Глава 11 **ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИИ**

Алгоритмы

А-1 *Функция*

1. Является ли зависимость $y(x)$ функцией на множестве R?

1) $3x - 7y = 5$
2) $2x^2 + y^2 = (y + 2)^2$
3) $x^2 + y^2 + x + y = 0$
4) $xy = y + 1$
5) $2y + y^2 = x + (y + 1)^2$
6) $y + (x + 1)^2 = 3 + 2x + x^2$

2. Дана функция $y = f(x)$, где $f(x) = x^2 + x$. Задайте формулой новую функцию.

1) $y = f(-x)$
2) $y = f(2x)$
3) $y = f(x + 1)$
4) $y = f\left(\frac{1}{x}\right)$
5) $y = f(x^2)$
6) $y = 2f(x)$
7) $y = 2f(3x)$
8) $y = 3f(1 - x)$
9) $y = \frac{f(x) + f(-x)}{2}$

3. Из уравнения, связывающего различные переменные, выразите указанные переменные как функции от других. Значения всех переменных и констант считать положительными.

1) $\frac{xy}{z^2} = k$. Выразите x, y и z.
2) $\frac{mv^2}{2} = mgh = C$. Выразите m, g и v.
3) $Fr^2 = GMm$. Выразите F, M и r.
4) $\frac{U}{R_1} + \frac{U}{R_2} = \frac{U_0}{R}$. Выразите U, R и R_1.
5) $(p + \frac{a}{V^2})(V - b) = RT$. Выразите R и p.

А-2 *Схема исследования функции*

Линейная функция

1. Проведите полное исследование линейной функции.

1) $y = 2x - 5$
2) $y = 2 - 3x$
3) $y = 3\,(x - 2) - 4\,(x + 1)$

2. Найдите наибольшее и наименьшее значения линейной функции, заданной на промежутке.

1) $y = 3x + 1$, $x \in [-1; 2]$

2) $y = 5 - 4x$, $x \in [-2; 0]$

3) $y = 3 - 7x$, $x \geq 0$

4) $y = x + 2$, $x \in [-6; 2)$

5) $y = 7 - x$, $x \in (-1; 1)$

3. Линейная функция, заданная на всей числовой оси.

Для линейной функции определите:

– характер ее монотонности;

– где она обращается в нуль;

– промежутки постоянного знака.

Постройте график функции.

1) $y = 3x + 4$

2) $y = 5 - 2x$

3) $y = -\dfrac{x}{2} + 2$

4) $y = 6x + 5$

4. Линейная функция, заданная на промежутке.

Для линейной функции, заданной на указанном промежутке, определите в дополнение к трем пунктам исследования, указанным в предыдущем задании:

– достигает ли функция наибольшего и наименьшего значений, в каких точках и чему эти значения равны;

– область значений функции.

1) $y = 5x - 3$, $x \in [1; 2]$,

2) $y = \dfrac{2}{3}x + 1$, $x \in [-1; 1]$,

3) $y = 2{,}5 - 0{,}5x$, $x \in [-2; 4]$

4) $y = -4x - 7$, $x \in [-2; 0]$

5. Линейная функция с буквенными коэффициентами.

Исследуйте в зависимости от параметра a поведение линейной функции, определив

– характер монотонности;

– обращение в нуль;

– промежутки постоянного знака.

1) $y = -3x + a$

2) $y = (a - 1)\, x - 2$

3) $y = (3 - a)\, x + a^2$

4) $y = (a^2 - 4)\, x + a - 2$

6. Кусочно-линейная функция.

Для следующих кусочно-линейных функций, заданных выражениями с модулями,

– «освободитесь от модуля», то есть разбейте числовую ось на промежутки, где функция будет иметь стандартный вид $y = kx + b$,

– найдите нули функции,

– определите ее промежутки монотонности и промежутки постоянного знака,

– постройте график.

1) $y = 2\,|x - 1| - 3x$

2) $y = |3x + 2| - |2x - 3|$

3) $y = |3 - x| + x + 5$

4) $y = |x + 1| - 2\,|x - 2| + 3x$

Квадратичная функция

7. Квадратичная функция, заданная на всей числовой оси.

Проведите полное исследование квадратичной функции и постройте ее график.

1) $y = x^2 + 2x - 5$

2) $y = 4x - x^2$

3) $y = 2x^2 + x - 3$

4) $y = 2x^2 - 4x + 3$

5) $y = -\dfrac{x^2}{2} + x - \dfrac{1}{2}$

6) $y = 3 - x - x^2$

8. Квадратичная функция, заданная на промежутке.

Для квадратичной функции, заданной на указанном промежутке, определите

– нули функции,

– точки, в которых она принимает наименьшее и наибольшее значения,

– область значений.

1) $y = 2x^2 - x,\ -1 \le x \le \dfrac{1}{3}$

2) $y = -2x^2 + 4x - 7,\ x \le 2$

3) $y = -x^2 + 3x - 2,\ x \in [0; 4]$

4) $y = 4x^2 + 5x + 2,\ x \in [0; 1]$

5) $y = \dfrac{x^2}{2} - 3x + 4,\ x \ge 1$

6) $y = -\dfrac{x^2}{3} - 2x + 2,\ x \in [-8; 1]$

9. Квадратичная функция с буквенными коэффициентами.

Исследуйте в зависимости от параметра a поведение квадратичной функции, определив:

– нули функции,

– промежутки постоянного знака,

– промежутки монотонности,

– область значений E.

1) $y = x^2 + 2x + a$

2) $y = -x^2 + 2ax - 1$

3) $y = ax^2 + 2x - 1$

4) $y = x^2 - 2(a + 1)x + 4a$

10. Квадратичная функция под знаком модуля.

Для данной функции:

– освободитесь в ее записи от модуля,

– постройте ее график и исследуйте функцию по общей схеме исследования.

1) $y = |x^2 + 2x| - 2x^2$

2) $y = |x^2 + x - 2| + 2$

3) $y = -|x^2 - 4| + 4x - 1$

4) $y = |x^2 - 1| - |x| - 1$

А-3 *Решение линейных неравенств*

1. Решите неравенство.

1) $3x + 8 \le 2x - 4$

2) $x\,(x + 3) \le (x + 1)^2$

3) $(x - 1)\,(2x + 1) \ge (2x - 3)\,(x + 2)$

4) $\dfrac{1}{x-5} > 0$

5) $\dfrac{3}{2-x} \le 0$

6) $|x| + 3x - 1 < 0$

7) $|2x + 1| < 3$

8) $|x - 1| > |3x - 2|$

9) $|x + 2| + |2x - 1| \le 5$

10) $|3x + 2| \le \dfrac{x}{2}$

2. Решите системы неравенств.

