?

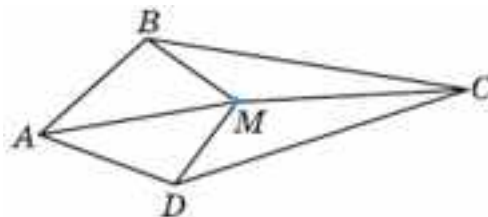
П-4 Приложение неравенств в геометрии

1. Неравенство треугольника

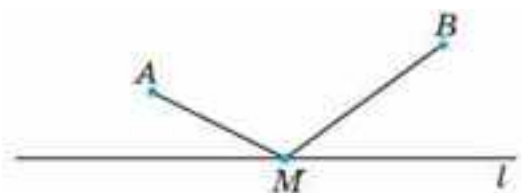
- 1) Пусть точка M лежит внутри треугольника ABC . Докажите, что $AM + BM + CM < p < 2(AM + BM + CM)$, где p – периметр треугольника.
- 2) Докажите, что сумма длин диагоналей выпуклого пятиугольника больше его периметра и меньше удвоенного периметра.
- 3) Докажите, что сумма медиан треугольника заключается между его периметром и тремя четвертями периметра.
- 4) Палка длины 2 м разломана на 5 кусков, длина каждого из которых не менее 0,17 м. Докажите, что из каких-нибудь трех кусков можно сложить треугольник.
- 5) Длины сторон четырехугольника и одной из его диагоналей равны 1; 2; 2,8; 5; 7,5. Какое из этих чисел является длиной диагонали?
- 6) Докажите, что в выпуклом четырехугольнике сумма длин диагоналей меньше периметра и больше полупериметра четырехугольника.
- 7) Дан прямой угол с вершиной O . Точки B и C расположены на его сторонах, а точка A внутри угла. Докажите, что расстояние от этой точки до вершины угла меньше половины периметра треугольника ABC .
- 8) Точка расположена внутри квадрата. Докажите, что ее расстояние до произвольно выбранной вершины меньше суммы расстояний до трех других вершин. Верно ли это утверждение для произвольного четырехугольника?

2. Кратчайшие пути

- 1) Найдите внутри выпуклого четырехугольника точку, сумма расстояний от которой до вершин четырехугольника минимальна.

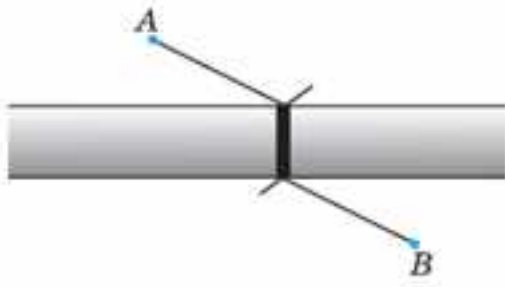


- 2) В правильном шестиугольнике найдите точку, сумма расстояний от которой до вершин минимальна.
- 3) Даны две точки A и B и прямая l . Найти на прямой l точку M так, чтобы сумма расстояний $AM + BM$ была бы наименьшей.



4) Внутри острого угла дана точка A . Построить на сторонах угла точки B и C так, чтобы периметр ABC был бы наименьшим.

5) Берега реки – две параллельные прямые. Две деревни разделены рекой. Где нужно построить мост (перпендикулярно к берегам), чтобы сделать путь от одной деревни к другой наиболее коротким?



6) В треугольнике один из углов равен 120° . Найдите внутри треугольника точку, для которой сумма расстояний до вершин треугольника минимальна.

Исследования и доказательства

- И-1 Проверка связей между неравенствами
- И-2 Использование неравенства для среднего арифметического двух чисел
- И-3 Обобщение числовых неравенств
- И-4 Оценка числа вариантов
- И-5 Задачи на максимум – минимум

И-1 Проверка связей между неравенствами

1. Доказательство неравенств преобразованием к очевидному

Докажите неравенства

- 1) $(a + b)^2 \geq 4ab$
- 2) $9x^2 + 4y^2 \geq 12xy$
- 3) $2x^2 + 2y^2 \geq (x + y)^2$
- 4) $(a^3 + b^3)(a + b) \geq (a^2 + b^2)^2$
- 5) $a^3 + b^3 \geq a^2b + ab^2$ ($a + b > 0$)
- 6) $2a^2 + b^2 + c^2 \geq 2a(b + c)$
- 7) $a^4 + b^4 \geq a^3b + ab^3$
- 8) $x^2 + 2 > 2x$
- 9) $(x + 1)(x + 5) < (x + 2)(x + 4)$
- 10) $a^2(1 + b^2) + b^2(1 + c^2) + c^2(1 + a^2) \geq 6abc$

2. Вывод следствий

Поставьте вместо \vee один из знаков больше или меньше ($>$ или $<$) так, чтобы получилось верное утверждение.

