Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 1 августа 2005 года по адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» №3–2005» и номера задач, решения которых Вы посылаете, например «М1951» или «Ф1958». В графе «От кого» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем Вашим адресом и необходимый набор марок (в этом конверте Вы получите результаты проверки решений).

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с Вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «Задачник «Кванта», новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором Вы учитесь.

Задачи М1951–М1960, Ф1958–Ф1967

М1951. Имеются два разных расположения одних и тех же ладей на шахматной доске, причем известно, что одно получено из другого после двух ходов каждой ладьи. Всегда ли можно указать третье расположение этих же ладей на этой доске, из которого каждое из двух данных расположений достигается одним ходом каждой ладьи?

С.Волчёнков

М1952. Пусть AH – высота, BL – биссектриса, CM – медиана треугольника ABC.
а) Докажите, что AH, BL и CM пересекаются в одной точке в точности если $LH \parallel AB$.
б) Докажите, что $LH \parallel AB$ в точности если

$$\frac{\sin \angle A}{\cos \angle C} = \operatorname{tg} \angle B .$$

А.Полянский (ученик 10 кл.)

М1953. Из листа клетчатой бумаги вырезали по линиям сетки многоугольник без дыр. Известно, что его можно разрезать по линиям сетки на прямоугольники 2×1. Докажите, что у него есть хотя бы одна сторона четной длины.

В.Гуровиц

М1954. Найдите все точные квадраты вида $\overline{a0\ldots0b}$, где a и b – отличные от нуля цифры.

В.Сендеров

М1955. Одна из проекций точки D на стороны треугольника ABC является серединой отрезка между двумя другими. Докажите, что одна из проекций точки C на стороны треугольника ABD также является серединой отрезка между двумя другими.

А.Заславский

М1956. Существует ли возрастающая арифметическая прогрессия из 2005 натуральных чисел таких, что произведение любых четырех из них делится на куб их суммы? А бесконечная арифметическая прогрессия с такими же свойствами?

И.Акулич

М1957. Из полного набора домино выбрали несколько костяшек и выложили по правилам в один ряд. Докажите, что костяшки всего набора можно выложить в один ряд, в котором выбранные костяшки идут в том же порядке (может быть, не подряд).

С.Волчёнков

М1958*. Можно найти пару натуральных чисел x и y, для которых $x^2 + xy + y^2$ является квадратом целого числа, а также пару натуральных чисел x и y, для которых $x^2 - xy + y^2$ является квадратом.
Докажите, что нельзя найти пару натуральных чисел x и y, для которых оба числа $x^2 + xy + y^2$ и $x^2 - xy + y^2$ являются квадратами.

В.Произволов, В.Сендеров

М1959. Имеются n квадратных трехчленов с буквенными коэффициентами и прозрачной мешок, содержащий $3n$ натуральных чисел. Двое ходят поочередно: каждый своим ходом берет из мешка число и заменяет им какой-либо из еще не замененных буквенных коэффициентов. Первый игрок хочет, чтобы каждый из n трехчленов имел хотя бы один целый корень. Может ли второй игрок всегда (при любом содержимом мешка и любой стратегии первого) этому помешать, если а) $n = 1$; б) $n = 2$; в) $n > 2$?

Н.Агаханов, В.Сендеров

М1960. Проекции внутренней точки правильного тетраэдра на грани соединены отрезками с вершинами

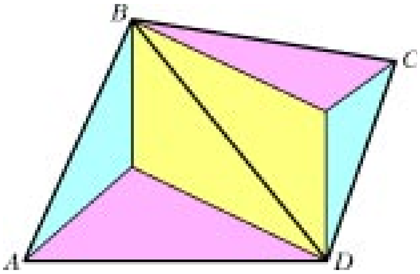

Рис. 1

своих граней. В результате поверхность тетраэдра оказалась разделенной на шесть областей. Каждая пара областей, содержащих пару противоположных ребер тетраэдра, окрашивается в свой цвет: желтый, синий или красный (рис.1). Докажите, что площадь, занятая каждым цветом, одна и та же.

В.Произволов

Ф1958. На тонкий прямой стержень длиной $L = 10$ м насажены $N = 20$ одинаковых маленьких бусинок, которые могут скользить по нему без трения. Скорости бусинок одинаковы и составляют $v = 2$ м/с, а при столкновениях друг с другом и с упорами стержня скорости бусинок меняют направление, оставаясь прежними по величине. В начальный момент половина бусинок едет вправо, половина – влево. Сколько ударов бусинок об упоры стержня произойдет за время $T = 1$ ч? А сколько всего ударов произойдет за это время между бусинками?

А.Бусин

Ф1959. Материальная точка движется вдоль отрезка прямой, длина которого $L = 2$ м. Скорость точки в начале отрезка $v_1 = 0{,}2$ м/с, в конце отрезка $v_2 = 0{,}4$ м/с. Известно, что скорость все время увеличивалась, но ускорение не превосходило $a_0 = 0{,}1$ м/с^2. Каким могло быть среднее ускорение точки на этом отрезке?

А.Простов

Ф1960. Туман состоит из огромного количества мельчайших капелек воды, неподвижно висящих в воздухе. Масса капелек в 1 л воздуха составляет 1 г (средняя плотность тумана получается в 1000 раз меньше плотности воды). Маленькая капля воды начинает падать на землю с высоты 5 м, «впитывая» встреченные капельки. Считая, что капля сохраняет форму шарика, найдите ее диаметр перед падением на землю.

З.Рафаилов

Ф1961. На гладком горизонтальном столе лежит твердый кубик. На него налетает мягкий, довольно упругий кубик такой же массы, и между ними происходит лобовой удар. Скорость мягкого кубика после удара уменьшилась в 10 раз. Какая часть максимальной энергии деформации перешла в тепло при этом ударе? Считайте, что все тепло выделяется в мягком кубике при его деформировании.

А.Повторов

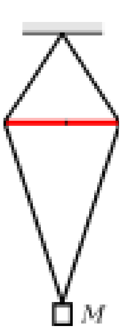

Рис. 2

Ф1962. На сложенных вместе двух нитях длиной L каждая подвешено тело массой M (рис.2). На расстоянии $L/3$ от верхнего конца между нитями вставили очень легкую горизонтальную распорку общей длиной d, состоящую из двух соединенных торцами половинок. Найдите силу, с которой одна половинка распорки действует на другую.

А.Зильберман

Ф1963. На pV-диаграмме изображен замкнутый процесс (рис.3). Кривая – это дуга окружности, прямая – вертикальна и соответствует охлаждению газа при постоянном объеме. Считая, что этот процесс проводят с порцией гелия, найдите КПД получившейся тепловой машины. Отношение максимального давления к минимальному в этом цикле равно 5, а минимальный объем составляет 0,9 от максимального.

З.Циклов

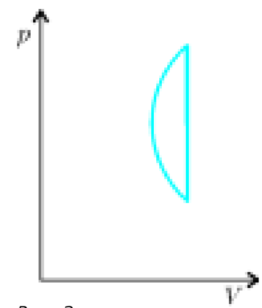

Рис. 3

Ф1964. Три большие проводящие пластины площадью $S = 2$ м^2 каждая расположены параллельно друг другу, расстояние между соседними пластинами $d = 1$ см. На одну из крайних пластин помещен заряд $Q = 1$ мкКл, на вторую, среднюю, пластину – заряд $2Q$, на третью пластину – заряд $-3Q$. Между первой и второй пластинами включают резистор сопротивлением $r = 100$ Ом. Одновременно с этим резистор сопротивлением $R = 100$ кОм включают между первой и третьей пластинами. Найдите количество теплоты, которое выделится в каждом из резисторов.

А.Повторов

Ф1965. К батарейке подключены три вольтметра, соединенные последовательно. Показания вольтметров составляют при этом 0,5 В, 1 В и 2 В (должно быть, разные попались вольтметры). Изменим соединение – включим теперь два вольтметра параллельно, к ним присоединим последовательно третий вольтметр, а к выводам всей цепи подключим батарейку. Оказалось, что один из вольтметров при таком переключении свои показания не изменил. А что показывают остальные два вольтметра? Напряжение батарейки считать неизменным.

Р.Александров

Ф1966. В экономичном современном фонарике (вместо лампочки там используется очень яркий светодиод) применяют накопитель энергии – конденсатор большой емкости 0,1 Ф (это не шутка, такие конденсаторы выпускают уже больше 30 лет, в последние годы они сильно подешевели). А «накачивают» его энергией, встряхивая фонарик – при этом цилиндрический магнит длиной 2 см и диаметром 1 см проскакивает то в одну, то в другую сторону через катушку, содержащую 1000 витков и намотанную в 10 слоев на длине 2 см. Длина трубки, в которой движется магнит, равна 7 см, на концах трубки сделаны эластичные упоры – магнит при ударе о такой упор останавливается. Считая магнитную индукцию поля у торца магнита равной 0,2 Тл, оцените время, за которое можно зарядить конденсатор до напряжения 3 В.

Чтобы конденсатор не разряжался через катушку, его подключают через диод.

С.Фонарев

Ф1967. К звуковому генератору подключают последовательно соединенные конденсатор емкостью $C = 1$ мкФ и катушку индуктивностью $L = 1$ Гн. Частоту генератора меняют, измеряя при этом напряжение на катушке вольтметром, имеющим сопротивление $R = 20$ кОм. На какой частоте показания вольтметра будут наибольшими? Найдите максимальное напряжение, которое покажет вольтметр. Напряжение генератора все время равно $U = 1$ В (эффективное значение). А что будет, если вольтметр переключить и измерять напряжение на конденсаторе? Катушку и конденсатор считать идеальными, сопротивлением проводов и внутренним сопротивлением генератора пренебречь.

З.Рафаилов

Решения задач М1931–М1935, Ф1943–Ф1952

М1931. *Каждая целочисленная точка плоскости окрашена в один из трех цветов, причем все три цвета присутствуют. Докажите, что найдется прямоугольный треугольник с вершинами трех разных цветов.*

Назовем целочисленную точку узлом. Если на каждой вертикальной прямой все узлы одного цвета, то выберем любой узел – пусть он цвета 1. Проведем через него две перпендикулярные прямые, идущие под углом 45° к вертикали, и выберем на этих прямых точки цветов 2 и 3 (это возможно, поскольку существуют вертикали этих цветов). Полученный треугольник будет искомым.

Аналогично, если все горизонтали одного цвета.

Пусть есть вертикаль v, на которой присутствуют ровно два цвета, скажем 1 и 2. Тогда выберем любой узел C цвета 3, узел A на v, находящийся с C на одной горизонтали, пусть узел A цвета 1, и узел B цвета 2 на v.

Если же есть вертикаль v, на которой встречаются все три цвета, то выберем горизонталь h, на которой не все точки одного цвета. Пусть точка A их пересечения имеет цвет 1, тогда выберем на h точку B цвета, отличного от 1, скажем второго, а на v – точку C третьего цвета.

С.Берлов

М1932. *Последовательность неотрицательных рациональных чисел $a_1, a_2, a_3, \ldots$ удовлетворяет соотношению $a_m + a_n = a_{mn}$ при любых натуральных m, n. Докажите, что не все ее члены различны.*

Предположим противное. Полагая $m = n = 1$, получаем $a_1 + a_1 = a_1$, т.е. $a_1 = 0$. Поэтому все остальные члены ненулевые. Пусть $a_2 = p/q$, $a_3 = r/s$. Заметим, что из условия $a_{m^k} = ka_m$; поэтому $a_{2^{qr}} = qr \cdot p/q = pr = ps \cdot r/s = a_{3^{ps}}$, но $2^{qr} \neq 3^{ps}$. Противоречие.

А.Протопопов

М1933. *В стране несколько городов, некоторые пары городов соединены двусторонними беспосадочными авиалиниями, принадлежащими k авиакомпаниям. Известно, что любые две линии одной авиакомпании имеют общий конец. Докажите, что все города можно разбить на $k + 2$ группы так, что никакие два города из одной группы не соединены авиалинией.*

Индукция по k. Если $k = 0$, утверждение тривиально: авиалиний нет.

Рассмотрим граф, вершины которого соответствуют городам, а ребра – авиалиниям. Пусть $E_1, E_2, \ldots, E_k$ – группы ребер, соответствующие авиалиниям первой, второй, ..., k-й авиакомпаний. Нетрудно понять, что для любого $i \in \{1, \ldots, k\}$ группа E_i – либо треугольник, либо «еж» – несколько ребер с одним концом. Если какая-то группа E_i – еж с центром в вершине A, то удалим A и все выходящие из нее ребра. В оставшемся графе ребра принадлежат $k - 1$ авиакомпании, его вершины мы разобьем на $k + 1$ группу так, чтобы вершины из одной группы не были соединены ребром, а вершина A составит $(k + 2)$-ю группу.

Остается рассмотреть случай, когда все группы $E_1, \ldots, E_k$ – треугольники. Тогда всего в графе $3k$ ребер. Разобьем вершины графа на минимальное возможное количество групп так, что никакие две вершины одной группы не смежны (т.е. не соединены ребром). Пусть это группы $B_1, \ldots, B_n$, причем $n \geq k + 3$. Отметим, что для любых двух групп B_i и B_j существует ребро между вершиной из B_i и вершиной из B_j, иначе можно объединить эти две группы в одну. Таким образом, всего в графе хотя бы $\frac{n(n-1)}{2}$ ребер. Отметим, что $\frac{n(n-1)}{2} \geq \frac{(k+3)(k+2)}{2} > 3k$ – противоречие, завершающее решение задачи.

В.Дольников

М1934. *Даны четыре последовательных натуральных члена арифметической прогрессии с ненулевой разностью. Эти четыре числа взаимно просты в совокупности. Не все они квадраты, однако произведение их – квадрат. Докажите, что это произведение делится на 2520^2.*

Пусть a, $a + d$, $a + 2d$, $a + 3d$ – прогрессия задачи. Из условия следует, что $(a, d) = 1$. Значит, если $b = (a + kd, a + ld) > 1$, где $0 \leq k < l \leq 3$, то либо $k = 0$, $b = l = 3$, либо $k = 0$, $b = l = 2$, либо $k = 1$, $l = 3$, $b = l - k = 2$. Поэтому достаточно рассмотреть прогрессии следующих трех видов.

1) $3x^2, y^2, z^2, 3t^2$, где, поскольку $(a, d) = 1$, y и z не делятся на 3. Имеем $3x^2 + z^2 = 2y^2$, откуда $1 \equiv 2 \pmod 3$.

2) $2x^2, y^2, 2z^2, t^2$, где y и t нечетны. Имеем $y^2 + t^2 = 4z^2$, откуда $2 \equiv 0 \pmod 4$.

3) $6x^2, y^2, 2z^2, 3t^2$. Имеем $3x^2 + z^2 = y^2$, $y^2 + 3t^2 = 4z^2$, откуда

$$x^2 + t^2 = z^2.$$

Пусть (x, t, z) – тройка натуральных чисел, удовлетворяющая последнему равенству. Докажем, что $xtz \vdots 60$.