частицы перемещаться из одной ямы в другую изменит энергетический спектр частицы в ямах? Ответ будет нетривиальным.

Мы хотим не только сформулировать ответ, но и показать, как подобная задача решается, для чего и рассмотрим две ямы прямоугольной формы, разделенные прямоугольным барьером. Как и барьеры, которые мы рассмотрели ранее, прямоугольный барьер с прямоугольными границами, без сомнения, упрощенная модель, но для описания интересующего нас явления она вполне пригодна.

Итак, мы должны найти решение стационарного уравнения Шрёдингера с потенциальной энергией $U = U(x)$, изображенной на рисунке 8. В целях простоты высота барьера приравнена глубине ям. Функция $U = U(x)$, а тем самым и уравнение Шрёдингера, обладает симметрией при замене x на $-x$. Уравнение инвариантно (неизменно) при такой замене. Симметрия уравнения Шрёдингера позволяет его решения разделить на два класса: на симметричные, для которых $\psi_s(x) = \psi_s(-x)$, и антисимметричные, для которых $\psi_a(x) = -\psi_a(-x)$.[2]

Уравнение Шрёдингера имеет различный вид в зависимости от того, какому интервалу принадлежит координата x. Нас будут интересовать состояния с энергией $0 < \varepsilon < U_0$. На разных интервалах уравнения разные:

$$\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2} + \varepsilon\psi = 0 \quad \text{при} \quad |a| > |x| > |b|,$$

$$\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2} - (U_0 - \varepsilon)\psi = 0 \quad \text{при} \quad |x| < |b| \quad \text{и} \quad |x| > |a|.$$

[2] *С тем что у симметричной задачи может быть антисимметричное решение, мы уже встретились при вычислении уровней энергии частицы в бесконечно глубокой потенциальной яме. Вопрос о симметрии решений физических задач очень интересен. Вспомните, что при сферической симметрии силы всемирного притяжения все планеты движутся по эллипсам. К сожалению, вопрос этот выходит за пределы темы нашей статьи.*

Как мы отметили, ψ-функция может быть либо симметричной, либо антисимметричной. Выбрав для ψ-функции s- или a-решение, достаточно выписать зависимость либо при $x > 0$, либо при $x < 0$. Ограничимся правой полуосью (значение ψ-функции на левой полуоси определяется симметрией):

$$\psi_s(x) = \mathrm{A}\,\mathrm{ch}\,\kappa x \quad \text{при} \quad x < b,$$

$$\psi_a(x) = \mathrm{A}\,\mathrm{sh}\,\kappa x \quad \text{при} \quad x < b,$$

$$\psi_{s,a}(x) = \mathrm{B}\exp(ikx) + \mathrm{C}\exp(-ikx) \quad \text{при} \quad b < x < a,$$

$$\psi_{s,a}(x) = \mathrm{D}\exp(-\kappa x) \quad \text{при} \quad x > a.$$

Здесь $\kappa = \sqrt{2m(U_0 - \varepsilon)}/\hbar$, $k = \sqrt{2m\varepsilon}/\hbar$, а $0 < \varepsilon < U_0$.

Требования непрерывности ψ-функции и ее производной по координате на границах интервалов формулируют четыре уравнения для четырех неизвестных A, B, C и D, у которых мы опустили индексы s и a, хотя их значения для симметричной и антисимметричной ψ-функций различны. Условием разрешимости каждой из систем уравнений служит дисперсионное уравнение, позволяющее найти разрешенные уровни энергии. Оно выводится путем исключения всех четырех постоянных. При $U_0 \to \infty$, когда две ямы не связаны друг с другом, дисперсионные уравнения совпадают, что и соответствует вырождению: уровни энергии дважды вырождены ($\varepsilon_s^0 = \varepsilon_a^0$). При конечном значении U_0 энергии s- и a-уровни различаются, и вырождение ликвидируется. Если $U_0 \gg \hbar^2/\left(2m(a-b)^2\right)$, то $\left|\varepsilon_s^0 - \varepsilon_a^0\right| \ll \varepsilon_{s,a}^0$ – уровни энергии расщепляются на близко расположенные пары (рис.9). С ростом энергии растет и расстояние между уровнями в паре.

