# Об одной замечательной прямой в треугольнике

А.КАРЛЮЧЕНКО, Г.ФИЛИППОВСКИЙ

Пусть дан треугольник $ABC$ (рис.1), $I$ – его инцентр, т.е. центр вписанной окружности, $K_1, K_2, K_3$ – точки касания вписанной окружности со сторонами, $M_1$ – середина стороны $BC$, $AH_1$ – высота, проведенная из вершины $A$. Оказывается, что прямая $M_1I$ (и еще две аналогичные прямые, соединяющие середины двух других сторон с инцентром) обладает целым рядом свойств, помогающих решать большое количество задач. Об этих свойствах и их применениях мы и поговорим.

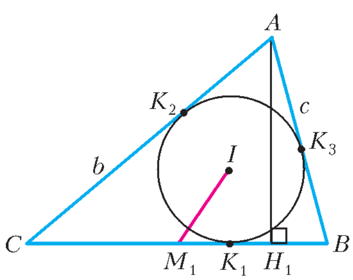


Рис. 1

### Свойства прямой $M_1I$

**Свойство 1.** *Прямые $M_1I$ и $AT_1$, где $T_1$ – точка касания вневписанной окружности треугольника $ABC$ со стороной $BC$, параллельны.*

**Доказательство.** Пусть $K_1D$ – диаметр вписанной в $\Delta ABC$ окружности (рис.2). Касательная $EF$ к этой окружности в точке $D$ будет, очевидно, параллельна стороне $BC$. Точка $D$ является точкой касания вневписанной окружности треугольника $AEF$ со стороной $EF$. В свою очередь, $T_1$ – точка касания вневписанной окружности треугольника $ABC$ со стороной $BC$. Треугольники $AEF$ и $ABC$ гомотетичны с центром гомотетии в точке $A$. Поэтому $A$, $D$ и $T_1$ лежат на одной прямой. Кроме того, $BK_1 = CT_1 = p - b$, где $p$ – полупериметр треугольника (докажите это!). Следовательно, $T_1M_1 = M_1K_1$ и $M_1I$ – средняя линия в $\Delta DK_1T_1$. А это и значит, что $M_1I \parallel AT_1$.

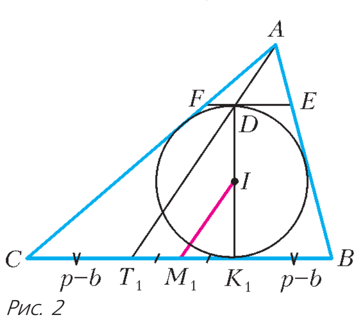


Рис. 2

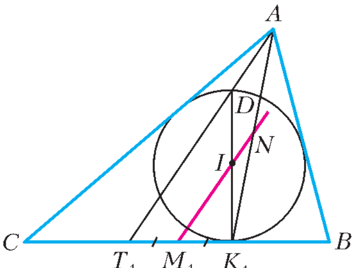


Рис. 3

**Свойство 2.** *Прямая $M_1I$ делит отрезок $AK_1$ пополам.*

**Доказательство.** Пусть прямая $M_1I$ пересекает $AK_1$ в точке $N$ (рис.3). Поскольку $M_1I \parallel AT_1$ и $T_1M_1 = M_1K_1$, то $M_1N$ – средняя линия в $\Delta AK_1T_1$. Таким образом, $AN = NK_1$.

Заметим, что свойство 2 может быть элегантно доказано с помощью **теоремы Ньютона**: *если в четырехугольник вписана окружность, то ее центр расположен на прямой, соединяющей середины диагоналей четырехугольника.*

Действительно, $\Delta ABC$ можно рассматривать как вырожденный четырехугольник $ABK_1C$ ($\angle BK_1C = 180°$). Тогда, согласно теореме Ньютона, точки $M_1$ и $N$ (середины диагоналей), а также центр окружности $I$ лежат на одной прямой.

**Свойство 3** *Прямая $M_1I$ отсекает от высоты $AH_1$ отрезок $AQ$, равный радиусу вписанной в $\Delta ABC$ окружности.*

**Доказательство.** Поскольку $ADIQ$ – параллелограмм (его противоположные стороны параллельны), то $AQ = DI = r$ (рис.4).

