переходя от одного прообраза к предыдущему. У точки z_0 имеются два прообраза $\pm z_{-1}$, такие, что $f_c(\pm z_1) = (\pm z_1)^2 + c = z_0$. Выберем один из них *случайным* образом и обозначим его через z_{-1}. У точки z_{-1} имеются опять два прообраза $\pm z_{-2}$. Выберем *случайно* один из двух прообразов и обозначим его через z_{-2}. Двигаясь таким образом по орбите вверх и делая на каждом шаге случайный выбор между двумя прообразами, получаем последовательность $z_{-1}, z_{-2}, z_{-3}, \ldots$ Можно показать, что эта *случайная* последовательность точек, оставаясь внутри множества P_c, приближается к множеству Жюлиа J_c. Более конкретно, последовательность $\{z_{-n}\}$ сидит на сложно устроенной спирали, которая асимптотически наматывается на множество Жюлиа J_c. Подчеркнем, что в силу случайного выбора одного из двух прообразов, происходящего на каждом шаге, эта последовательность точек $\{z_{-n}\}$ будет нанизываться на *все множество Жюлиа*. Поэтому несколько тысяч первых точек последовательности $\{z_{-n}\}$, выведенные на экран компьютера, имитируют множество Жюлиа. Так как начальная точка орбиты может быть выбрана достаточно далеко от множества Жюлиа J_c да и орбита $\{z_{-n}\}$ сходится ко множеству Жюлиа не слишком быстро, то несколько первых точек орбиты следует выбросить, дабы не искажать картину. Другая неприятность – орбита распределяется вдоль множества Жюлиа не очень равномерно: некоторые участки проявляются весьма отчетливо, на других, наоборот, есть «проплешины». Чтобы заполнить эти проплешины в изображении, нужно либо позволить программе долго-долго работать, либо, учитывая самоподобие множества Жюлиа, «пересадить» на проплешины куски кривой Жюлиа с других уже проявившихся участков. Последний подход намного эффективней. Благодаря ему уже первые несколько точек орбиты дают изображение множества Жюлиа, более отчетливое, чем при стандартном подходе – сотня тысяч точек орбиты.

Преодолев эти трудности, вы будете вознаграждены: вы сможете самостоятельно знакомиться с миром изумительных по красоте и разнообразию множеств Жюлиа. Судя по эскизам этих множеств, которые делал сам Жюлиа «от руки», автор вряд ли представлял все великолепие «царства» множеств, носящих теперь его имя, а о некоторых глубоких свойствах он даже не подозревал. Например, во второй половине XX века был обнаружен «взрывной» характер множеств Жюлиа. Давайте при заданном направлении «ветра» c будем непрерывно увеличивать силу $|c|$. Получающиеся при этом множества Жюлиа становятся все более и более сложными и ажурными. Оказывается, что при достижении некоторого значения модуля $|c|$ множество Жюлиа *взрывается*, разлетаясь при этом на *бесконечное* число отдельных кусочков (рис.9). Значение модуля $|c|$, при котором происходит взрыв, зависит от направления вектора c. Отложив на плоскости все значения c, при которых происходит взрыв множества J_c, Б.Мандельброт получил новое множество, еще

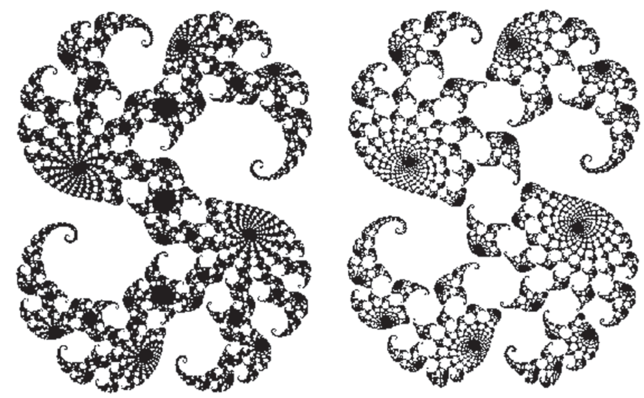

Рис. 9

более сложное и восхитительное, чем множества Жюлиа. Теперь это множество называется именем его открывателя – *множество Мандельброта*. Но это – тема другой статьи.

НАША ОБЛОЖКА

Мозаика из снежинок

На первой странице обложки изображена мозаика из так называемых *снежинок Кох*. Снежинка Кох является одним из фракталов, о которых можно прочитать, например, в статье Н.Долбилина в этом номере журнала.

Построить снежинку можно следующим образом. Возьмем равносторонний треугольник, разделим каждую его сторону на три равных отрезка и построим на средних отрезках правильные треугольники во внешнюю сторону от исходного. Получим фигуру, ограниченную 12 отрезками. Разделим каждый из этих отрезков на три части и вновь построим на средних отрезках правильные треугольники (рис.1).

Повторим ту же операцию с отрезками, ограничивающими полученную фигуру, и т.д. В пределе как раз получится снежинка Кох.

Отметим, что периметр снежинки бесконечен, а площадь конечна и равна $\frac{8}{5}$ площади исходного треугольника.

(Продолжение см. на с. 29)

что мы имеем, заставляет сформулировать два безответных пока вопроса.

Вопрос 1. Для любого ли *n* можно отметить требуемым образом клетки квадрата $n \times n$?

