XLV Международная математическая олимпиада

XLV Международная математическая олимпиада (ММО) проходила с 4 по 18 июля 2004 года в Афинах за месяц до летних Олимпийских игр и начиналась в дни, когда вся Греция праздновала победу своей сборной на чемпионате Европы по футболу. Организаторы ММО подготовили участникам олимпиады – 486 школьникам из 85 стран мира – интересную культурную программу: экскурсии в Акрополь, Микены, на Коринфский канал, в первую столицу современной Греции город Нафплион...

В команду России на ММО были включены:

Андрей Бадзян – ФМЛ 31, Челябинск,

Михаил Дубашинский – ФМЛ 239, Санкт-Петербург,

Михаил Исаев – гимназия 42, Барнаул,

Дмитрий Пермяков – гимназия 127, Снежинск Челябинской обл.,

Надежда Петухова – ФТШ, Санкт-Петербург,

Игорь Шнурников – гимназия 36, Краснодар.

Запасным был *Юрий Мешин* – ФМЛ, Киров.

Участникам ММО в каждом из двух туров было предложено по 3 задачи, оценивавшихся в 7 баллов каждая. В неофициальном командном зачете (по сумме баллов, набранных всеми участниками) наша команда заняла третье место, но выступление школьников России в этом году следует признать очень успешным. Лишь четырем участникам удалось показать на олимпиаде абсолютный результат (42 балла), и среди них наши А.Бадзян и М.Дубашинский, завоевавшие, соответственно, свои третью и вторую золотые медали на международных олимпиадах. Кроме того, в десятку лучших вошел М.Исаев, а Н.Петухова оказалась в первой двадцатке.

Итоги выступления наших школьников на ММО приведены в таблице:

	1	2	3	4	5	6	Сумма баллов	Медаль
А.Бадзян	7	7	7	7	7	7	42	золотая
М.Дубашинский	7	7	7	7	7	7	42	золотая
М.Исаев	7	6	4	7	7	7	38	золотая
Н.Петухова	7	5	3	7	7	6	35	золотая
И.Шнурников	7	7	0	7	4	0	25	серебряная
Д.Пермяков	7	2	4	7	3	0	23	бронзовая

Команду России к ММО-2004 подготовили тренеры Г.Челноков (Москва), С.Берлов, Д.Карпов, М.Пратусевич (все – Санкт-Петербург), А.Поярков (Рыбинск), А.Глазырин (Челябинск), А. Гарбер, В.Дольников (оба – Ярославль), И.Богданов, Р.Карасев, П.Кожевников, О.Подлипский, Д.Терешин (все – Долгопрудный).

Практически не меняется в последние годы список сильнейших команд на ММО. В неофициальном командном зачете лучшими стали следующие страны:

№	Страна	Золотая медаль	Серебрянная медаль	Бронзовая медаль	Сумма баллов
1.	Китай	6	0	0	220
2.	США	5	1	0	212
3.	Россия	4	1	1	205
4.	Вьетнам	4	2	0	196
5.	Болгария	3	3	0	194
6.	Тайвань	3	3	0	190
7.	Венгрия	2	3	1	187
8.	Япония	2	4	0	182
9.	Иран	1	5	0	178
10.	Румыния	1	4	1	176
11.	Украина	1	5	0	174
12.	Корея	2	2	2	166
13.	Белоруссия	0	4	2	154
14.	Индия	0	4	2	151
15.	Израиль	1	1	4	147
16.	Польша	2	1	1	142
17.	Молдавия	2	0	4	140
18.	Сингапур	0	3	3	139
19.	Монголия	0	3	2	135
20.	Великобритания	1	1	4	134
21.	Казахстан	2	0	2	132

В рамках подготовки к ММО-2005 команда России, в которую вошли девятиклассник А.Магазинов (Ярославль) и десятиклассники А.Ефимов (Москва), А.Подхалюзин (Санкт-Петербург), А.Гаврилюк (Долгопрудный), П.Козлов (Ростов), В.Астахов (Саратов), в мае 2004 года приняла участие в Болгарской математической олимпиаде. Эта олимпиада проводится по схеме международных, когда всем школьникам предлагаются единые задания независимо от класса, в котором они обучаются. Несмотря на то, что участниками олимпиады были и все члены команды Болгарии на ММО-2004, наши школьники показали высокие результаты, заняв, соответственно, 1, 3, 4, 8, 11 и 20 места в общем зачете.

Хочется выразить большую благодарность стипендиальному фонду Владимира Потанина, компаниям «Спортмастер» и «1С» за поддержку олимпиадного движения и помощь в подготовке национальной команды России к международным математическим олимпиадам.