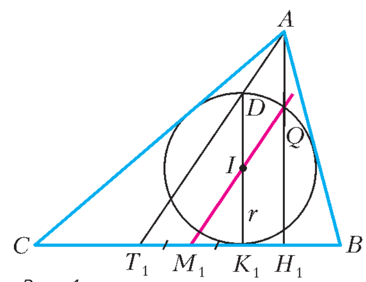


Рис. 4

Свойства 2 и 3 предлагались в качестве задач на II и III Всесоюзной математической олимпиаде соответственно.

Далее мы покажем, как «работают» свойства 1 – 3 прямой $M_1I$.

### Задачи на доказательство

**Задача 1.** *Пусть $M$ – центроид, т.е. точка пересечения медиан, треугольника $ABC$. Докажите, что $M_1I$ делит отрезок $MK_1$ в отношении 1:3, считая от центроида $M$.*

**Решение.** Поскольку $T_1M_1 = M_1K_1$ и $AM : MM_1 = 2 : 1$, то точка $M$ – центроид в $\Delta AK_1T_1$ (рис.5). А значит, $K_1M : MG = 2 : 1$. Вместе с тем, $M_1I \parallel AT_1$ (свойство 1) и $K_1L = LG$. Теперь нетрудно подсчитать, что $ML : LK_1 = 1 : 3$.

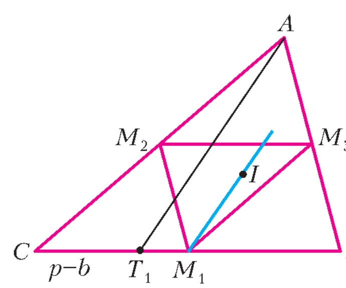


Рис. 5

**Задача 2.** *Пусть $M_2, M_3$ – середины сторон $AC$ и $BA$ соответственно. Докажите, что прямая $M_1I$ делит периметр $\Delta M_1M_2M_3$ пополам.*

**Решение.** Прямая $AT_1$ делит периметр $\Delta ABC$ пополам. Действительно, $AC + CT_1 = b + p - b = p$ и $M_1I \parallel AT_1$ (рис.6). Тогда $AT_1$ и $M_1I$ – соответственные прямые в гомотетичных треугольниках $ABC$ и $M_1M_2M_3$.

**Задача 3.** *Докажите, что прямые $M_1I$, $T_1M$ и $AK_1$ пересекаются в одной точке.*

**Решение.** Решая задачу 1, мы показали, что точка $M$ является центроидом в треугольнике $\Delta AK_1T_1$, а значит, точки $T_1$, $M$ и $N$ лежат на одной прямой (см. рис.5). По свойству 2 точки $M_1$, $I$, $N$ лежат на одной пря-

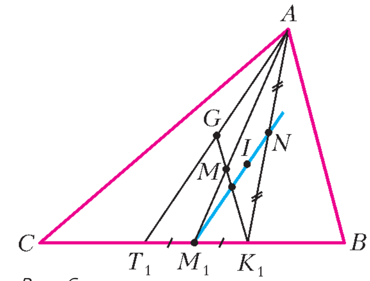


Рис. 6

(Продолжение см. на с.34)

(Начало см. на с.31)

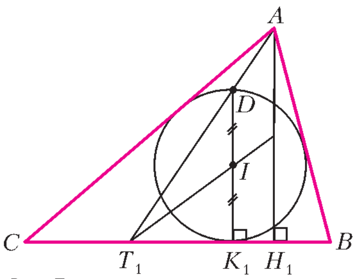

Рис. 7

мой. Таким образом, прямые $M_1I$ и $T_1M$ пересекаются в середине отрезка $AK_1$.

**Задача 4.** *Докажите, что $T_1I$ делит высоту $AH_1$ пополам.*

**Решение.** Прямая $T_1I$ делит $DK_1$ пополам ($DI = IK_1 = r$; рис.7). Поскольку $DK_1 \parallel AH_1$, то прямая $T_1I$ разделит пополам и высоту $AH_1$.

## Задачи на построение

**Задача 5.** *Постройте треугольник ABC по трем точкам: вершине A, инцентру I и центроиду M.*

**Решение.** Соединим точки $A$ и $M$, продлим $AM$ на половину этого отрезка и получим $M_1$ – середину $BC$ (рис.8).

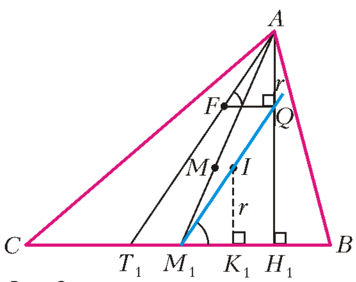

Рис. 8

Проведем прямую $M_1I$. Согласно ее свойствам, $M_1I \parallel AT_1$ и $M_1I$ отсекает от высоты $AH_1$ отрезок $AQ = r$. Анализ показывает, что если провести через точку $Q$ прямую параллельно $BC$ – до пересечения с $AT_1$ в точке $F$, то $\Delta AQF = \Delta IK_1M_1$ (по катету и острому углу).