Вопрос 2. Если да, то всегда ли количество способов, которыми можно это сделать, является целой неотрицательной степенью числа 4?

Что ж, «провалившись» с квадратом, попробуем поступить излюбленным методом отечественного персонажа деда Щукаря: *вильнуть куда-то в сторону*. Рассмотрим не квадрат, а прямоугольник размером $m \times n$ клеток. Что будет для него при решении той же задачи?

После запуска компьютера на всю мощь были получены результаты для всех досок размером вплоть до 20×50 (дальше опять начались проблемы со временем). Результаты оказались не менее удивительны. Во-первых, по-прежнему *для всех* проверенных прямоугольников решение существует, причем для большинства из них (не менее 70%) оно *единственно*. При этом были выявлены два значения $m = 12$ и 18, для которых решение единственно при *любом* (из рассмотренных) значении *n*. Ну а если количество решений не единственно, то в некоторых случаях оно уже не является степенью четверки, но является степенью двойки. Так что вопросов только добавилось.

Вопрос 3. Для любых ли *m* и *n* можно отметить требуемым образом клетки прямоугольника $m \times n$?

Вопрос 4. Если да, то всегда ли количество способов, которыми можно это сделать, является целой неотрицательной степенью числа 2?

Вопрос 5. Существует ли такое *m*, что для любого *n* решение единственно?

После такого безответного удара задача перешла в стадию «разброд и шатания». Уязвленное самолюбие требовало ответных действий. Были предприняты многократные попытки исследовать не квадрат и не прямоугольник, а *любую* фигуру, которую можно вырезать из клетчатой бумаги (в том числе и с дырками), причем с единственной целью: найти *хотя бы одну* фигуру, клетки которой *нельзя* отметить требуемым образом.

Читатель наверняка уже догадался, что получилось в результате: таких фигур обнаружено не было! Любое самое заковыристое нагромождение клеток, которое только могло изобрести воспаленное воображение, позволяло после некоторых мучений добиться нужной «разметки». О количестве решений речь здесь, конечно, не шла – не до того как-то было. Остается последний вопрос.

Вопрос 6. Существует ли *хотя бы одна* фигура, которую можно вырезать из клетчатой бумаги (возможно, с дырками), клетки которой нельзя отметить требуемым образом?

Автор будет благодарен читателям, которые прояснят хотя бы часть поставленных вопросов. Но на всякий случай предупреждаем (ибо проверено на себе): не исключено, что в процессе раздумий у вас появится ощущение, что где-то совсем рядом находится призрак Леонардо да Винчи, который смотрит на вас и сочувственно улыбается. Точь-в-точь как Джоконда.

Мозаика из снежинок

(Начало см. на с. 14)

Теперь будем строить не одну, а много снежинок. Для начала замостим плоскость правильными треугольниками и шестиугольниками, как показано на рисунке 2. Затем в каждом из шестиугольников проведем три диагонали. В результате плоскость будет покрыта большими правильными треугольниками (закрасим их в красный цвет), маленькими правильными треугольниками (закрасим их в синий цвет) и равнобедренными треугольниками с углом 120° (оставим их белыми). Начнем строить снежинки Кох из всех правильных треугольников. Как видно из рисунка 3, после первой итерации от каждого белого треугольника останутся незакрашенными 4 подобных ему втрое меньших треугольника. На второй итерации с этими ма-

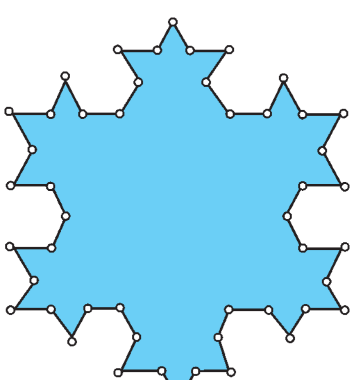

Рис. 1

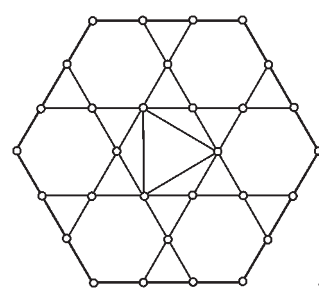

Рис. 2

леньками треугольниками произойдет то же самое и т.д. Таким образом, красные и синие снежинки не будут

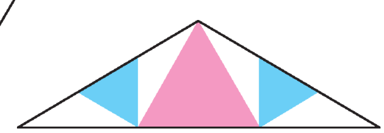

Рис. 3

пересекаться и в пределе заполнят почти всю плоскость. Последнее утверждение означает, что площадь белой части плоскости стремится к нулю, хотя существуют точки, которые никогда не будут окрашены.

Мозаика на рисунке 4 получается после трех итераций.

А.Заславский

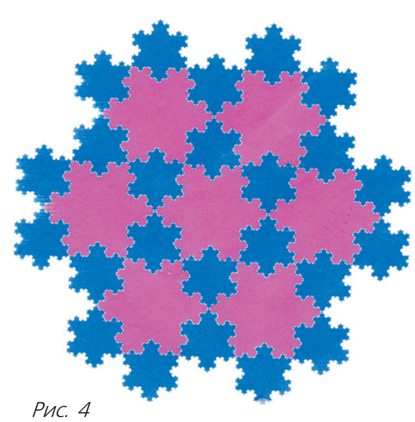

Рис. 4