ЗАДАЧИ ОЛИМПИАДЫ

1. Пусть ABC – остроугольный треугольник, в котором $AB \neq AC$. Окружность с диаметром BC пересекает стороны AB и AC в точках M и N соответственно. Обозначим через O середину стороны BC. Биссектрисы углов BAC и MON пересекаются в точке R. Докажите, что окружности, описанные около треугольников BMR и CNR, имеют общую точку, лежащую на стороне BC.

(Румыния)

2. Найдите все многочлены $P(x)$ с действительными коэффициентами, удовлетворяющие равенству

$$P(a-b)+P(b-c)+P(c-a)=2P(a+b+c)$$

для любых действительных чисел a, b, c таких, что $ab+bc+ca=0$.

(Южная Корея)

3. Назовем *крюком* фигуру, состоящую из шести клеток, как показано на рисунке 1, а также любую фигуру, которую можно получить из нее с помощью поворотов и

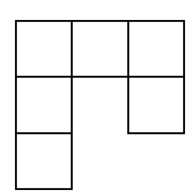

Рис. 1

переворотов. Найдите все прямоугольники $m \times n$, которые можно замостить крюками.

(Эстония)

4. Пусть $n \geq 3$ – натуральное число. Пусть $t_1, t_2, \ldots, t_n$ – положительные действительные числа такие, что

$$n^2 + 1 > (t_1 + t_2 + \ldots + t_n)\left(\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} + \ldots + \frac{1}{t_n}\right).$$

Докажите, что t_i, t_j, t_k являются сторонами треугольника при всех i, j, k таких, что $1 \leq i < j < k \leq n$.

(Южная Корея)

5. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ диагональ BD не является биссектрисой ни угла ABC, ни угла CDA. Точка P, лежащая внутри четырехугольника $ABCD$, удовлетворяет условиям: $\angle PBC = \angle DBA$, $\angle PDC = \angle BDA$. Докажите, что четырехугольник $ABCD$ является вписанным тогда и только тогда, когда $AP = CP$.

(Польша)

6. Назовем натуральное число *полосатым*, если любые две соседние цифры в его десятичной записи имеют разную четность. Найдите все натуральные n, для каждого из которых существует полосатое число, делящееся на n.

(Иран)

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

По традиции, мы приводим решения задач олимпиады, предложенные нашими школьниками.

1 (И.Шнурников). Пусть AL – биссектриса треугольника ABC (рис.2). Докажем, что окружности, описанные около треугольников BMR и CNR, пересекаются в точке L.

Заметим, что O – центр окружности, проходящей через B, M, N, C. Значит, треугольник MON равнобедренный ($OM = ON$), и биссектриса угла MON является серединным перпендикуляром к отрезку MN.

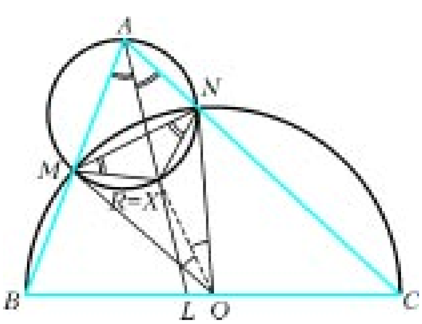

Рис. 2

Опишем окружность около треугольника AMN и обозначим за X середину той дуги MN, которая не содержит точку A. Отрезки MX и NX равны как хорды, стягивающие равные дуги, следовательно, X лежит на серединном перпендикуляре к отрезку MN. С другой стороны, из равенства дуг MX и NX следует равенство вписанных углов MAX и NAX, поэтому X лежит на биссектрисе AL. Итак, мы получаем, что X лежит одновременно и на биссектрисе угла BAC, и на биссектрисе угла MON, т.е. X совпадает с R.

Из вписанности четырехугольников $BMNC$ и $AMRN$ следуют равенства $\angle BMN + \angle BCN = 180°$ и $\angle NMR = \angle NAR = \frac{1}{2}\angle BAC$. Отсюда

$$\angle BMR + \angle BLR = (\angle BMN - \angle NMR) + (\angle CAL + \angle ACL) =$$

$$= \left(\angle BMN - \frac{1}{2}\angle BAC\right) + \left(\frac{1}{2}\angle BAC + \angle BCN\right) = 180°.$$

Полученное равенство означает, что точки B, M, R, L лежат на одной окружности. Аналогично, точки C, N, R, L лежат на одной окружности.

2 (М.Дубашинский). *Ответ*: $P(x) = \alpha x^4 + \beta x^2$, где α и β – произвольные действительные числа.