1) $\begin{cases} \dfrac{1}{2} - \dfrac{1-3x}{4} \le \dfrac{3x-1}{5} \\ \dfrac{3x+7}{2} \ge x \end{cases}$

2) $\begin{cases} 2 - \dfrac{2-x}{2} < 4 - \dfrac{3+2x}{3} \\ 1 - \dfrac{2x-1}{4} > 0 \end{cases}$

3) $\begin{cases} \dfrac{3x-4}{2} < \dfrac{x-3}{3} \\ \dfrac{2}{x+1} > 0 \\ \dfrac{x}{2} > -1 \end{cases}$

4) $\begin{cases} \dfrac{1+2x}{2} \le \dfrac{5x}{4} \\ \dfrac{-1}{x-3} > 0 \\ \dfrac{x-4}{2} \le 0 \end{cases}$

5) $\begin{cases} x - \dfrac{3-x}{4} > \dfrac{2x}{3} \\ (x-2)(x+2) < (x+2)^2 \end{cases}$

6) $\begin{cases} 5x - \dfrac{3+x}{5} \le \dfrac{9x+2}{2} \\ (2x-1)^2 \ge (2x-1)(2x+1) \end{cases}$

3. Решите неравенство на промежутке.

1) Найдите положительные значения x, при которых сумма дробей $\frac{1-8x}{3}$ и $\frac{12x-5}{4}$ больше 8. Укажите наименьшее целое число, при котором выполняется это условие.

2) Найдите все целые решения неравенства $x + \frac{2-5x}{12} > \frac{3+x}{4} - \frac{3-x}{3}$, принадлежащие промежутку [–2; 4].

3) При каких целых отрицательных значениях x верно неравенство $\frac{4x+11}{5} - \frac{5+2x}{4} \geq \frac{6-7x}{20} - 1$?

4) Найдите все отрицательные значения x, при которых дробь $\frac{2x^2-9x-8}{2}$ не больше дроби $\frac{(x-3)(3x-1)}{3}$.

А-4 *Решение квадратных неравенств*

1. Решите неравенство.

1) $x^2 + x \geq 0$

2) $6 - x - x^2 < 0$

3) $x^2 - 8x + 7 \leq 0$

4) $-x^2 + 3x + 4 > 0$

5) $2x^2 - x + 3 \leq 0$

6) $x - 3x^2 - 1 > 0$

7) $x^2 - 6x + 10 \geq 0$

8) $-3x^2 + 5x - 3 < 0$

9) $9x^2 + 6x + 1 > 0$

10) $x^2 - x + \frac{1}{4} \leq 0$

11) $-5x^2 + 20x - 4 \leq 0$

12) $\frac{x^2}{9} + \frac{x}{9} + \frac{1}{4} \leq 0$

13) $x^2 - 2x - 1 < 0$

14) $2 - 5x - x^2 \geq 0$

15) $x^2 - x - 3 > 0$

16) $2x^2 + 4x - 1 \leq 0$

17) $(x - 1)(x + 5) \geq 0$

18) $(3x - 2)(1 - 2x) < 0$

19) $(2x - 3)^2 - (x + 5)^2 \geq 0$

20) $x^2 + (x + 1)^2 + (x + 2)^2 \geq 1$

21) $x^4 - 10x^2 + 9 \leq 0$

22) $x^4 - 2x^2 - 8 > 0$

23) $x^4 + 5x^2 + 6 < 0$

2. Решите систему неравенств.

1) $\begin{cases} x^2+2x-8<0 \\ 2x+3\ge 0 \end{cases}$

2) $\begin{cases} 2x^2+3x-5>0 \\ x^2\le 4 \end{cases}$

3) $\begin{cases} 6-x-x^2\le 0 \\ x^2+3x-10\le 0 \end{cases}$

4) $\begin{cases} x^2+2x+1<0 \\ x^2+x+1\ge 0 \end{cases}$

5) $\begin{cases} x^2+6x\ge 0 \\ x^2+3x-10\le 0 \end{cases}$

6) $\begin{cases} x^2+2x-5>0 \\ |x-1|\le 1 \end{cases}$

7) $\begin{cases} x^2+(x-1)^2\le 13 \\ x^2-6x+10\ge 0 \end{cases}$

8) $\begin{cases} 2x^2+5x-10<0 \\ 3x^2-7x+5>0 \end{cases}$

3. Дана функция $y = ax^2 + 2x + 1$.

При каких значениях параметра a

1) неравенство $y < 0$ не имеет решений;

2) решением неравенства $y < 0$ будет один конечный промежуток;

3) неравенство $y < 0$ будет выполняться при всех x;

4) решением неравенства $y < 0$ будет объединение двух бесконечных промежутков?

4. Решите неравенство с параметром. В ответе должны быть перечислены все значения параметра.

1) $x^2 - 2x + a < 0$

2) $a^2x^2 - 2ax - 1 < 0$

3) $x^2 + 2(a + 2)x + 4a + 4 > 0$

4) $ax^2 - 2x + 2 - a \ge 0$

5. Решите неравенство с модулем.

1) $|x^2 + 3x| \ge 2 - x^2$

2) $|2x^2 - 7x + 5| \le 4 - 10x$

3) $|4x^2 + 5x + 1| < 3 - 2x$

4) $|2x^2 - 3x + 1| \ge |3x + 1|$

А-5 *Решение рациональных неравенств*

1. Решите неравенство.

1) $(x - 2)(x + 3) > 0$

2) $x^2 - 5x + 6 > 0$

3) $(2x - 3)(x + 1)(5 - x) > 0$

4) $(x + 2)^2 \cdot (x - 3)(x + 6) < 0$

5) $(x + 5)^2 \cdot (2 - x)^3 \ge 0$

6) $(x + 8)^2 \cdot (10 - x)^3 > 0$

7) $x\left(x^2-1\right)<0$

8) $\dfrac{3}{(x+1)(x-2)(x-3)}\ge 0$

9) $\dfrac{x-4}{x+5}\ge 0$

10) $\dfrac{(x+5)^3\cdot(x-4)^4}{(7-x)^5}\le 0$

11) $\dfrac{x^2+2x-3}{x+7}<0$

12) $\dfrac{x^2-4x-5}{x^2+3x+2}\le 0$

13) $\dfrac{x^2-2}{x\sqrt{3-x^2}}\le 0$

14) $(x+1)^3\cdot(x^2-5x+6)^2>0$

15) $(x^2-1)^3\cdot(x^2-x-2)^5\le 0$

16) $\dfrac{(x-5)^2\cdot(x^2-3x-10)^3}{(x^2+2x-15)\cdot(x^2-2x-3)}\ge 0$

17) $\dfrac{(x^2+x-6)^2\cdot(x^2+2x-8)^3}{(x^2+7x+12)^5}\le 0$

2. Решите неравенство.

1) $\dfrac{1}{x}\le 2$

2) $\dfrac{1}{x+1}>\dfrac{1}{3}$

3) $\dfrac{x+3}{2x-1}\le 1$

4) $\dfrac{2}{x^2+x}\ge 1$

5) $\dfrac{x+2}{4-x}<\dfrac{x+4}{3}$

6) $\dfrac{2x+3}{3x+2}\ge\dfrac{4x+1}{x+4}$

7) $\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{2}{x+1}\le\dfrac{3}{x}$

8) $\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x-3}+\dfrac{1}{4(x-2)}\ge 0$

9) $\dfrac{5x-24}{x+1}+\dfrac{6x-5}{x+4}\le 11$

10) $\dfrac{x-1}{x+4}\ge\dfrac{x+5}{x-6}$

11) $\dfrac{5-x}{2x+5}\ge\dfrac{2x+4}{1-4x}$

12) $\dfrac{x}{2-x}-1<\dfrac{1-x}{2x+3}$

13) $(1-x)(2x+3)\ge(x-2)(2x+3)$

3. Решите систему неравенств.