Отсюда и построение: через вершину $A$ проведем прямую параллельно прямой $M_1I$. Отложим на ней отрезок $AF = M_1I$. Окружность, построенная на $AF$ как на диаметре, пересечет прямую $M_1I$ в точке $Q$. При этом $AQ \perp BC$. Дальнейшее построение очевидно.

**Задача 6.** *Восстановите треугольник ABC по инцентру I, точке $M_1$ – середине BC, а также прямой l, содержащей высоту $AH_1$.*

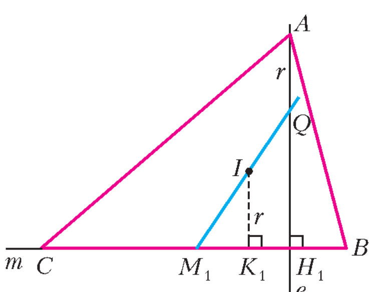

Рис. 9

**Решение.** Проведем через $M_1$ прямую $m$, перпендикулярную $l$, перпендикуляр из точки $I$ на эту прямую даст точку $K_1$ и отрезок $IK_1 = r$ (рис.9). Пусть $M_1I$ пересечет $l$ в точке $Q$. Отложив от точки $Q$ вверх отрезок, равный $r$, получим вершину $A$. Касательные из точки $A$ к окружности с центром $I$ радиуса $IK_1 = r$ пересекут прямую $m$ в недостающих вершинах $B$ и $C$.

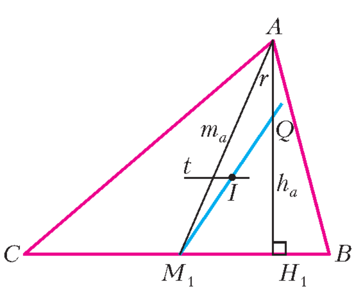

Рис. 10

**Задача 7.** *Постройте треугольник ABC по высоте и медиане, проведенным из вершины A, и радиусу r вписанной окружности.*

**Решение.** Строим прямоугольный $\Delta AH_1M_1$ по катету $h_a$ и гипотенузе $m_a$ (рис.10). Откладываем от $A$ отрезок $AQ = r$. Прямая $t$, проведенная параллельно $H_1M_1$ на расстоянии $r$ от нее, пересечет $M_1Q$ в инцентре $I$. Дальнейшее очевидно.

**Задача 8.** *Восстановите $\Delta ABC$ по точкам M, I и прямой m, содержащей сторону BC.*

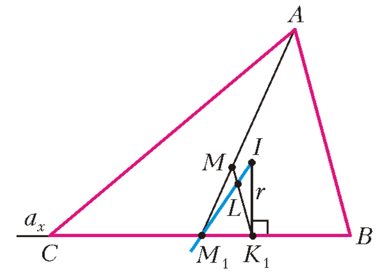

Рис. 11

**Решение.** Из точки $I$ проведем перпендикуляр $IK_1$ к прямой $m$, причем $IK_1 = r$ (рис.11). Соединим $M$ и $K_1$ и, разделив этот отрезок в отношении 1:3, получим точку $L$ (задача 1). Прямая $IL$ пересечет $m$ в точке $M_1$ – середине $BC$. Удвоив отрезок $M_1M$, получим вершину $A$. Касательные из $A$ к окружности с центром $I$ радиуса $r$ пересекут $m$ в вершинах $B$ и $C$.

## Задачи про треугольник, в котором $b + c = 2a$

Иногда, в связи с тем что $b - a = a - c$, такой треугольник называют *разностным.* А вообще это треугольник, у которого одна из сторон равна среднему арифметическому двух других сторон.