- | | |
|---|--|
| 1) $a < b \Rightarrow a - 1 \vee b - 1$ | 4) $a - 2b > 0 \Rightarrow \frac{b}{2} - \frac{a}{4} \vee 0$ |
| 2) $a < b \Rightarrow -b \vee -a$ | |
| 3) $a < b < 0 \Rightarrow a^2 \vee b^2$ | 5) $a + b > 1 \Rightarrow a^2 + b^2 \vee \frac{1}{2}$ |

3. Выбор правильного ответа

Три неотрицательных числа a , b и c связаны неравенствами $a + 2b \geq 3$, $b + 3c \geq 5$.
Ищется наименьшее возможное значение суммы $a + b + c$. Выберите правильный ответ.

- (A) 2, (B) $\frac{5}{3}$, (C) $\frac{8}{3}$, (D) 3, (E) 5

4. Правильная дробь

Как ведет себя правильная дробь при прибавлении к ее числителю и знаменателю одного и того же числа?

1) Сравните дроби $\frac{2}{3}$ и $\frac{2+1}{3+1}$; $\frac{2}{3}$ и $\frac{2-1}{3-1}$; $\frac{2}{3}$ и $\frac{2-2,5}{3-2,5}$; $\frac{2}{3}$ и $\frac{2-4}{3-4}$.

2) Докажите, что если к числителю и знаменателю дроби $\frac{a}{b}$ ($0 < a < b$) прибавить одно и то же положительное число, то дробь увеличится.

3) Всегда ли верно, что если от числителя и знаменателя дроби $\frac{a}{b}$ ($0 < a < b$) отнять одно и то же положительное число, то дробь уменьшится? При каких ограничениях это утверждение верно?

4) Рассмотрите случай отрицательной дроби $\frac{a}{b}$ ($a < 0, b > 0$).

5) Рассмотрите случай дроби, большей единицы.

И-2 Использование неравенства для среднего арифметического двух чисел

1. Неравенство для среднего арифметического

Используя неравенство для среднего арифметического двух чисел в одной из удобных форм $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \geq ab$; $a + \frac{1}{a} \geq 2$ ($a > 0$); $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$, $ab > 0$, докажите следующие неравенства.

1) $\frac{x^2}{1+x^4} \leq \frac{1}{2}$

2) $x(1-x) \leq \frac{1}{4}$

3) $\frac{x^4 + 2x^2 + 2}{x^2 + 1} \geq 2$

4) $\frac{(x+1)^2 + (x-1)^2}{x^2 - 1} \geq 2$ ($x > 1$)

5) $x^2 + x + 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \geq 5$ ($x > 0$)

6) $x^8 + x^6 - 4x^4 + x^2 + 1 \geq 0$

7) $(a+b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \geq 4$ ($a, b > 0$)

8) $(a^2 + b^2)c + (b^2 + c^2)a + (c^2 + a^2)b \geq 6abc$ ($a, b, c \geq 0$)

$$9) (a + b)ab + (b + c)bc + (c + a)ca \geq 6abc \quad (a, b, c \geq 0)$$

$$10) (a + b)ab \leq a^3 + b^3 \quad (a, b \geq 0)$$

$$11) (a + b)ab + (b + c)bc + (c + a)ca \leq 2(a^3 + b^3 + c^3) \quad (a, b, c \geq 0)$$

И-3 Обобщение числовых неравенств

1. Обобщение числовых неравенств

1) Докажите следующие серии числовых неравенств

$$1.1 \quad \text{а) } 297 \cdot 299 < 298^2$$

$$\text{в) } 119 \cdot 123 < 11^4$$

$$\text{б) } 313 \cdot 315 < 314^2$$

$$\text{г) } 999 \cdot 1001 < 10^6$$

$$1.2 \quad \text{а) } \frac{1}{0,9} > 1,1$$

$$\text{в) } \frac{1}{1,004} > 0,996$$

$$\text{б) } \frac{1}{0,98} > 1,02$$

$$\text{г) } \frac{1}{2+0,08} > \frac{1}{2} \cdot 0,96$$

$$1.3 \quad \text{а) } 1,1^3 > 1,3$$

$$\text{в) } 1,02^4 > 1,08$$

$$\text{б) } 0,99^2 > 0,98$$

$$\text{г) } 1,004^3 > 1,012$$

$$1.4 \quad \text{а) } \frac{100}{101} < \frac{102}{103}$$

$$\text{д) } \frac{101}{100} > \frac{106}{105}$$

$$\text{б) } \frac{13}{51} < \frac{17}{55}$$

$$\text{е) } \frac{51}{13} > \frac{53}{15}$$

$$\text{в) } \frac{999}{1000} < \frac{1002}{1003}$$

$$\text{ж) } \frac{100}{97} > \frac{103}{100}$$

$$\text{г) } \frac{2}{99} < \frac{3}{100}$$

$$\text{з) } \frac{70}{31} > \frac{71}{32}$$

2) Неравенства из приведенных выше получаются подстановкой значений в некоторые буквенные неравенства. В какие?