1) $\begin{cases}\dfrac{x-2}{x+1}>0\\ x^2-2x-15<0\end{cases}$

2) $\begin{cases}x^3-8\le 0\\ \dfrac{x^2-x-6}{x}>0\end{cases}$

3) $\begin{cases}\dfrac{1}{(x-2)(2x+3)}\le -\dfrac{1}{3}\\ \dfrac{x}{x+1}\ge -1\end{cases}$

4) $\begin{cases}\dfrac{x-3}{x^2+1}\le -1\\ |x|\ge\dfrac{1}{2}\end{cases}$

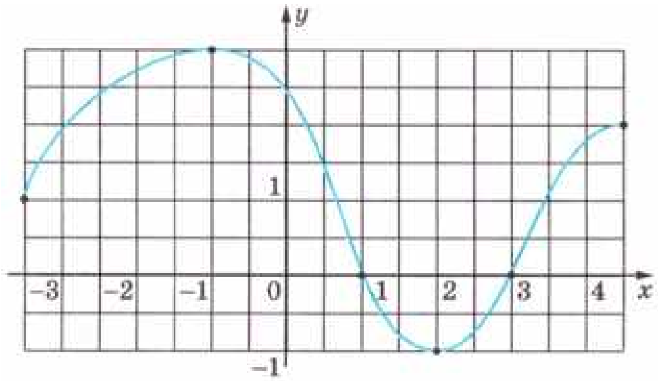
Соответствия

С-1 Чтение графика
С-2 Преобразования и симметрия графика
С-3 Гипербола
С-4 Графическое решение уравнений
С-5 Графическое решение неравенств

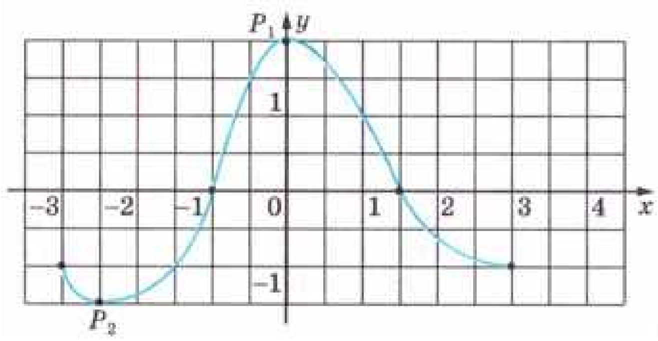
С-1 *Чтение графика*

1. Исследуйте функцию по графику.

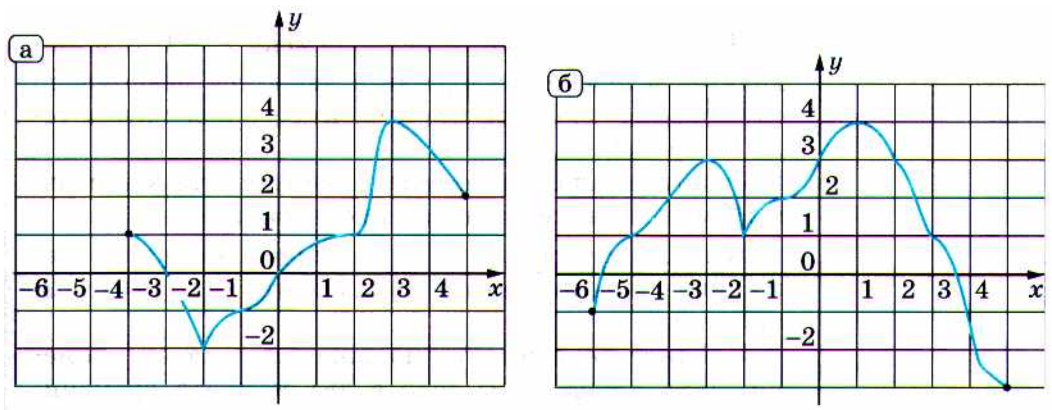
1)



2)



2. Дан график функции *f*. Определите по графику:



1) Область определения функции

2) Множество значений

3) Промежутки возрастания и убывания

4) Наибольшее и наименьшее значения

5) Какие значения функция принимает ровно один раз?

6) Количество корней уравнения $f(x) = a$ в зависимости от a.

7) Решения неравенства $f(x) \leq 1$.

3. Про функцию $y = f(x)$ известно следующее.

1) Она определена на промежутке $[-3; 3]$.

2) Она обращается в нуль при $x = -1$ и при $x = 1$.

3) Точка максимума функции: $P_1(0; 2)$ и точка минимума: $P_2(-2; -1{,}5)$.

4) На концах промежутка, то есть в точках $x = -3$ и $x = 3$ она принимает значение $y = -1$.

Нарисуйте эскиз графика функции.

4. На рисунке изображены графики шести рациональных функций. Найдите их в списке.