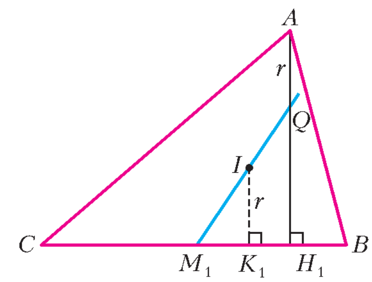

Рис. 12

**Задача 9.** *Дан $\Delta ABC$, в котором $b + c = 2a$. Докажите, что в нем $QH_1 = 2r$.*

**Решение.** Поскольку $M_1I$ отсекает от высоты $h_a$ отрезок $AQ = r$ (рис. 12), то

$$\frac{QH_1}{QA} = \frac{h_a - r}{r} = \frac{h_a}{r} - 1 = \frac{2S/a}{S/p} - 1 = \frac{2p - a}{a} = \frac{b + c}{a} = \frac{2a}{a} = 2,$$

где $S$ – площадь треугольника $ABC$. Значит, $QH_1 = 2r$.

*Следствие.* В разностном треугольнике $h_a = 3r$.

**Задача 10.** *Докажите, что в разностном треугольнике $M_1K_1 = K_1H_1$.*

**Решение.** Поскольку $QH_1 = 2r$, а $IK_1 = r$ и к тому же $IK_1 \parallel QH_1$, то $IK_1$ является средней линией в $\Delta QH_1M_1$ (см. рис.12), т.е. $M_1I = IQ$ и $M_1K_1 = K_1H_1$.

**Задача 11.** *В разностном треугольнике $MI \parallel BC$. Докажите это.*

**Решение.** Это очевидно, поскольку расстояния от центроида $M$ и инцентра $I$ в таком треугольнике до стороны $BC$ составляют $\frac{1}{3}h_a = r$.

*Следствие.* В разностном треугольнике прямые $M_1I$ и MI делят высоту $h_a$ на 3 равные части.

**Задача 12.** *Инцентр I разностного треугольника ABC является центроидом треугольника $AT_1H_1$. Докажите это.*

**Решение.** Поскольку $M_1I = IQ$ (задача 10), то медиана $H_1G$ треугольника $AT_1H_1$ проходит через точку $I$ (рис.13). Но тогда из параллельности прямых $M_1I$ и $AT_1$, а также из равенства $T_1M_1 = M_1K_1 = K_1H_1$ следует $H_1I = 2IG$. А это значит, что $I$ – центроид $\Delta AT_1H_1$.

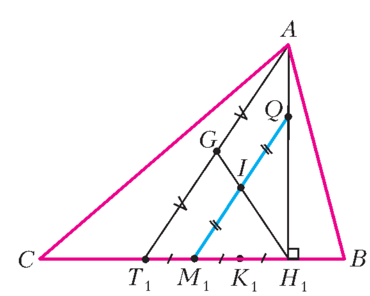

Рис. 13

### Задачи с прямоугольным треугольником

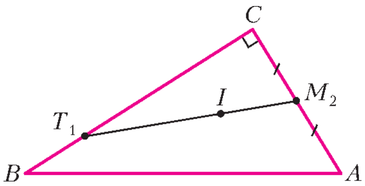

*Рис. 14*

**Задача 13.** *Докажите, что в прямоугольном* $\Delta ABC$ *(* $\angle C = 90°$ *) точки* $T_1$*,* $I$*,* $M_2$ *принадлежат одной прямой (рис.14).*

**Решение.** Так как прямая $T_1I$ делит высоту $h_a$ пополам (задача 4), а в прямоугольном треугольнике катет $AC$ совпадает с $h_a$, то задача решена.

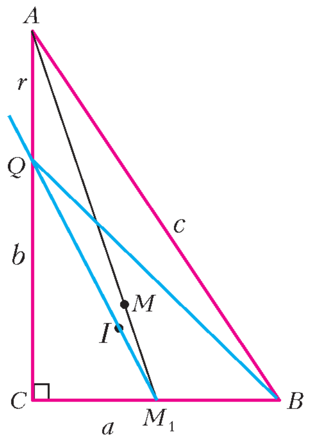

*Рис. 15*

**Задача 14.** *Дан прямоугольный* $\Delta ABC$ *(* $\angle C = 90°$ *) с заданными положениями центроида M и инцентра I. При помощи одной линейки разделите периметр этого треугольника пополам.*

**Решение.** Прямая $AM$ пересечет $BC$ в точке $M_1$ (рис.15). Прямая $M_1I$ пересечет $AC$ в точке $Q$ такой, что $AQ = r$ (свойство 3). Прямая $BQ$ разделит периметр $\Delta ABC$ пополам, ибо

$$c + r = c + \frac{a+b-c}{2} = \frac{a+b+c}{2} = p .$$

**Задача 15.** *В прямоугольном* $\Delta ABC$ *через середину гипотенузы BC и инцентр I проведена прямая. Она пересекает катет AB под углом 75°. Найдите острые углы* $\Delta ABC$.

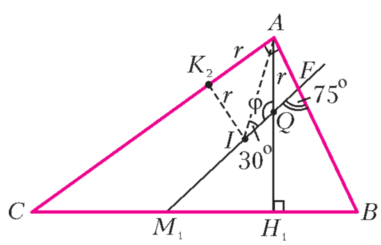

*Рис. 16*

**Решение.** Пусть прямая $M_1I$ пересекает $AH_1$ в точке $Q$ и $AB$ – в точке $F$ (рис.16). Тогда, согласно условию, $\angle BFM_1 = 75°$, а $AQ = r$ (свойство 3). Кроме того, $AI = r\sqrt{2}$ и $\angle AIF = 30°$ (так как $\angle BFM_1 = 75°$ – внешний для $\Delta AIF$).

Пусть $\angle AQI = \varphi$. По теореме синусов для $\Delta AQI$ имеем

$$\frac{AI}{\sin\varphi} = \frac{AQ}{\sin 30°}, \text{ или } \frac{r\sqrt{2}}{\sin\varphi} = \frac{r}{1/2},$$

откуда

$$\sin\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ и } \varphi = 135° .$$

Из четырехугольника $BFQH_1$ найдем угол $B$:

$$\angle B = 360° - 90° - 135° - 75° = 60° .$$

Тогда $\angle C = 30°$.

### Задачи, связанные с вневписанной окружностью

Заметим, что свойства, аналогичные вышеуказанным, можно наблюдать и при рассмотрения вневписанных окружностей треугольника $ABC$.

Пусть $I_a$ – центр вневписанной окружности $\omega$, касающейся стороны $BC$ и продолжений $AB$ и $AC$ (рис.17). Вот несколько фактов, которые мы предлагаем вам доказать самостоятельно:

а) $I_aK_1$ делит $h_a$ пополам;

б) $I_aM_1$ отсекает на продолжении $h_a$ за точку $A$ отрезок $AY$, равный радиусу окружности $\omega$;

в) $I_aM_1 \parallel AK_1$;

г) $I_aM_1$ делит отрезок $AT_1$ пополам.

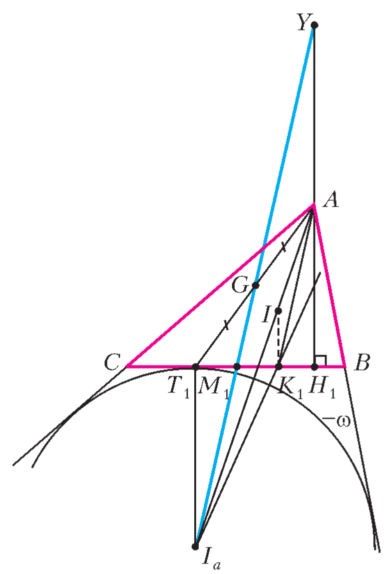

*Рис. 17*



# Квантовые чудеса

М.КАГАНОВ

### Введение

В статье «Как квантовая механика описывает микромир» (см. «Квант» №2, 3 за 2006 г.) рассказывалось о фундаментальном уравнении квантовой механики – уравнении Шрёдингера – и с его помощью рассматривалась задача поведения частицы в бесконечно глубокой потенциальной яме. В предлагаемой вниманию читателей публикации главное внимание будет уделено решению нескольких сравнительно простых задач, которые подобраны так, чтобы продемонстрировать необычность поведения микрочастиц по сравнению с макроскопическими телами. Из соображений простоты мы ограничимся только одномерными задачами.

Предлагаемые задачи, как правило, не могут претендовать на описание какого-то реального физического явления. Но они могут помочь понять реальные явления, достойные называться *квантовыми чудесами.*

### Частица или волна? Одна или много?

Наибольшей психологической трудностью квантовой механики считается непредставимость основного объекта, для описания движения которого она создана. То частица проявляет свои волновые свойства, то корпускулярные. Математический аппарат квантовой механики устроен так, что, решая любую физическую задачу, можно пользоваться об-