В решении будет использоваться следующая несложная лемма: если многочлены $P(x)$ и $Q(x)$ таковы, что $P(t) = Q(t)$ для любого действительного t, то P и Q совпадают как многочлены (т.е. у них равны коэффициенты при соответствующих степенях x).

Для доказательства рассмотрим разность $R(x) = P(x) - Q(x)$. Если бы многочлен $R(x)$ имел хотя бы один ненулевой коэффициент, то он бы имел конечное число корней, но равенству $R(t) = P(t) - Q(t)$ удовлетворяет любое действительное t. Лемма доказана.

Многочлен $P(x) = 0$, очевидно, удовлетворяет условию. Пусть $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ ($a_n \neq 0$) – ненулевой многочлен, удовлетворяющий условию. Подставим $a = t$, $b = c = 0$ в исходное равенство (для таких a, b, c выполнено $ab + bc + ca = 0$). При $t = 0$ имеем: $3P(0) = 2P(0)$, откуда $P(0) = a_0 = 0$. При любом действительном t получаем $P(t) + P(0) + P(-t) = 2P(t) \Rightarrow P(t) = P(-t)$. Согласно лемме, отсюда следует, что все коэффициенты $P(x)$ при нечетных степенях x равны 0, в частности, n четно.

Далее, подставим $a = 3t$, $b = 6t$, $c = -2t$ (при этом $ab + bc + ca = (18 - 12 - 6)t^2 = 0$), получаем $P(-3t) + P(8t) + P(-5t) = 2P(7t)$. Согласно лемме, имеем равенство $P(-3x) + P(8x) + P(-5x) = 2P(7x)$ многочленов от переменной x. Приравняем коэффициенты при старшем члене x^n левой и правой части: $a_n(-3)^n + a_n 8^n + a_n(-5)^n = 2a_n 7^n$, и с учетом четности n получаем $3^n + 8^n + 5^n = 2 \cdot 7^n$, или $\left(\frac{3}{7}\right)^n + \left(\frac{8}{7}\right)^n + \left(\frac{5}{7}\right)^n = 2$. При $n \geq 8$ левая часть последнего равенства больше чем $\left(\frac{8}{7}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{7}\right)^n = 1 + C_n^1 \cdot \frac{1}{7} + \ldots > 1 + \frac{n}{7} > 2$. (Здесь было использовано разложение $\left(1 + \frac{1}{7}\right)^n$ по биному Ньютона.) При $n = 6$ равенство $3^n + 8^n + 5^n = 2 \cdot 7^n$ неверно, в чем можно убедиться и не прибегая к вычислениям, заметив, что $3^6, 8^6, 5^6$ дают остаток 1 при делении на 7 (это следует, например, из малой теоремы Ферма), поэтому $3^6 + 8^6 + 5^6$ дает остаток 3 при делении на 7.

Итак, остается случай $n \leq 4$, который приводит (ввиду $a_0 = 0$, $a_1 = a_3 = 0$) к многочлену вида $P(x) = \alpha x^4 + \beta x^2$.

Остается проверить ответ. Рассмотрим

$$P(a-b) + P(b-c) + P(c-a) - 2P(a+b+c) =$$

$$= \beta\left((a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 - 2(a+b+c)^2\right) +$$

$$+ \alpha\left((a-b)^4 + (b-c)^4 + (c-a)^4 - 2(a+b+c)^4\right).$$

Первая скобка равна $-4(ab + bc + ca) = 0$. Преобразуем вторую скобку с учетом $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2$:

$$(a-b)^4 + (b-c)^4 + (c-a)^4 - 2\left(a^2 + b^2 + c^2\right)^2 =$$

$$= \left(a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4\right) +$$

$$+ \left(b^4 - 4b^3c + 6b^2c^2 - 4bc^3 + c^4\right) +$$

$$+ \left(c^4 - 4c^3a + 6c^2a^2 - 4ca^3 + a^4\right) -$$

$$- 2\left(a^4 + b^4 + c^4 + 2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2\right) =$$

$$= 2\left(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2\right) - 4ab\left(a^2 + b^2\right) -$$

$$- 4bc\left(b^2 + c^2\right) - 4ca\left(c^2 + a^2\right) =$$

$$= 2\left(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + 2a^2bc + 2b^2ca + 2c^2ab\right) -$$

$$-\ 4ab\left(a^2+b^2+c^2\right)-4bc\left(a^2+b^2+c^2\right)-4ca\left(a^2+b^2+c^2\right)=$$

$$=\ 2\left(ab+bc+ca\right)^2-4\left(ab+bc+ca\right)\left(a^2+b^2+c^2\right)=0\ .$$

3 (А.Бадзян). *Ответ*: это прямоугольники, для которых $m\,\vdots\,3$, $n\,\vdots\,4$ (или $n\,\vdots\,3$, $m\,\vdots\,4$), и прямоугольники, для которых $m\,\vdots\,12$, $n\neq 1,2,5$ (или $n\,\vdots\,12$, $m\neq 1,2,5$).