1) $y = \dfrac{x}{x-3}$

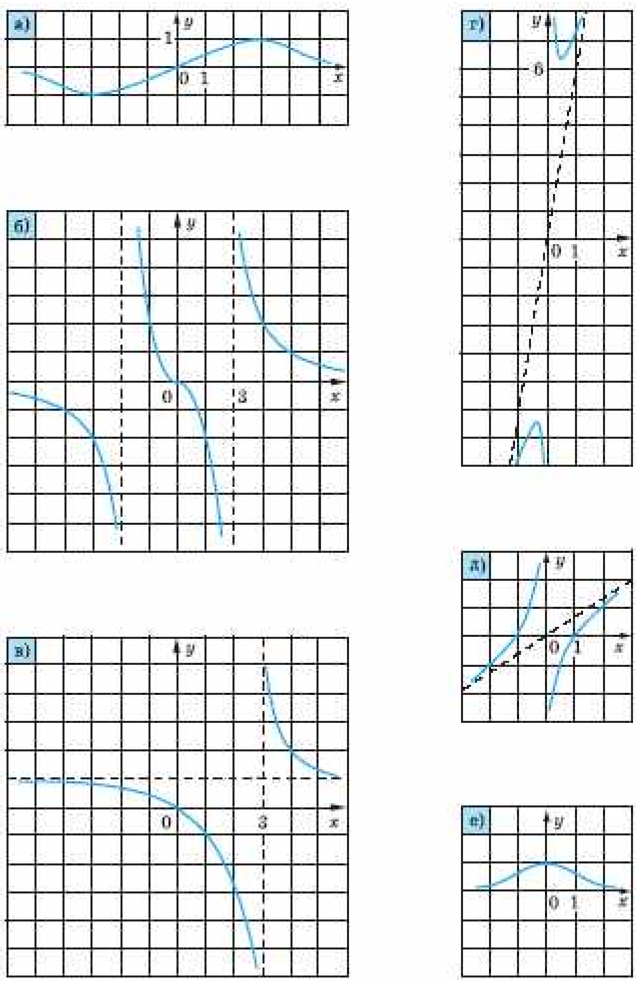
2) $y = \dfrac{6x}{x^2+9}$

3) $y = \dfrac{6(x^2+1)}{x}$

4) $y = \dfrac{3}{x^2+3}$

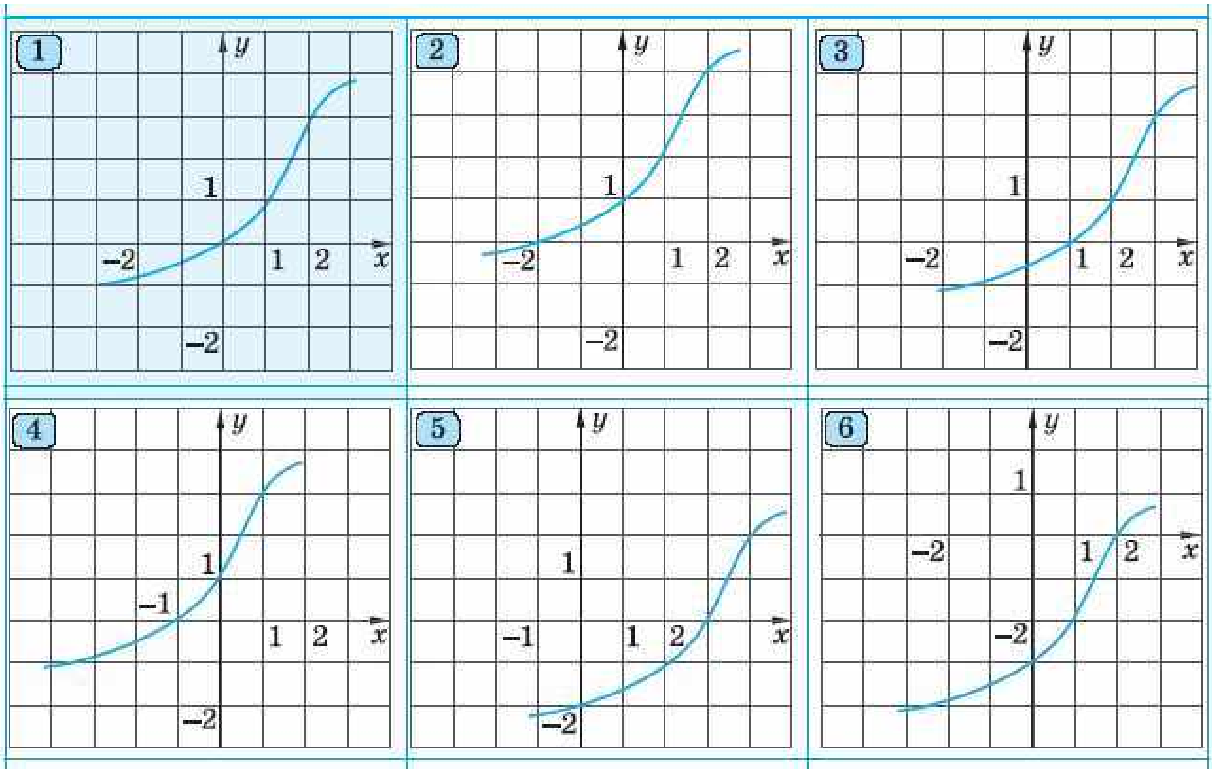
5) $y = \dfrac{2(x^2-1)}{3x}$

6) $y = \dfrac{1}{x+2} + \dfrac{1}{x-2}$



С-2 *Преобразования и симметрия графика*

1. А. На рисунке 1 изображен график функции $y = f(x)$. Запишите формулы, с помощью которых можно задать остальные графики.



Б. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$. Начертите графики преобразованных функций.

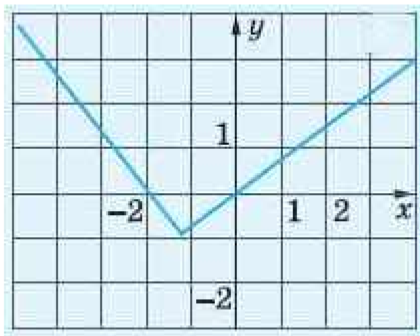
1) $y = f(x) - 2$

2) $y = f(x + 2)$

3) $y = f(x) + 1$

4) $y = f(x - 1)$

5) $y = f(x + 1) - 1$



2. А. Дан график функции $y = f(x)$ (рис. 1). Постройте графики преобразованных функций.

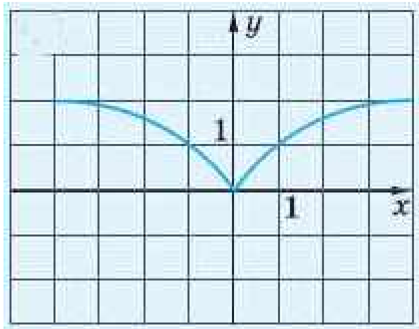
1) $y = -f(x)$

2) $y = f(-x)$

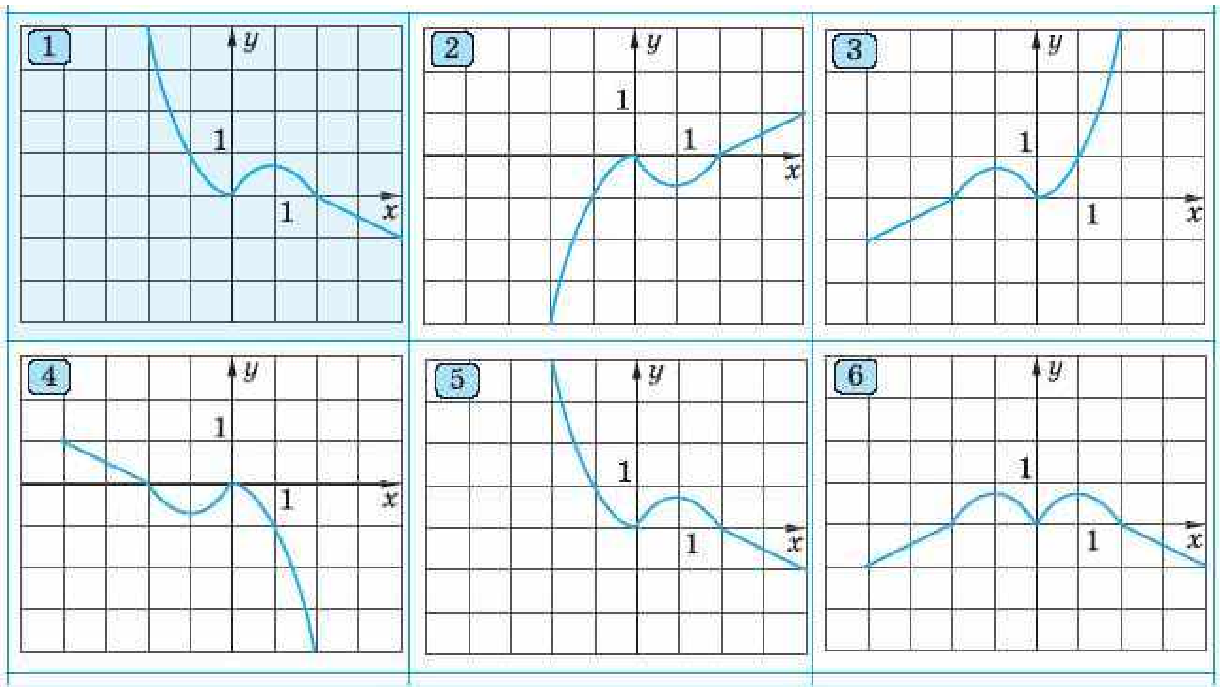
3) $y = -f(-x)$

4) $y = |f(x)|$

5) $y = f(|x|)$



Б. На рисунке 1 изображен график функции $y = f(x)$. Запишите формулы, с помощью которых можно задать остальные графики.