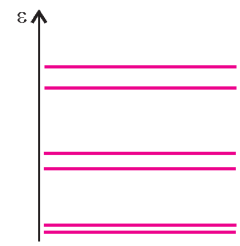

Рис. 9. Расщепление уровней энергии частицы

ПРАКТИКУМ АБИТУРИЕНТА

Движение заряда в магнитном поле

В.ДРОЗДОВ

Весьма высока вероятность того, что при том или ином виде конкурсного испытания абитуриент встретится с задачей, сюжетом которой будет движение точечного заряда в магнитном поле. Чтобы решить такую задачу, кроме свойств магнитного поля надо знать и динамику. А в некоторых задачах может дополнительно присутствовать еще и электрическое поле.

Таким образом, задачи на движение заряда охватывают обширный физический материал и являются эффективным средством проверки знаний абитуриента.

Начнем с двух задач, решение (а не ответы!) которых нужно особенно хорошо понять и запомнить.

Задача 1. *В однородном магнитном поле с индукцией $\vec{B}$, частице массой m и зарядом q сообщают скорость $\vec{v}$, направленную перпендикулярно линиям магнитной индукции. Определите, как будет двигаться эта частица в магнитном поле.*

На заряд действует сила Лоренца $\vec{F}_{\text{Л}}$, направление которой определяем по правилу левой руки (рис.1). Она постоянна по модулю: $F_{\text{Л}} = qvB$ и всегда перпендикулярна скорости частицы: $\vec{F}_{\text{Л}} \perp \vec{v}$. Значит, и ускорение частицы $\vec{a} = \dfrac{\vec{F}_{\text{Л}}}{m}$ тоже постоянно по модулю и в любой момент времени

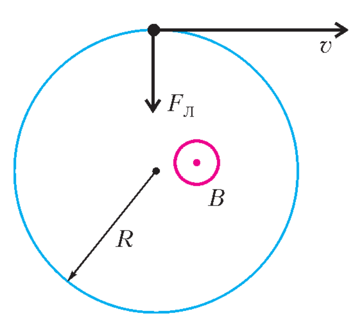

Рис. 1

движения перпендикулярно скорости. Из механики известно, что если точка движется по окружности, то именно так и будет. А верно ли обратное утверждение? Да, но доказывать его мы не будем, а к сведению примем.

Итак, частица движется по окружности, сила Лоренца сообщает частице центростремительное ускорение:

$$\frac{mv^2}{R} = qvB ,$$

значит, искомый радиус окружности равен

$$R = \frac{mv}{qB} ,$$

а период обращения частицы составляет

$$T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi m}{qB} .$$

Важно отметить, что период T не зависит от скорости частицы v.

Задача 2. *В однородное магнитное поле с индукцией $\vec{B}$ влетает со скоростью $\vec{v}$ частица массой m и зарядом q. Угол между вектором скорости $\vec{v}$ и вектором магнитной индукции $\vec{B}$ равен α. Как будет двигаться частица в магнитном поле?*

Рассмотрим предварительно случай $\alpha = 0$. При этом сила Лоренца равна нулю, следовательно, заряд будет двигаться прямолинейно с постоянной скоростью $\vec{v}$, т.е. по инерции.

Легко видеть, что вариант произвольного угла α представляет собой комбинацию двух частных случаев: $\alpha_1 = 90°$ и $\alpha_2 = 0$.

Разложим вектор $\vec{v}$ на две составляющие: $\vec{v}_1 \perp \vec{B}$ и $\vec{v}_2 \parallel \vec{B}$, при этом $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$ (рис.2). Интуитивно ясно, что частица будет совершать вращательное движение со скоростью v_1 по поверхности цилиндра, равномерно перемещаясь со скоростью v_2 вдоль его образующей.