Пусть прямоугольник $m\times n$ замощен крюками. Для каждого крюка *А* рассмотрим клетку, граничащую по стороне с тремя клетками крюка (рис.3). Назовем такую клетку *выделенной* клеткой крюка *А*. Она покрыта каким-то другим крюком *Б*. Так как крюк *Б* не пересекается с крюком *А*, возможны 3 варианта его расположения (рис.4), причем третий вариант отпадает, так как на доске остается непокрытая клетка. В оставшихся вариантах крюк *А* покрывает выделенную клетку крюка *Б*. Следовательно, все крюки разбиваются на пары крюков, покрывающих выделенные клетки друг друга. Каждая такая пара крюков образует фигуру из 12 клеток одного из двух видов – «кирпич» 4×3 или «зигзаг» (рис.5). Итак, прямоугольник $m\times n$ разбит на кирпичи и зигзаги из 12 клеток. В частности, отсюда следует, что mn делится на 12. Одно из чисел m, n делится на 3, пусть для определенности $m\,\vdots\,3$. Имеются следующие возможности:

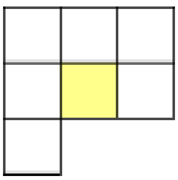

Рис. 3

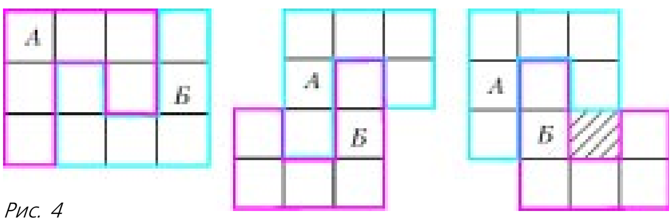

Рис. 4

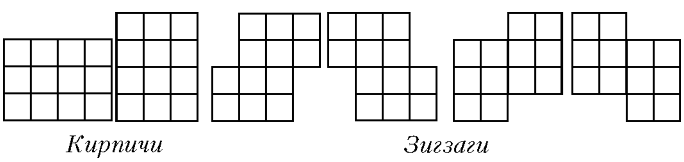

Рис. 5

1) m и n четны, но не делятся на 4;
2) $n\,\vdots\,4$;
3) $m\,\vdots\,4$.

Рассмотрим отдельно эти случаи.

1) Предположим, что m и n четны, но не делятся на 4. Тогда общее количество (равное $mn/12$) кирпичей и зигзагов нечетно.

Кирпич может быть ориентирован двумя способами – горизонтально и вертикально, зигзаг может быть ориентирован четырьмя способами – два вертикальных и два горизонтальных (см. рис.5).

Покрасим в прямоугольнике $m\times n$ каждую четвертую вертикальную полосу красным, а остальную часть прямоугольника – синим (рис.6). Общее количество красных клеток четно, так как в каждой полосе их n – четное число. Заметим, что в каждом вертикальном кирпиче и горизонтальном зигзаге 0, 2 или 4 красные клетки, значит, все вертикальные кирпичи и горизонтальные зигзаги накрывают четное число красных клеток. Таким образом, все горизонтальные кирпичи и вертикальные зигзаги накрывают четное число красных клеток. Но в каждом горизонтальном кирпиче или вертикальном зигзаге ровно 3 красные клетки, поэтому суммарное количество горизонтальных кирпичей и вертикальных зигзагов четно.

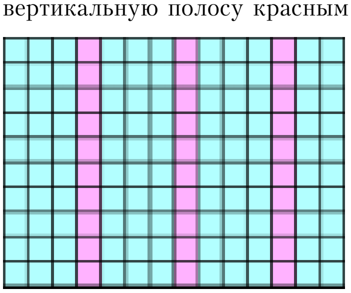

Рис. 6

Рассматривая аналогичную раскраску горизонтальными полосами, докажем, что суммарное количество вертикальных кирпичей и горизонтальных зигзагов четно.

Итак, мы получаем, что общее количество кирпичей и зигзагов четно – противоречие.

2) Если $m\,\vdots\,3$ и $n\,\vdots\,4$, то прямоугольник $m\times n$ разбивается на кирпичи (а каждый кирпич разбивается на 2 крюка).