3) Докажите в общем виде буквенные неравенства, полученные в предыдущем пункте. Не забудьте указать ограничения на буквы, входящие в эти неравенства.

2. Неравенства с пропорциями

1) Если a – наибольший член пропорции с положительными числами $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, то

$$a + d > b + c.$$

2) Если $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$, то $\frac{a+b}{b} < \frac{c+d}{d}$.

3) Если $\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d}$, то $\frac{a}{b} \leq \frac{a+c}{b+d} \leq \frac{c}{d}$ (все числа положительны)

4) Если $a < b$, то $a < \frac{a+b}{2} < b$.

И-4 Оценка числа вариантов

1. Оценка числа возможных вариантов

- 1) Пишутся последовательности из 30 символов 0 или 1. Докажите, что их число больше 10^9 .
- 2) В двух мешках лежит по одинаковому количеству разных шаров (например, в каждом по 100 шаров). Первый человек выбрал по одному шару из каждого мешка, а перед тем, как стал выбирать по одному шару второй человек, кто-то переложил один шар из одного мешка в другой. У кого из них больше вариантов выбора?
- 3) Слово составляется из различных букв. Какова может быть его длина, чтобы число анаграмм для этого слова (слов, получающихся перестановками букв) не превышало 10 000?
- 4) Вы берете с полки две книги. Сколько должно быть на полке книг, чтобы у вас было по крайней мере 100 вариантов выбора?
- 5) Каких четырехзначных чисел больше – тех, которые делятся на 2 или на 3, или тех, которые не делятся на 3?
- 6) Вы должны выбрать 5 фруктов. В одном случае есть две корзины, в каждой из которых лежит по 9 фруктов, и вы можете взять все фрукты из любой из них. В другом случае есть только одна корзина, но в ней лежит 10 фруктов. В каком из случаев у вас больше вариантов выбора?
- 7) В условиях предыдущей задачи будем считать, что в первом случае в каждой из двух корзин лежит по n фруктов, а во втором – в единственной корзине на один фрукт больше. Вы хотите иметь больше вариантов выбора. При каких значениях n вам более выгоден первый случай?

2. Оценка вероятности события

- 1) Монета подбрасывается подряд 10 раз. Докажите, что вероятность того, что все 10 раз выпадет орел меньше одной тысячной.
- 2) Ученик случайным образом отвечает на вопросы пяти тестов. Для каждого теста указано 4 ответа, из которых точно один верен. Докажите, что вероятность того, что он угадает ответы точно в трех тестах меньше одной десятой.
- 3) Из колоды в 36 карт случайным образом выбирается четыре карты. Докажите, что вероятность того, что все они одной масти, меньше одной сотой.
- 4) Где вероятнее угадать пять номеров – в лотерее «5 из 36» или в лотерее «6 из 49»?

5) Оцените вероятность того, что из десяти учеников ни у кого день рождения не приходится на январь. (Считать, что вероятности для каждого месяца равны между собой).

6) Бросаются два игральных кубика. Какая сумма выпавших очков наиболее вероятна?

И-5 Задачи на максимум – минимум

1. Нахождение максимумов и минимумов с помощью неравенства о среднем арифметическом

1) Нахождение наибольшего значения. Неравенство $ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$, превращающееся в равенство лишь при $a = b$, на геометрическом языке может быть прочитано так: если сумма двух положительных чисел постоянна, то их произведение принимает наибольшее значение, когда сомножители равны. Найдите, при каком значении x выражение A принимает наибольшее значение и вычислите это значение.

а) $A = x(2 - x)$

д) $A = 2x(1 - x)$

б) $A = x(1 - x) + 1$

е) $A = x(1 - 2x)$

в) $A = -x^2 + 4x$

ж) $A = -3x^2 + 4x$

г) $A = -x^2 + 3x - 1$

з) $A = -2x^2 + 4x + 1$

2) Исходное неравенство о средних можно прочесть так: если произведение положительных чисел постоянно, то их сумма принимает наименьшее значение, когда слагаемые равны. Применяя сформулированное правило, найдите наименьшее значение выражения A .

а) $A = x + \frac{4}{x}, x > 0$

г) $A = \frac{x^2 + 9}{x}, x > 0$

б) $A = 18x + \frac{2}{x}, x > 0$

д) $A = \frac{x^2 + 4x + 20}{x + 2}, x > -2$

в) $A = x - 1 + \frac{3}{x + 1}, x > -1$

Найдите наибольшее значение выражения A

е) $A = \frac{1}{x + \frac{1}{x}}, x > 0$

ж) $A = \frac{x}{x^2 + 16}, x > 0$

з) $A = \frac{x}{3x^2 + 12}$