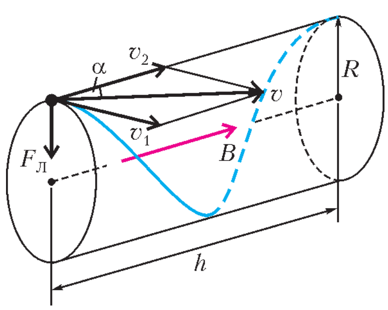

Рис. 2

Радиус цилиндра R определяется по аналогии с задачей 1 из уравнения

$$\frac{mv_1^2}{R} = qv_1B$$

(сила Лоренца действует только на составляющую скорости $\vec{v}_1$):

$$R = \frac{mv_1}{qB} = \frac{mv\sin\alpha}{qB} .$$

Период обращения частицы

$$T = \frac{2\pi R}{v_1} = \frac{2\pi m}{qB}$$

– такой же, как и в первой задаче. Он не зависит не только от модуля скорости, но и от ее направления, определяемого углом α. Траекторией заряда будет винтовая линия, «навитая» на цилиндр. Ее шаг – это расстояние, проходимое вдоль образующей за один оборот:

$$h = v_2T = \frac{2\pi mv\cos\alpha}{qB} .$$

Приведенное решение не вполне строгое, но вполне приемлемое.

Теперь решим еще несколько задач на движение заряда в магнитном поле.

Задача 3. *Электрон влетает в однородное магнитное поле с индукцией $\vec{B}$. В точке A он имеет скорость $\vec{v}$, которая составляет с направлением поля угол α (рис.3). При каких значениях индукции магнитного поля электрон окажется в точке Б? Расстояние АБ = L.*

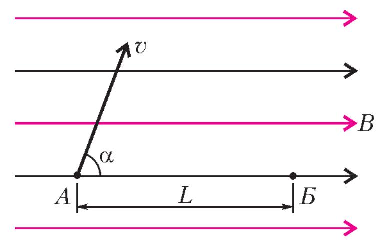

Рис. 3

Очевидно, что условие задачи будет выполнено, если на расстоянии L уложится натуральное число шагов винтовой линии. Таким образом,

$$L = nh = \left(\frac{2\pi mv\cos\alpha}{qB}\right)n ,$$

где m и q – масса и модуль заряда электрона соответственно. Отсюда получаем неоднозначный ответ:

$$B = \left(\frac{2\pi mv\cos\alpha}{qL}\right)n ,\ \text{где } n = 1,\ 2,\ 3\ldots$$

Это решение краткое, однако на экзамене придется вывести формулу шага винта, что мы сделали в задаче 2.

Задача 4. *Протон движется в однородном магнитном поле по винтовой линии с радиусом R и шагом h. Индукция магнитного поля равна B. Найдите скорость частицы.*

Из результата задачи 2 вытекает такая система уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{mv\sin\alpha}{qB} = R, \\ \dfrac{2\pi mv\cos\alpha}{qB} = h, \end{cases}$$

где m и q – масса и заряд протона соответственно. Запишем равносильную систему:

$$\begin{cases} v\sin\alpha = \dfrac{qBR}{m}, \\ v\cos\alpha = \dfrac{qBh}{2\pi m}. \end{cases}$$

Возведем обе части обоих уравнений в квадрат и сложим. Учитывая, что $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, найдем модуль скорости протона:

$$v = \frac{qB}{m}\sqrt{R^2 + \frac{h^2}{4\pi^2}} .$$

Легко определить и угол α между векторами $\vec{B}$ и $\vec{v}$:

$$\alpha = \operatorname{arctg}\left(\frac{2\pi R}{h}\right).$$

Задача 5. *Альфа-частица влетает по нормали в область поперечного однородного магнитного поля с индукцией B = = 0,1 Тл. Размер области h = = 0,1 м. Найдите скорость частицы, если после прохождения магнитного поля она отклоняется на угол $\varphi = 30°$ от первоначального направления. Для α-частицы отношение заряда к массе (удельный заряд) равен $q/m = 5 \cdot 10^7$ Кл/кг.*