3) Если $m\,\vdots\,3$ и $m\,\vdots\,4$, то $m\,\vdots\,12$, т.е. $m=12l$. Если n можно представить в виде $n=3x+4y$ с целыми неотрицательными x и y, то прямоугольник $m\times n$ разбивается на x прямоугольников $12l\times 3$ и y прямоугольников $12l\times 4$, каждый из которых разбивается на кирпичи. Представим в виде $n=$ $=3x+4y$ все $n\neq 1$, 2, 5: $3=3\cdot 1+4\cdot 0$, $4=3\cdot 0+4\cdot 1$, $8=3\cdot 0+4\cdot 2$; все оставшиеся n получаются из чисел 3, 4, 8 прибавлением нескольких троек. Итак, если $n\neq 1$, 2, 5, то разбиение на крюки возможно.

В прямоугольники $m\times 1$, $m\times 2$ невозможно поместить ни одного крюка. Наконец, предположим, что прямоугольник $m\times 5$ удалось замостить фигурами «кирпич» и «зигзаг». Но тогда легко видеть, что две фигуры, покрывающие две угловые клетки в строке длины 5, обязательно перекрываются – противоречие.

4 (Д.Пермяков). Предположим противное: пусть при некоторых $1\le i<j<k\le n$ числа t_i, t_j, t_k не являются длинами сторон треугольника. Обозначим тройку t_i, t_j, t_k как a, b, c, где $a+b\le c$.

Докажем для чисел $x\ge y\ge z>0$ вспомогательное неравенство $\dfrac{x}{z}+\dfrac{z}{x}\ge\dfrac{y}{z}+\dfrac{z}{y}$. Сделаем эквивалентные преобразования: $\dfrac{x}{z}-\dfrac{y}{z}\ge\dfrac{z}{y}-\dfrac{z}{x}$, $\dfrac{x-y}{z}\ge\dfrac{z(x-y)}{xy}$. Домножая на общий знаменатель, получаем $xy(x-y)\ge z^2(x-y)$ – верное равенство. Из доказанного неравенства, в частности, следует, что $\dfrac{c}{a}+\dfrac{a}{c}\ge\dfrac{a+b}{a}+\dfrac{a}{a+b}$ и $\dfrac{c}{b}+\dfrac{b}{c}\ge\dfrac{a+b}{b}+\dfrac{b}{a+b}$.

Как частный случай доказанного при $z=y$, получим известное неравенство $\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}\ge 2$ для положительных x и y.

Сделаем оценку:

$$\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)+\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right)\ge$$

$$\ge 2+\left(\frac{a+b}{b}+\frac{b}{a+b}\right)+\left(\frac{a+b}{a}+\frac{a}{a+b}\right)=$$

$$=2+\left(\frac{a+b}{b}+\frac{a+b}{a}\right)+\left(\frac{b}{a+b}+\frac{a}{a+b}\right)=$$

$$=2+\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+2\right)+\frac{a+b}{a+b}\ge 7\ .$$

(Фактически, мы решили задачу для $n=3$.)

При раскрытии скобок $\left(t_1+t_2+\ldots+t_n\right)\left(\dfrac{1}{t_1}+\dfrac{1}{t_2}+\ldots+\dfrac{1}{t_n}\right)$ получается n слагаемых вида $t_i\cdot\dfrac{1}{t_1}=1$ и $\dfrac{n(n-1)}{2}$ слагаемых вида $\left(\dfrac{t_k}{t_l}+\dfrac{t_l}{t_k}\right)$ для всевозможных $1\le k<l\le n$. Каждое

слагаемое $\left(\frac{t_k}{t_l}+\frac{t_l}{t_k}\right)$ не меньше 2, а кроме того, сумма трех слагаемых $\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)+\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right)$ не меньше $7=2\cdot3+1$. Значит, сумма всех слагаемых вида $\left(\frac{t_k}{t_l}+\frac{t_l}{t_k}\right)$ не меньше, чем удвоенное количество слагаемых плюс 1. Итак,

$$(t_1+t_2+\ldots+t_n)\left(\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}+\ldots+\frac{1}{t_n}\right)\ge$$

$$\ge n+2\cdot\frac{n(n-1)}{2}+1=n^2+1,$$

что противоречит условию.

5 (Н.Петухова). Пусть четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность (рис.7). Продлим отрезки BP и DP до пересечения с окружностью в точках D' и B' соответственно. Так как равные вписанные углы опираются на равные дуги, дуги AB и CB' равны, а также дуги AD и CD' равны. Следовательно, точки B и B', а также точки D и D' симметричны относительно серединного перпендикуляра l к отрезку AC. Значит, отрезки BD' и $B'D$ симметричны относительно l, поэтому их точка пересечения P лежит на l, т.е. равноудалена от A и C.