3. А. Дан график функции $y = f(x)$. Постройте графики преобразованных функций.

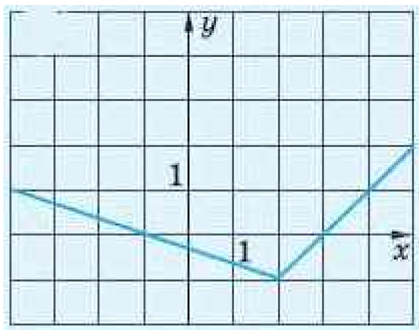
1) $y = 2f(x)$

2) $y = f(2x)$

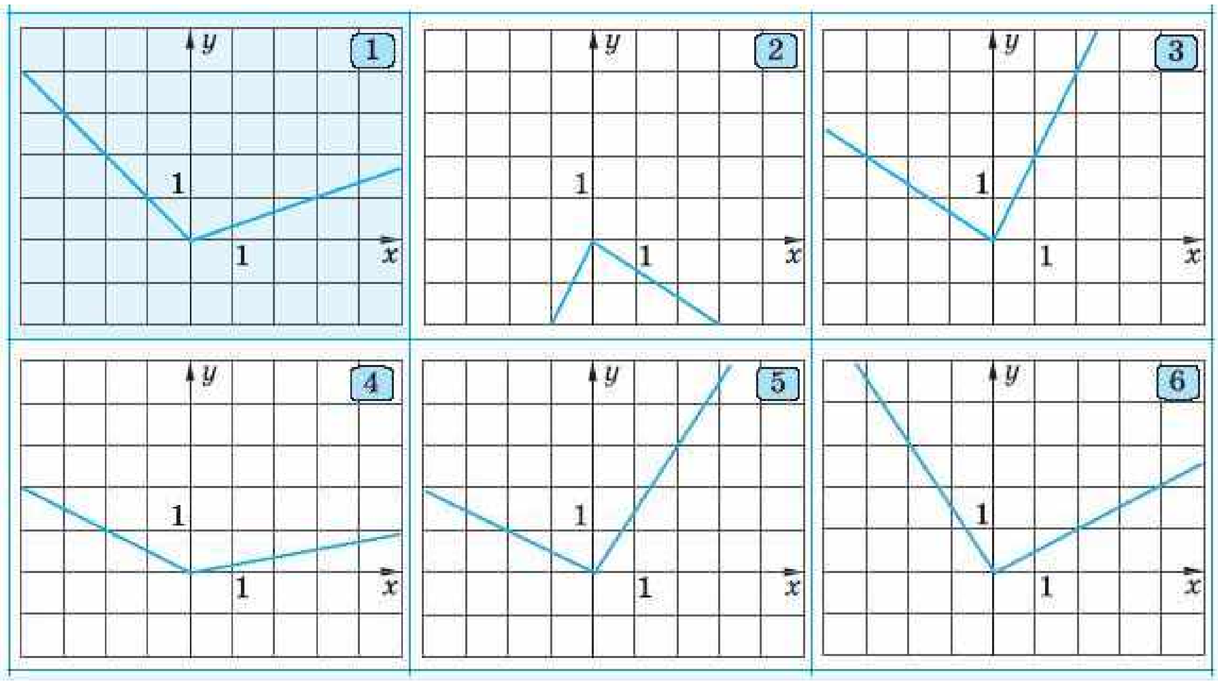
3) $y = \frac{1}{2}f(2x)$

4) $y = -\frac{3}{2}f(x)$

5) $y = f\left(-\frac{x}{2}\right)$



Б. На рисунке 1 изображен график функции $y = f(x)$. Запишите формулы, с помощью которых можно задать остальные графики.



4. Постройте графики квадратичной функции, приведя формулу функции к виду $y = a(x - x_0)^2 + y_0$, и укажите ее наибольшее (наименьшее) значение.

1) $y = x^2 + 2x + 3$

2) $y = x^2 - 6x + 10$

3) $y = 2x^2 - 4x - 4$

4) $y = 3x^2 - 6x - 6$

5) $y = x^2 - 5x + 1$

6) $y = x^2 + 2x$

7) $y = -x^2 + 4x$

8) $y = -x^2 - 5x + 1$

9) $y = -2x^2 + 9x - 4$

5. А. Четные и нечетные функции.

Исследуйте функции на четность.

1) $y = \dfrac{1}{|x|}$

2) $y = x^2 + 1$

3) $y = \dfrac{x}{x^2 - 1}$

4) $y = x^2 + x$

5) $y = x^3 + x$

6) $y = \dfrac{x^2 + 1}{x^3 - x}$

7) $y = \dfrac{x^3 + 1}{x^2 + 1}$

8) $y = x\,(x^3 + 2x)$

В. Осевая и центральная симметрия.

Среди данных функций выделите те, графики которых имеют вертикальную ось симметрии или центр симметрии.

9) $y = x^2 - 2x + 1$

10) $y = (x + 1)^4$

11) $y = (x - 1)^3 + 3x - 3$

12) $y = \dfrac{x-2}{x^2-4x+5}$

13) $y = |x + 3| - 1$

14) $y = \dfrac{1}{x^2+4x+7}$

15) $y = \dfrac{x}{x-1}$

16) $y = x^3 + 3x^2$

6. Дан график функции $y = f(x)$. Постройте графики следующих функций.

1) $y = f(x) + 1$

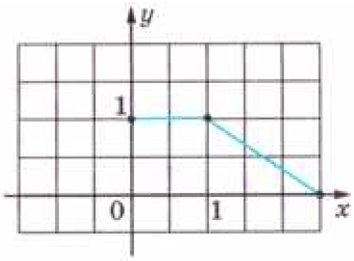
2) $y = f(x) - 2$

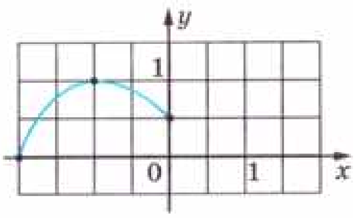
3) $y = -f(x)$

4) $y = f(-x)$

5) $y = f(x + 1)$

6) $y = f(x - 2)$





С-3 *Гипербола*

1. Постройте график дробно-линейной функции и исследуйте эту функцию с помощью графика.

1) $y = \dfrac{2}{x}$

2) $y = -\dfrac{3}{x}$

3) $y = \dfrac{2}{x+4}$

4) $y = \dfrac{-3}{x-2}$

5) $y = \dfrac{x+2}{x}$

6) $y = \dfrac{x+1}{x}$

7) $y = \dfrac{x}{x+4}$

8) $y = \dfrac{x}{x-3}$

x

9) $y = \dfrac{x+4}{x+1}$

10) $y = \dfrac{x-1}{x+1}$

11) $y = \dfrac{x+2}{x-3}$

12) $y = \dfrac{2x-3}{x+2}$

13) $y = \dfrac{3x-1}{x+1}$

14) $y = \dfrac{x+3}{2x-5}$

15) $y = \dfrac{-x}{x+1}$

16) $y = \dfrac{-2x+4}{x-1}$

С-4 *Графическое решение уравнений*

1. Определите, построив графики, сколько корней имеет уравнение.