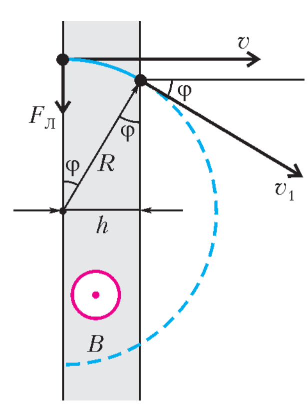

Рис. 4

Здесь мы имеем дело с локализованным в пространстве магнитным полем, поэтому траекторией заряженной частицы будет не вся окружность, а лишь ее дуга (рис.4). Из основного уравнения движения (встречавшегося в первой задаче)

$$\frac{mv^2}{R} = qvB$$

находим скорость частицы:

$$v = \frac{q}{m} RB .$$

Поскольку радиус дуги равен $R = \frac{h}{\sin\varphi}$, то окончательно получим

$$v = \frac{q}{m}\frac{hB}{\sin\varphi} = 10^6 \text{ м/с} .$$

Задача 6. *Электрон влетает в однородное магнитное поле с индукцией $\vec{B}$ со скоростью $\vec{v}$, направленной под углом φ к линиям магнитной индукции. Ширина области с полем равна l. Найдите изменение импульса электрона за время пролета через магнитное поле.*

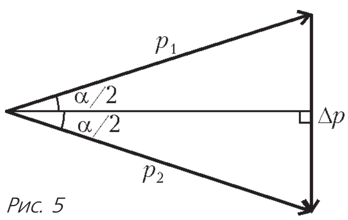

Рис. 5

Опираемся на решение второй задачи, учитывая, однако, что в данной задаче поле локализовано. Поскольку составляющая импульса электрона, параллельная вектору $\vec{B}$, не меняется, искомое изменение импульса равно разности составляющих импульса электрона, перпендикулярных вектору $\vec{B}$ (рис.5):

$$\Delta\vec{p} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 , \text{ где } p_1 = p_2 = mv\sin\varphi .$$

Из свойств равнобедренного треугольника сразу вытекает, что

$$\Delta p = 2p_1 \sin\frac{\alpha}{2} ,$$

где α – угол поворота перпендикулярной составляющей импульса. Физически очевидна пропорция $\frac{\alpha}{2\pi} = \frac{l}{h}$, где $h = \frac{2\pi mv\cos\varphi}{qB}$ – шаг винтовой линии, поскольку при прохождении каждого шага винта электрон совершает оборот, а при прохождении части шага – такую же часть оборота. Отсюда получаем

$$\alpha = \frac{qBl}{mv\cos\varphi} ,$$

где m и q – масса и модуль заряда электрона соответственно. Следовательно,

$$\Delta p = 2mv\sin\varphi \sin\frac{qBl}{2mv\cos\varphi} .$$

В следующих двух задачах магнитное поле дополнится полем электрическим.

Задача 7. *Однородные магнитное и электрическое поля перпендикулярны друг другу. Напряженность электрического поля $\vec{E}$, индукция магнитного поля $\vec{B}$. С какой скоростью и в каком направлении должен лететь протон, чтобы двигаться в области этих полей прямолинейно?*

Интуитивно подобранная векторная конфигурация полей и сил изображена на рисунке 6. Скорость протона $\vec{v}$ перпендикулярна обоим векторам $\vec{E}$ и $\vec{B}$. Очевидно, что движение частицы может быть прямолинейным в том и только том случае, когда сила Лоренца $\vec{F}_Л$ и кулоновская сила $\vec{F}_К$ компенсируются:

$$\vec{F}_Л + \vec{F}_К = 0 .$$

Отсюда следует равенство модулей сил:

$$F_Л = F_К , \text{ или } qvB = qE,$$

и получается ответ:

$$v = \frac{E}{B} .$$

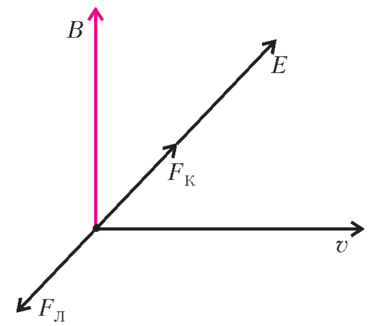

Рис. 6

При этом прямолинейное движение протона будет еще и равномерным.

Легко видеть, что при любой другой скорости (как по модулю, так и по направлению) движение частицы будет криволинейным и неравномерным.