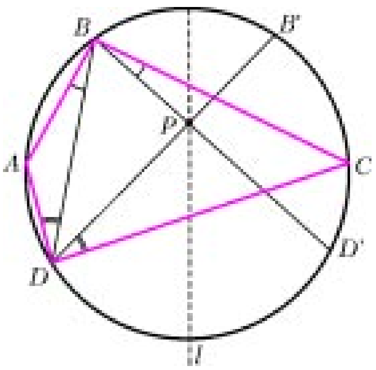

Рис. 7

Наоборот, пусть теперь дано, что $AP=CP$, т.е. P лежит на серединном перпендикуляре l к отрезку AC (рис.8). Предположим, что четырехугольник $ABCD$ не является вписанным. Тогда окружности S_B и S_D, описанные около треугольников ABC и ADC соответственно, различны. Пусть прямая BD пересекает окружность S_B в точках B и D_1, а окружность S_D – в точках D и B_1.

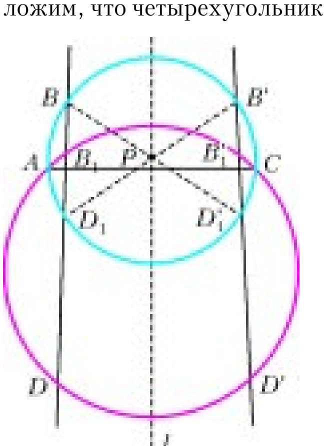

Рис. 8

Обозначим за B', D', B_1', D_1' образы точек B, D, B_1, D_1 соответственно при симметрии относительно l. Очевидно, что B', D', B_1', D_1' лежат на одной прямой, B' и D_1' лежат на окружности S_B, а B_1' и D' лежат на окружности S_D. Из симметрии следует, что дуги AD_1 и CD_1' окружности S_B равны, поэтому равны вписанные углы ABD_1 и CBD_1'. Но по условию $\angle ABD_1=\angle CBP$, поэтому, BD_1' тоже проходит через точку P. В силу симметрии, $B'D_1$ проходит через точку P. Аналогично доказываем, что и прямые DB_1' и $D'B_1$ проходят через P. Отметим, что по условию прямые BP и BD различны, поэтому прямые BD и $B'D'$ не проходят через P.

Пусть $\angle ABC+\angle ADC<180°$. Так как $ABCD$ – выпуклый четырехугольник, то отрезок BD пересекается с отрезком AC. Отсюда следует, что точки B и B_1 лежат по одну сторону от AC, а D и D_1 – по другую. Заметим, что $\angle AD_1C>\angle ADC$, поэтому точка D_1 – внутри окружности S_D. Отсюда следует, что точка D_1 лежит на прямой BD между точками B и D. Аналогично, точка B_1 лежит между точками B и D. Итак, порядок следования точек на прямой – B, B_1, D_1, D, в частности, D_1 лежит на отрезке B_1D. В силу симметрии D_1' лежит на отрезке $B_1'D'$.

Углы B_1PD и $B_1'PD'$ в симметричных относительно l треугольниках B_1PD и $B_1'PD'$ либо вертикальные (если P лежит на отрезке DB_1'), либо совпадают (если P лежит на продолжении отрезка DB_1') (рис.9). Так как D_1 лежит на отрезке DB_1, то в любом случае прямая PD_1 пересекает отрезок $D'B_1'$ (а не его продолжение). Получаем, что B' лежит на отрезке $D'B_1'$ – противоречие.

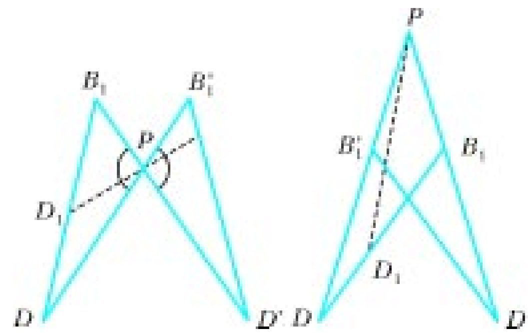

Рис. 9

Случай $\angle ABC+\angle ADC>180°$ разбирается аналогично – лишь точки B и B_1, D и D_1, B' и B_1', D' и D_1' поменяются ролями.

6 (М.Исаев). *Ответ*: все числа, не кратные 20.