1) $x^2+8x=\frac{1}{x}$

2) $4-x^2=\frac{-2}{x}$

3) $x^2-\frac{9}{4}=|x-2|$

4) $(x+1)^2=|x+2|$

5) $x+3-\frac{3}{x}=0$

6) $x+6+\frac{2}{x}=0$

7) $|x|-\left|\frac{1}{x}\right|-3=0$

8) $|x^2-4x|-\frac{1}{2}x=2$

2. Постройте график функции $y=f(x)$. По графику определите значения a, при которых уравнение $f(x)=a$ имеет корни с указанными условиями:

$y=-x^2-4x+5$

а) уравнение $f(x)=a$ имеет два корня, каждый из которых меньше нуля;

б) уравнение $f(x)=a$ имеет два корня, каждый из которых больше (–3);

в) уравнение $f(x)=a$ имеет два корня, один из которых больше (–1), а другой меньше (–3).

3. Найдите приближенно корни уравнения, построив соответствующий график.

1) $x^2=x+5$

2) $(x-1)^2=x$

3) $(x+1)^2=\frac{1}{x}$

4) $\frac{1}{x}=x-2$

5) $\frac{1}{x-1}=\frac{1}{2}x^2$

6) $(x-1)^2=4-x^2$

4. Не выполняя построений графиков, выясните, пересекаются ли:

1) прямая $y=4-x$ и парабола $y=x^2-6x+8$;

2) прямая $y=4-x$ и гипербола $y=\frac{3}{x}$;

3) параболы $y=-3x^2+x-3$ и $y=-x^2+x-5$.

Если пересекаются, то укажите координаты точек пересечения, а затем проиллюстрируйте свои решения графически.

5. Постройте график функции $y=x^2-4x+5$ и ответьте на вопросы о корнях уравнения $x^2-4x+5-a=0$.

1) При каких значениях a уравнение не имеет корней?

2) При каких значениях a уравнение имеет один корень?

3) При каких значениях *a* уравнение имеет два корня?

4) При каких значениях *a* уравнение имеет два корня разных знаков?

6. Определите с помощью графиков число корней уравнения

1) $\sqrt{x}=1-x$

2) $\sqrt{x+1}=|x|$

3) $\sqrt{x-1}=5x$

4) $x^{\frac{4}{3}}=x+2$

5) $\sqrt{x+3}=x^2$

6) $x+\sqrt{x+5}=0$

7) $(x+1)^{\frac{2}{3}}+3|x-1|=3$

8) $x^{\frac{5}{2}}-x^{\frac{1}{3}}=2$

9) $(x-2)^{\frac{1}{2}}+x=0$

10) $\sqrt{|x|}+2|x|=3$

С-5 *Графическое решение неравенств*

1. Решите графически рациональные неравенства.

1) $x^2>4$

2) $x^2\le 1$

3) $\dfrac{1}{x}\ge 1$

4) $\dfrac{-2}{x}<4$

5) $2x^2-8\le 0$

6) $-\dfrac{1}{2}x^2+4>0$

7) $\dfrac{1}{x}<x$

8) $x^2-9x\ge -18$

2. С помощью графиков решите иррациональные неравенства.

1) $\sqrt{x-2}\le 4$

2) $\sqrt{x+3}>1$

3) $\sqrt{x+6}\le x$

4) $\sqrt{x+4}\ge x-2$

5) $x<\sqrt{2-x}$

6) $x+1>\sqrt{x+2}$

7) $\sqrt{2x+3}\le\sqrt{x+5}$

8) $\sqrt{3x-2}>\sqrt{6-x}$

9) $\sqrt[3]{x-1}\le 2$

10) $\sqrt{x}\le 6-x$

11) $\sqrt{x+1}\ge 2x-13$

12) $1-\sqrt{x}>x-5$

13) $x^{\frac{2}{3}}>6-\dfrac{x}{4}$

14) $\sqrt{x}>|x-2|$

15) $x^{\frac{4}{3}}\le x^{\frac{1}{3}}+14$

Приложения

П-1 *Линейные и квадратичные зависимости в физике*

1. Равномерное движение

На прямолинейном шоссе расположено несколько населенных пунктов, между которыми курсирует такси. Между двумя пунктами такси движется с постоянной скоростью, которая определяется пассажиром и дорожными ограничениями скорости. Мы будем изучать различные характеристики движения. Для этого выберем на шоссе положительное направление движения, зафиксируем начальную точку O, выберем единицу масштаба, например, 10 км. Тем самым мы превратили шоссе в числовую ось, координаты точек которой (положение такси на шоссе) будем обозначать x. Если мы скажем, например, что такси находится в точке $x = -3$, то это означает, что оно находится от начальной точки на расстоянии 30 км в направлении, противоположном выбранному в качестве положительного. Аналогично введем ось времени t, выбрав единицей масштаба 1 ч и зафиксировав начало отсчета времени $t = 0$, считая, что такси в этот момент находится в начальной точке O. Заметьте, что мы будем рассматривать и отрицательные значения времени t как моменты, наступившие до выбранного начала отсчета. Единица измерения скорости v в выбранном масштабе длины и времени равна 10 км/ч. В дальнейшем все данные о положении точки (такси), времени и скорости будут указываться в выбранных единицах без указания их наименования. Теперь мы готовы ставить и решать различные задачи.

1) На шоссе указано три пункта $A_1(-4)$, $A_2(6)$ и $A_3(10)$. Пассажир взял такси в пункте A_3 в момент времени $t = 3$ и попросил доставить его в пункт A_1 за время $t = 2$. (Заметьте реальность постановки задачи – пассажир хочет проехать расстояние 140 км между пунктами A_1 и A_3 за два часа). Найдите функцию $x = x(t)$, задающую положение такси на шоссе на промежутке времени $3 \le t \le 5$. Функцию $x = x(t)$ мы будем называть законом движения.

2) Доставив первого пассажира в пункт A_1 и простояв там время $t = 1$, такси направилось в пункт A_2 со скоростью $v = 5$. В какой момент времени такси пришло в пункт A_2? Запишите закон движения такси от пункта A_1 до пункта A_2. Постройте на плоскости $(t; x)$ график общего движения от момента $t = 3$.

3) В какие моменты времени такси проезжало мимо начального пункта O?

4) Водитель такси выехал на работу из точки O в момент времени $t = 0$ и закончил работу, высадив второго пассажира в пункте A_2. Из пункта O в пункт A_3, где он посадил первого пассажира, он ехал пустой. Какова средняя оплата труда водителя за час рабочего времени, если пассажиры платят за проезд из расчета 10 рублей за километр пути (эксплуатационные расходы на бензин и пр. включаются в зарплату)?

5) Закон движения на всем промежутке времени от $t = 3$ до конца рабочего дня может быть задан одной формулой вида $x(t) = a\,|t - 5| + b\,|t - 6| + ct + d$, где «точки излома» $t = 5$ и $t = 6$ соответствуют моментам изменения скорости. Найдите коэффициенты a, b, c и d.

2. Равноускоренное движение

1) Тело подбросили вертикально вверх с начальной скоростью v_0 (м/с). На тело действует сила тяжести, доставляющая постоянное ускорение g (м/с^2) > 0. Обозначим через $h = h(t)$ высоту (в м), на которой находится тело в момент времени t.

а) Запишите линейную функцию, задающую изменение скорости v в зависимости от времени.

б) Запишите квадратичную функцию, задающую изменение высоты h в зависимости от времени. Постройте ее график.

в) Через какое время тело упадет на землю?

г) Какова максимальная высота, на которую поднимется тело?

д) На какой высоте скорость тела будет равна половине начальной скорости?

2) Из окна девятого этажа ($h = 31$ м) выпал мяч. Определите время падения и скорость мяча в момент приземления (сопротивление воздуха не учитывайте, $g \approx 9{,}8$ м/с^2).

3) Из ружья выстрелили вертикально вверх. Начальная скорость пули равна 50 м/с, $g \approx 9{,}8$ м/с^2.

а) На какую высоту поднимется пуля?

б) Сколько времени она будет в полете до падения на землю?

в) На какой высоте пуля будет через 2 с после выстрела?

П-2 *Задачи на максимум – минимум*

1. Найдите наименьшее и наибольшее значения функций, заданных при натуральных значениях аргумента n.

1) $y = 0,5 - 3,5n$

2) $y = -1 + 5n - n^2$

3) $y = 2n^2 - 7n + 1$

4) $y = \dfrac{100}{3n}$

5) $y = 2n + \dfrac{1}{3n}$

2. Найдите наименьшее и наибольшее целочисленное значение функции.

1) $y = 0,5 - 3,5x$, $x \in [-2; 3]$

2) $y = -x^2 + 5x - 1$

3) $y = 2x^2 - 7x + 1$

4) $y = \dfrac{100}{3x}$, $x \in [1; 100]$

5) $y = 2x + \dfrac{1}{3x}$, $x > 0$

3. Длина спички 3 см. Какого размера прямоугольник площади 180 см^2 можно выложить такими спичками, не ломая их, так чтобы общее число затраченных спичек было наименьшим?

4. В поезд село 90 пассажиров. На каждой остановке в поезд входит 5 человек. На первой остановке выходит один человек, а на каждой следующей – на одного человека больше, чем на предыдущей.

1) На какой остановке число пассажиров в поезде будет наибольшим?

2) На какой остановке в поезде не останется пассажиров?

5. Геометрические задачи на экстремум

1) Забором длины 60 м надо отделить от стены прямоугольный участок наибольшей площади. Как это сделать?

2) В треугольник ABC вписан прямоугольник так, что одна его сторона лежит на стороне AC. Найдите наибольшую площадь этого прямоугольника, если известно, что длина AC равна 20, а длина высоты, опущенной на сторону AC равна 10.

3) На основании AB треугольника ABC взята точка P. Прямая l, параллельная основанию, пересекает боковые стороны треугольника в точках D и E. Как надо провести прямую l, чтобы площадь треугольника PDE была наибольшей?

4) Окно имеет форму прямоугольника, завершенного полукругом. Периметр фигуры равен a. Какими должны быть размеры окна, чтобы оно пропускало как можно больше света?

5) Какую наибольшую площадь может иметь равнобедренный треугольник, вписанный в круг радиуса R?

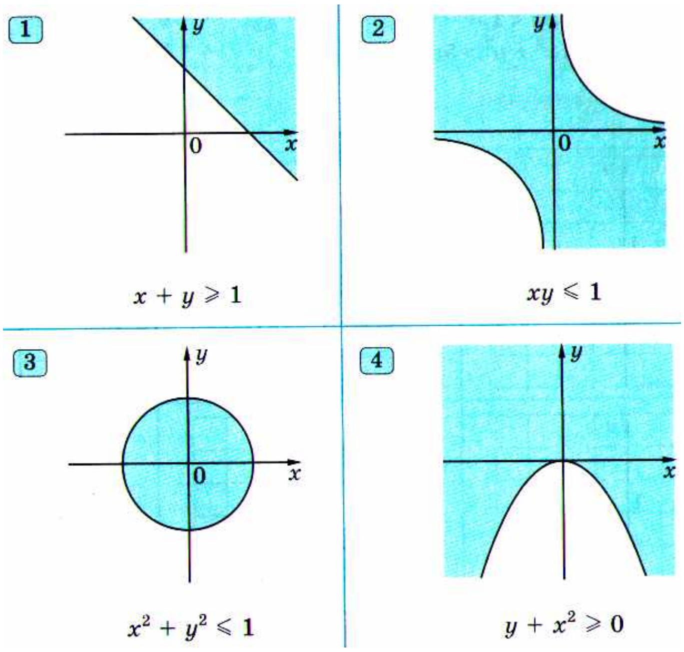
6. Через точку $M(1; 1)$ проводятся всевозможные прямые с отрицательным угловым коэффициентом, пересекающие оси координат в точках A и B. Какое наименьшее значение может принимать сумма расстояний от начала координат до точек A и B?

7. Решите задачу, аналогичную предыдущей, при условии, что точка M имеет координаты $(-2; 1)$ и прямые, через нее проходящие, имеют положительные угловые коэффициенты.

8. Найдите наименьшее расстояние от точки $P(0; 2)$ до точек параболы $y = x^2$.

П-3 *Геометрическое изображение неравенств*

График зависимости вида $F(x, y) = 0$, где $F(x, y)$ – некоторое выражение с переменными x и y, разбивает плоскость на области, в которых выражение F имеет постоянный знак. Это позволяет изобразить на плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют неравенству вида $F(x, y) > 0$ (вместо знака $>$ может, разумеется, стоять любой другой знак неравенства). На рисунках показаны примеры геометрического изображения некоторых неравенств.



Изобразите на плоскости множества точек, координаты которых удовлетворяют неравенству (системам неравенств).

1) $2x - 3y > 2$

2) $x^2 + y^2 > 4$

3) $y - 1 < x^2$

4) $xy + 2 < 0$

5) $x + y^2 > 1$

6) $x^2 + y^2 < 2\,(x + y)$

7) $\begin{cases} x^2 + y^2 < 9 \\ |\,x\,| < 2 \end{cases}$

8) $\begin{cases} y > x \\ x + 3y < 3 \end{cases}$

9) $\begin{cases} xy < 1 \\ x^2 + y^2 > 5 \end{cases}$

10) $\begin{cases} y > x^2 - 1 \\ y < 1 - x^2 \end{cases}$

11) $(x - 1)(y + 2) > 0$

12) $(x - y)(x^2 + y^2 - 1) < 0$

13) $\begin{cases} xy > 0 \\ x^2 < 2 - y \end{cases}$

14) $\begin{cases} |\,x + 1\,| \le 2 \\ |\,x - y\,| \le 2 \end{cases}$

15) $\begin{cases} x \le y^2 + 2 \\ x + y^2 \le 4 \end{cases}$

Исследования и доказательства

И-1 *Кусочно-линейная функция*

1) Постройте последовательно графики следующих функций:

а) $y = |x + 1|$

б) $y = |x + 1| + |x|$

в) $y = |x + 1| + |x| + |x - 2|$

г) $y = |x + 1| + |x| + |x - 2| + |x - 3|$

2) Графики построенных функций являются ломаными. Их крайние (бесконечные) звенья симметричны относительно некоторой оси. Найдите эти оси для каждого из графиков.

3) Чем отличаются друг от друга ломаные – графики функций, имеющие четное и нечетное число звеньев?

4) В каких точках функции принимают наименьшее значение? Вычислите эти значения.

5) Рассмотрим аналогичную функцию с нечетным числом угловых точек графика (вершин ломаной), например,

$y = |x - a_1| + |x - a_2| + |x - a_3| + |x - a_4| + |x - a_5|$, $(a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5)$.

а) В какой точке функция принимает наименьшее значение?

б) Чему равно наименьшее значение функции?

в) Относительно какой оси симметричны крайние звенья графика?

6) Рассмотрим функцию с четным числом угловых точек, например,

$y = |x - a_1| + \ldots + |x - a_6|$, $a_1 < a_2 < \ldots < a_6$.

а) На каком промежутке функция постоянна?

б) Чему равно наименьшее значение функции?

в) Относительно какой оси симметричны крайние звенья графика?

7) Предложите обобщение решенных задач.

И-2 *Гипербола*

Пусть точки $A_1(x_1; y_1)$ и $A_2(x_2; y_2)$ лежат на гиперболе $xy = 1$.

1) Докажите пропорцию $-\dfrac{y_2}{x_1} = -\dfrac{y_1}{x_2} = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

2) Рассмотрим точки $P_1(x_1; 0)$, $P_2(x_2; 0)$, $Q_1(0; y_1)$, $Q_2(0; y_2)$, лежащие на осях координат. Докажите, что отрезки P_1Q_2, P_2Q_1 и A_1A_2 параллельны друг другу.

3) Построим прямоугольник $A_1B_1A_2B_2$ со сторонами, параллельными осям координат, имеющий отрезок A_1A_2 в качестве одной из диагоналей. Докажите, что вторая диагональ B_1B_2 проходит через начало координат.

При построениях укажите, что точки A_1 и A_2 могут лежать как на одной, так и на разных ветвях гиперболы.

4) Построим равнобедренный треугольник OA_1B с вершиной A_1 и основанием OB, лежащим на оси x. Докажите, что уравнение боковой стороны A_1B можно записать в виде $x_1y + xy_1 = 2$.

5) Докажите, что прямая A_1B имеет единственную точку пересечения с гиперболой (Эта прямая является касательной к гиперболе в точке A_1).

И-3 *Парабола*

Дана парабола $y = x^2$ и две лежащие на ней точки $A_1(x_1; y_1)$ и $A_2(x_2; y_2)$.

1) Докажите, что угловой коэффициент прямой A_1A_2 равен $x_1 + x_2$.

2) Пусть прямая, параллельная прямой A_1A_2, пересекает параболу в точках B_1 и B_2. Докажите, что сумма абсцисс точек A_1 и A_2 равна сумме абсцисс точек B_1 и B_2.

3) Пусть C – точка пересечения прямой A_1A_2 с осью ординат. Вычислите ординату точки C.

4) Пусть прямая, проходящая через точку C, пересекает параболу в точках C_1 и C_2. Докажите, что произведение абсцисс точек A_1 и A_2 равно произведению абсцисс точек C_1 и C_2.

5) Пусть $A(x_0; y_0)$ – точка параболы с абсциссой $x_0 = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$. Докажите, что уравнение прямой, проходящей через точку A и параллельной прямой A_1A_2, может быть записано в виде $y + y_0 = 2xx_0$.

6) Докажите, что прямая, построенная в предыдущем задании, имеет единственную точку пересечения с параболой (эта прямая является касательной к параболе в точке A).

И-4 Корни квадратных уравнений

1) Проверьте, что уравнения $x^2 – 10x + 24 = 0$ и $x^2 – 3x – 18 = 0$ имеют общий корень, и составьте квадратное уравнение, корнями которого являются два оставшихся корня.

2) Уравнения $x^2 + p_1x_1 + q_1 = 0$ и $x^2 + p_2x + q_2 = 0$ имеют общий корень. Составьте квадратное уравнение, корнями которого являются два оставшихся корня.

3) Найдите значения a, при которых два квадратных уравнения $x^2 + 5x + a – 1 = 0$ и $x^2 + 3x + 7 – a = 0$ имеют общий корень.

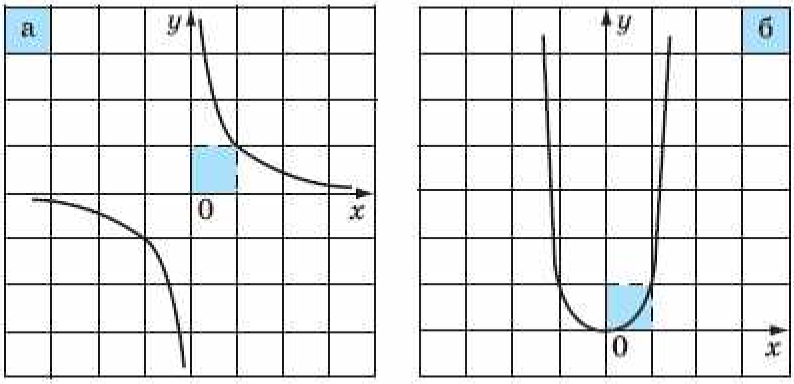
Комбинаторика

К-1 *Целая часть*

Напомним, что $[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x.

1) Постройте график функции $y = [x]$.

2) На рисунке изображены графики обычных функций вида $y = f(x)$. Перерисуйте их в тетрадь и на том же чертеже постройте графики функций $y = [f(x)]$.



3) Докажите следующие свойства функции $y = [x]$:

а) Если n – целое число, то $[x + n] = [x] + n$.

б) $[x + y] \geq [x] + [y]$ для любых чисел x и y.

в) Если x – нецелое число, то $[x] + [-x] = -1$.

г) $[x] + \left[x + \frac{1}{2}\right] = [2x]$.

4) Решите уравнение

а) $[7x] = 5$,

б) $[x] + [2x - 1] = 5$,

в) $\left[\frac{1}{x}\right] = [x] + 1$.

5) а) С каким показателем степени входит число 3 в разложение числа 100! на простые множители?

б) Докажите, что простое число p входит в разложение числа $n!$ на простые множители с показателем $\left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n}{p^2}\right] + \left[\frac{n}{p^3}\right] + \ldots$.

К-2 *Задача Иосифа Флавия*

Античный историк Иосиф Флавий (I век н. э., автор книги «Иудейская война») решил следующую задачу, благодаря чему, согласно легенде, он выжил. 41 человек выстроены в круг и пронумерованы. Затем убивают третьего, шестого, девятого и т. д., т. е. каждого третьего из оставшихся в живых человека, пока не останутся двое. Какие номера занимают эти двое?

Предварительно решим более простые задачи.

а) Пусть в круге стоит n человек, а убивают каждого k-ого. Какой останется последним при $n = 10$ и $k = 2$?

б) Тот же вопрос при $n = 32$, $k = 2$.

Теперь решите аналогичную задачу при других значениях n и k.

в) $n = 15$, $k = 2$

г) $n = 2^m$, $k = 2$

д) $n = 2^m - 1$, $k = 2$

е) Какие два человека окажутся последними при $n = 41$, $k = 3$?

ж) Какие два человека окажутся последними при $n = 81$, $k = 3$?