Задача 8. *Электрон движется в однородных и постоянных электрическом и магнитном полях, направленных по оси Z. В начальный момент электрон пересекает начало координат, двигаясь в направлении оси X. В каких точках электрон вновь пересечет ось Z? Напряженность электрического поля E, индукция магнитного поля B, модуль заряда электрона e, его масса m.*

На рисунке 7 в системе координат XYZ изображены направления полей и сил, действующих на электрон. Основываясь на предыдущих задачах и на здравом смысле, можно сделать вывод, что электрон будет двигаться по винтовой линии, но с увеличивающимся шагом (конечно, строго это не винтовая линия) – ведь по оси Z на электрон действует кулоновская сила. Координата точки пересечения частицы с этой осью после n витков равна

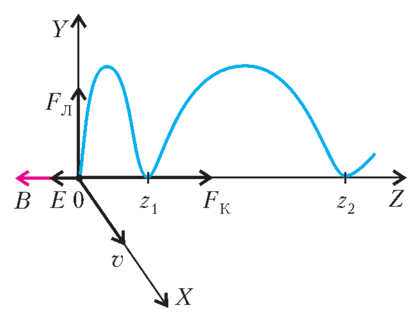

Рис. 7

$$z_n = \frac{a(nT)^2}{2} ,$$

где $a = \frac{eE}{m}$ – ускорение электрона, $T = \frac{2\pi m}{eB}$ – его период обращения. Отсюда имеем

$$z_n = \frac{eE}{2m}\left(\frac{2\pi mn}{eB}\right)^2 = \frac{2\pi^2 Em}{eB^2} n^2 .$$

Упражнения

1. Электрон движется в однородном магнитном поле с индукцией $\vec{B}$. В начальный момент времени электрон находился в точке O и его скорость $\vec{v}$ была перпендикулярна вектору магнитной индукции. Найдите расстояние l электрона от точки O в момент времени t. Массу электрона m и модуль его заряда q считать известными.

2. Незаряженная неподвижная частица распалась в магнитном поле с индукцией $\vec{B}$ на две частицы с массами m_1 и m_2 и зарядами q и $-q$. Найдите время, через которое частицы могут встретиться, если пренебречь кулоновским взаимодействием осколков.

3. Протон влетает со скоростью 60 км/с в пространство с электрическим и магнитным полями, направления которых совпадают, перпендикулярно этим полям. Найдите напряженность электрического поля, если индукция магнитного поля равна 0,1 Тл, а начальное ускорение протона, вызванное действием этих полей, составляет 10^{12} м/с^2.

4. Электрон, прошедший ускоряющую разность потенциалов $\Delta\varphi = 40$ В, влетает в плоский слой однородного магнитного поля толщиной h = 10 см. Скорость электрона перпендикулярна как линиям магнитной индукции поля $\vec{B}$, так и плоской границе слоя. При каком минимальном значении индукции $B_{\min}$ электрон не пролетит сквозь слой? Отношение модуля заряда электрона к его массе $\gamma = 1{,}76 \cdot 10^{11}$ Кл/кг.

5. Электрон движется по окружности радиусом R = 10 см в однородном магнитном поле с индукцией B = 1 Тл. Параллельно магнитному полю возбуждается однородное электрическое поле с напряженностью E = 100 В/м. За какой промежуток времени кинетическая энергия электрона возрастет вдвое?

6. Электрон влетает в область пространства с однородным электрическим полем напряженностью $E = 6 \cdot 10^4$ В/м перпендикулярно его силовым линиям. Определите величину и направление вектора индукции магнитного поля $\vec{B}$, которое надо создать в этой области пространства для того, чтобы электрон пролетел ее, не отклоняясь от первоначального направления. Кинетическая энергия электрона $W = 1{,}6 \cdot 10^{-16}$ Дж, масса электрона $m = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ кг. Силой тяжести пренебречь.

Инвариантность и задачи с параметрами

Г.ФАЛИН, А.ФАЛИН

В современной математике важную роль играет понятие *инвариантности*, т.е. неизменности математического объекта (числового множества, выражения, функции, уравнения и т.д.) относительно некоторых преобразований.

В настоящей статье мы покажем, как свойства инвариантности позволяют решать определенный класс задач с параметрами.

Уравнения

Задача 1 (МГУ, мехмат, 1990). *Найдите все значения параметра а, при которых уравнение*

$$x^2 - 2a\sin(\cos x) + a^2 = 0 \qquad (1)$$

имеет единственное решение.