Любое число, делящееся на 20, имеет последнюю цифру 0 и четную предпоследнюю цифру. Следовательно, полосатое число не может делиться на число n, кратное 20.

Докажем по шагам, что все остальные числа подходят.

Шаг 1. Существует нечетное k-значное полосатое число X_k (в качестве первой четной цифры допускается 0), делящееся на 5^k.

Докажем индукцией по k. База: положим $X_1=5$. Докажем переход. Пусть имеется k-значное полосатое число $X_k=5^km$. Чтобы получить число X_{k+1}, подберем подходящую цифру a и припишем ее слева к X_k, т.е. будем искать X_{k+1} в виде $\overline{aX_k}=10^ka+X_k=5^k\left(2^ka+m\right)$. Нам нужно, чтобы $S_a=2^ka+m$ делилось на 5. Кроме того, если k нечетно, то цифру a выберем четной (чтобы X_{k+1} было полосатым). Покажем, что это возможно. Числа 0, 2, 4, 6, 8 дают различные остатки от деления на 5, поэтому 5 чисел S_0, S_2, S_4, S_6, S_8 дают различные остатки от деления на 5 (значит, среди этих остатков есть 0). В самом деле, если бы какие-то S_i и S_j $(i\ne j)$ давали одинаковый остаток от деления на 5, то их разность $S_i-S_j=2^k(i-j)$ должна была делиться на 5, но это не так. Если же k четно, то искомую цифру a выберем нечетной. Аналогично доказываем, что это возможно, используя то, что числа 1, 3, 5, 7, 9 дают различные остатки от деления на 5.

Шаг 2. Существует k-значное полосатое число Y_k, делящееся на 2^k, причем если k четно, то Y_k делится на 2^{k+1}, а если k нечетно, то Y_k не делится на 2^{k+1}.

Докажем это индукцией по k. База: $Y_1=2$. Докажем переход. Пусть имеется k-значное число Y_k, удовлетворяющее данным условиям. Определим Y_{k+1}.

Пусть k нечетно, $k=2t-1$ для некоторого натурального t. Тогда $Y_{2t-1}=2^{2t-1}m$, где m нечетно. Получим полосатое число $Y_{2t}=\overline{aY_{2t-1}}$, подобрав нечетную цифру a. Запишем $Y_{2t}=10^{2t-1}a+Y_{2t-1}=2^{2t-1}\left(5^{2t-1}a+m\right)$. Для доказательства индукционного перехода нам требуется, чтобы $5^{2t-1}a+m$ делилось на 4. Заметим, что 5 в любой степени дает остаток 1 от деления на 4, поэтому если m дает остаток 1 от деления на 4, положим $a = 3$, а если m дает остаток 3 от деления на 4, положим $a = 1$.

Пусть k четно, $k = 2t$. Тогда $Y_{2t} = 2^{2t+1}m$. Получим полосатое число $Y_{2t+1}\overline{aY_{2t}}$, подобрав четную цифру $a = 2b$. Имеем $Y_{2t+1} = 10^{2t}a + Y_{2t} = 2^{2t+1}\left(5^{2t}b+m\right)$. Нам нужно, чтобы $5^{2t}b+m$ не делилось на 2. Для этого положим $b = 1$ (т.е. $a = 2$), если m нечетно, и $b = 2$ (т.е. $a = 4$), если m четно.

Шаг 3. Существует нечетное полосатое число, делящееся на $5^k p$ ($k = 0, 1, 2, \ldots$), где $\text{НОД}(p,10)=1$.

Пусть X – нечетное полосатое число из четного количества цифр (возможно, с первой цифрой 0), делящееся на 5^k (если $k = 0$, то положим $X = 01$, если k четно, то пусть $X = X_k$ из первого шага, если же k нечетно, то пусть $X = X_{k+1}$ из первого шага). Нужное полосатое число Z, делящееся на $5^k p$, найдем в виде $Z = \underbrace{\overline{XX\ldots X}}_{l+1} = X\left(1+10^k+10^{2k}+\ldots+10^{lk}\right)$, где k – количество цифр в числе X. Достаточно доказать утверждение: найдется такое l, что $S_l = 1+10^k+10^{2k}+\ldots+10^{lk} = \dfrac{10^{(l+1)k}-1}{10^k-1}$ делится на p. Для доказательства воспользуемся теоремой Эйлера: если $\text{НОД}(a,b)=1$, то $a^{\varphi(b)}-1$ делится на b, где $\varphi(b)$ – количество натуральных чисел, меньших b и взаимно простых с b. Положим $l+1=\varphi\left(\left(10^k-1\right)p\right)$, тогда $10^{(l+1)k}-1$ делится на $10^{l+1}-1$, а $10^{l+1}-1$ в силу теоремы Эйлера делится на $\left(10^k-1\right)p$. (Утверждение можно доказать и без помощи теоремы Эйлера: заметим, что найдутся такие различные $l_1 > l_2$, что S_{l_1} и S_{l_2} дают один и тот же остаток при делении на p. Тогда $S_{l_1}-S_{l_2} = 10^{(l_2+1)k}S_{l_1-l_2}$ делится на p, т.е. $S_{l_1-l_2}$ делится на p.)