Решение. Неизвестная x входит в уравнение (1) через две четные функции: $y = x^2$ и $y = \cos x$. Поэтому это уравнение инвариантно при замене x на $-x$. Значит, если какое-то число x_0 является корнем уравнения (1), то и число $(-x_0)$ также будет корнем. Отсюда следует, что уравнение (1) имеет единственный корень только в случае, когда среди корней присутствует число $x_0 = 0$. При этом не исключено наличие и других корней. Важно лишь то, что если среди корней нет числа 0, то множество M_a его корней не может быть одноэлементным (оно либо пусто, либо содержит по меньшей мере два корня вида x_1, $-x_1$).

Простая подстановка числа 0 на место неизвестной дает, что число 0 является корнем уравнения (1) для $a_1 = 0$ и $a_2 = 2\sin 1$.

Для завершения решения задачи достаточно выяснить, сколько корней имеет уравнение (1) для двух «подозрительных» значений параметра $a_1 = 0$ и $a_2 = 2\sin 1$.

1. Если a = 0, то уравнение (1) примет вид $x^2 = 0$, т.е. имеет единственный корень $x_0 = 0$. Поэтому значение $a = 0$ нужно включить в ответ задачи.

2. Если $a = 2\sin 1$, то уравнение (1) примет вид

$$x^2 + 4\sin^2 1 = 4\sin 1 \cdot \sin(\cos x). \qquad (2)$$

Левая часть этого уравнения больше или равна $4\sin^2 1$, причем эта нижняя граница является точной – она достигается при x = 0. Оценить правую часть немного сложнее. Прежде всего отметим, что при изменении переменной x от $-\infty$ до $+\infty$ выражение $\cos x$ меняется от −1 до +1. На отрезке $-1 \le t \le 1$ функция $\sin t$ монотонно возрастает от $-\sin 1$ до $\sin 1$. Поэтому выражение $\sin(\cos x)$ меняется от $-\sin 1$ до $\sin 1$. Соответственно, правая часть уравнения (2) меняется от $-4\sin^2 1$ до $4\sin^2 1$, причем значения правой части уравнения полностью заполняют этот отрезок. Следовательно, уравнение (2) равносильно системе

$$\begin{cases} x^2 + 4\sin^2 1 = 4\sin^2 1, \\ 4\sin 1 \cdot \sin(\cos x) = 4\sin^2 1. \end{cases}$$

Первое уравнение системы имеет единственный корень $x_0 = 0$, который удовлетворяет и второму уравнению системы. Значит, система, а вместе с ней и уравнение (2), имеет единственное решение x = 0. Поэтому проверяемое значение параметра $a = 2\sin 1$ нужно включить в ответ задачи.

Ответ: $a_1 = 0$, $a_2 = 2\sin 1$.

Задача 2 (химический ф-т, 1999). *Найдите все значения параметра а, при которых уравнение*

$$\left|\frac{x\left(2^x - 1\right)}{2^x + 1} + 2a\right| = a^2 + 1$$

имеет нечетное число решений.

Решение. В этой задаче уравнение также инвариантно при замене x на $-x$ (хотя заметить это довольно тяжело). Поэтому если число x_0 является корнем исходного уравнения, то число $-x_0$ также будет его корнем. Вследствие этого, количество корней может быть нечетным только в случае, когда среди корней находится число $x_0 = 0$. В противном случае множество корней либо пусто, либо бесконечно, либо конечно и содержит четное число корней.

Подставляя в исходное уравнение вместо неизвестной x число 0, мы получим простое уравнение относительно a: $|2a| = a^2 + 1$, которое имеет два корня: $a_1 = 1$, $a_2 = -1$.

Если a = 1, то исходное уравнение распадается на два уравнения:

$$\frac{x\left(2^x - 1\right)}{2^x + 1} = 0, \quad \frac{x\left(2^x - 1\right)}{2^x + 1} = -4.$$

Первое уравнение, очевидно, имеет единственный корень x = 0. Второе уравнение можно привести к виду $2^x = \dfrac{x - 4}{x + 4}$,