Шаг 4. Существует полосатое число, делящееся на $2^k p$ ($k = 0, 1, 2, \ldots$), где $\text{НОД}(p,10)=1$.

Доказательство аналогично третьему шагу с использованием построенного на втором шаге полосатого числа, делящегося на 2^k.

Шаг 5. Существует полосатое число, делящееся на $2\cdot 5^k p$, где $\text{НОД}(p,10)=1$.

Достаточно приписать 0 в конце нечетного полосатого числа, делящегося на 5^k, полученного на третьем шаге.

Публикацию подготовили
Н.Агаханов, П.Кожевников, Д.Терешин

XXXV Международная физическая олимпиада

С 15 по 23 июля 2004 года в Южной Корее в городе Поханг проходила очередная международная физическая олимпиада школьников. В олимпиаде приняли участие команды из 73 стран, в том числе – команда Франции, которая 25 лет не участвовала в олимпиаде. Япония, ранее не принимавшая участие в олимпиаде, прислала своего наблюдателя; это означает, что Япония имеет намерение в следующем году присоединиться к олимпиадному движению. Общее число участников олимпиады составило 332 школьника.

Как и в предыдущие годы, подготовка сборной команды России проводилась на базе Московского физико-технического института. Кандидаты в сборную были отобраны по результатам двух всероссийских олимпиад, а также одного квалификационного и двух учебно-тренировочных сборов. Во время проведения сборов с ребятами работали преподаватели кафедры общей физики, а также студенты Физтеха – победители международных олимпиад прошлых лет. В общей сложности продолжительность всех сборов составила четыре с половиной недели.

В сборную команду России на XXXV Международную физическую олимпиаду школьников были включены:

Глазырин Семен – гимназия 127, Снежинск Челябинской обл. (учитель физики – Е.М.Елькина),

Речистов Григорий – Многопрофильный лицей, Вологда (учителя – Л.Н.Суханов и А.Г.Дрижук),

Оферкин Игорь – школа 18, Новочебоксарск (учителя – Л.Н.Турковская и В.Д.Кочаков),

Лесничий Яков – лицей 3, Кропоткин Краснодарского кр. (учитель – Н.Г.Черная),

Андреев Иван – экспериментальная школа 82, Черноголовка Московской обл. (учителя – В.Г.Егоров и Г.В.Любимова).

Команду России возглавили профессор МФТИ С.М.Козел и доцент МФТИ В.П.Слободянин. В качестве наблюдателя от России на олимпиаде присутствовал Заслуженный учитель России (ФМЛ 31, Челябинск) И.А.Иоголевич, ученики которого на предыдущих международных олимпиадах завоевали четыре золотые медали.

Участникам олимпиады были предложены три теоретических задания, каждое из которых оценивалось в 10 баллов, и одно экспериментальное задание – 20 баллов. Таким образом, каждый из участников олимпиады мог набрать 50 баллов. Как теоретические, так и экспериментальные задания для большинства участников олимпиады оказались очень трудными. Средний балл за решение первого теоретического задания составил 5,0; второго задания – 4,9; третьего – 3,3; а средний балл за выполнение экспериментального задания был равен 9,1. Аналогичные баллы, полученные нашими ребятами, составили 7,7; 7,8; 8,2 и 11,6 соответственно. Эти результаты показывают, что ребята хорошо справились с заданиями теоретического тура (79%) и значительно хуже – с экспериментом (58%).

По итогам выступления на XXXV Международной физической олимпиаде были отмечены 215 участников. Золотые медали получил 31 ученик, серебряные – 35 и бронзовые – 68. Кроме того, 81 участник был награжден грамотами.

Члены сборной России показали следующие результаты: Глазырин Семен – 38,5 балла, Оферкин Игорь – 36,8 балла, Андреев Иван – 35,6 балла, Речистов Григорий – 34,3 балла (все они получили серебряные медали), Лесничий Яков – 31,0 балл (бронзовая медаль).

Сравнительные неофициальные результаты выступления на олимпиаде 13 лучших команд приведены в таблице: