Материалы вступительных экзаменов 2007 года

Московский физико-технический институт (государственный университет)

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Решите уравнение

$$\log_{13-x^2}\left(3\cdot 4^{x+2}-18+4^{-x}\right)=\log_{x+1}\left(3\cdot 4^{x+2}-18+4^{-x}\right).$$

2. Решите уравнение

$$2\cos 2x = 2\cos^3 x + \sin 2x \sin|x|.$$

3. Решите неравенство

$$\sqrt{\frac{1-2x}{3+2x}}+\frac{\sqrt{3+2x}}{2\sqrt{1-2x}-\sqrt{2}}\ge 0.$$

4. Окружности ω_1 и ω_2 лежат внутри треугольника ABC, в котором $AB = BC = l$, $AC = 6$, а радиус ω_1 в четыре раза больше радиуса ω_2. Окружности ω_1 и ω_2 касаются внешним образом, причем ω_1 касается сторон AB и AC, а ω_2 – сторон BC и AC треугольника ABC. Найдите радиус окружности ω_2, если $l = 15$. Найдите все значения l, при которых существуют указанные окружности.

5. Найдите все значения параметра a, при которых наименьшее значение величины $y-\frac{x^2}{4}$ на множестве пар действительных чисел $(x;y)$, удовлетворяющих одновременно двум неравенствам $y+\sqrt{16-x^2}\ge 0$ и $y+4\ge|4x-a|$, будет минимально возможным. Найдите это минимально возможное значение.

6. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ четыре числа – длины ребер и диагонали AC_1 – образуют арифметическую прогрессию с положительной разностью d, причем $AA_1 < AD < AB$. Две внешне касающиеся друг друга сферы одинакового неизвестного радиуса R расположены так, что их центры лежат внутри параллелепипеда, причем первая сфера касается граней ABB_1A_1, ADD_1A_1, $ABCD$, а вторая – граней BCC_1B_1, CDD_1C_1, $A_1B_1C_1D_1$. Найдите: а) длины ребер параллелепипеда; б) угол между прямыми CD_1 и AC_1; в) радиус R.

Вариант 2

1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} xy+2x-3y+2=0,\\ 2x^2y-3xy^2-12x+18y=16.\end{cases}$$

2. Решите неравенство

$$\log_{(2-x)^4}(1+x)^2+\log_{(x-2)^2}(4-x)\le 1.$$

3. Решите уравнение

$$\operatorname{tg}\left(\frac{2\pi\sin^2 x+\pi}{4\sin^6 x+1}-\frac{\pi}{3}\right)-\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{4\sin^6 x+1}\right)=0.$$

4. Окружность касается стороны AD четырехугольника $ABCD$ в точке D, а стороны BC – в ее середине M. Диагональ AC пересекает окружность в точках K и L $(AK < AL)$. Известно, что $AK = 8$, $KL = 6$, $LC = 1$. Лучи AD и BC пересекаются в точке S, причем $\angle ASB = 2\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{2}$. Найдите радиус окружности и площадь $ABCD$.

5. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$$\left(\cos^4 x\right)^{1/5}+\frac{1}{4}\left(\sin^4 x\right)^{1/5}=a$$

имеет единственное решение на отрезке $\left[-\pi;\frac{\pi}{2}\right]$.

6. В пирамиде $ABCD$ грани ABC и ADC являются равнобедренными треугольниками с общим основанием AC. Сфера радиуса R с центром в точке O, лежащей на грани ABC, касается всех ребер пирамиды $ABCD$. Найдите длины отрезков, на которые точки касания сферы делят ребра пирамиды, и объем пирамиды $ABCD$, если угол OCD равен β. Найдите значение угла OCD, при котором объем пирамиды $ABCD$ будет наименьшим. Найдите это наименьшее значение объема пирамиды $ABCD$.

Вариант 3

1. Решите уравнение

$$\sqrt{25+\left|16x^2-25\right|}=4+4|1-x|.$$

2. Решите уравнение

$$11+\cos 10x=-10\frac{\sin 5x}{\cos 6x}-12\operatorname{tg}^2 6x.$$

3. Решите неравенство

$$\frac{9}{\log_{\sqrt[3]{1-x}}(1+x)+6}\ge\log_{\sqrt{1-x}}\frac{\sqrt{1-x}}{1+x}.$$

4. В треугольнике ABC площади 200 и периметра 80 сторона AC равна 36. Внутри треугольника ABC взята точка D, удаленная на расстояние 3 от прямой AB и на расстояние 4 от прямой BC. Найдите угол ABC и расстояние от D до центра вписанной окружности треугольника ABC.

5. Найдите все пары целых чисел $(x;y)$, удовлетворяющие системе уравнений

$$\begin{cases} 2x^2-xy-y^2=8,\\ x^2+y^2+4x-2y+4=0.\end{cases}$$

6. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ ребро основания $ABCD$ равно 4, а угол между боковой гранью и плоскостью основания равен $\operatorname{arctg} 2$. На ребре SD выбрана точка K так, что $SK=\frac{1}{4}SD$. Сфера ω с центром на отрезке BK проходит через точки S и A. Найдите, в каком отношении центр сферы ω делит отрезок BK, радиус сферы ω и длину отрезка, который ω отсекает от прямой AB.

ФИЗИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Два груза висят на нитях в воздухе (рис.1). Сила натяжения верхней нити в два раза больше силы натяжения нижней нити. Когда оба груза полностью погрузили в воду, то их взаимное положение не изменилось, сила натяжения верхней нити уменьшилась на 20%, а нижней – на 30%. Найдите плотности нижнего и верхнего грузов. Плотность воды $\rho = 1\ г/см^3$.

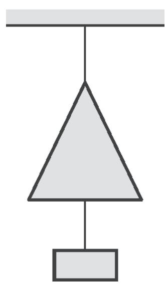

Рис. 1

2. Однородный канат длиной l и массой m с прикрепленным к одному концу грузом массой $m/3$ находится на гладкой горизонтальной поверхности стола и вращается с угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси, проходящей через другой конец каната. Размер груза мал по сравнению с длиной каната. 1) Найдите силу, действующую на груз со стороны каната. 2) Найдите силу натяжения каната на расстоянии $l/3$ от оси вращения.

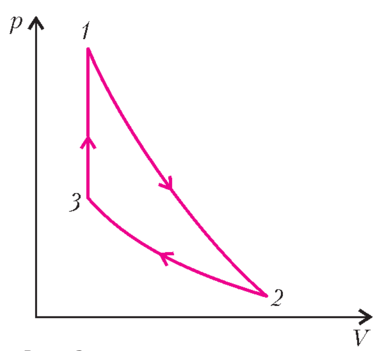

Рис. 2

3. Тепловая машина работает по замкнутому циклу, состоящему из процесса адиабатического расширения *1–2*, изотермического процесса *2–3* и изохорического процесса *3–1* (рис.2). Рабочее вещество машины – ν молей идеального одноатомного газа. В процессе, где тепло к газу подводится, давление газа увеличивается в 3 раза. В процессе сжатия от газа отводится количество теплоты Q ($Q > 0$). Во всем цикле *1–2–3–1* машина совершает работу A. Найдите максимальную температуру газа в цикле.

4. В схеме изображенной на рисунке 3, периодически (с периодом 3τ) повторяют следующий процесс: ключ замыкают на время τ и размыкают на время 2τ, причем время τ достаточно мало и напряжение на конденсаторе за это время изменяется незначительно. Через достаточно большое число повторений напряжение на конденсаторе становится практически постоянным, совершая лишь незначительные колебания около своего среднего значения. 1) Найдите это среднее значение. 2) Найдите среднюю тепловую мощность, выделяющуюся в резисторе сопротивлением $2R$ в установившемся режиме. Все элементы можно считать идеальными, их параметры указаны на рисунке.

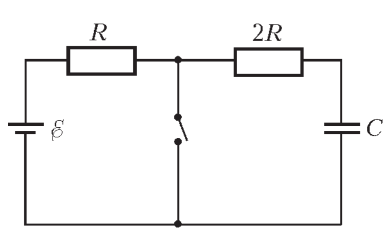

Рис. 3

5. С помощью тонкой линзы на экране получено увеличенное изображение предмета, расположенного перпендикулярно главной оптической оси линзы. Расстояние между предметом и экраном в 4,5 раза больше фокусного расстояния линзы. С каким увеличением изображается предмет?

Вариант 2

1. Массивная плита поднимается с постоянной скоростью вертикально вверх (рис.4). По направлению к плите движется шарик, имеющий непосредственно перед ударом скорость v_0, направленную под углом α ($\sin\alpha = 2/3$) к вертикали. После абсолютно упругого удара о гладкую горизонтальную поверхность плиты шарик отскакивает со скоростью, составляющей угол γ ($\sin\gamma = 1/3$) с вертикалью. 1) Найдите скорость отскочившего шарика. 2) Найдите скорость плиты. Ответ достаточно выразить через корни из целых чисел.

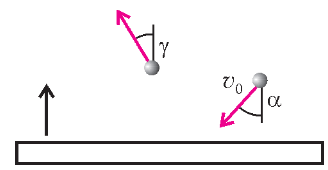

Рис. 4

2. Тепловая машина работает по циклу Карно, состоящему из двух изотерм *1–2* и *3–4* и двух адиабат *2–3* и *4–1* (рис.5). Работа сжатия в изотермическом процессе *3–4* равна A_{34} ($A_{34} > 0$), а работа сжатия в адиабатическом процессе *4–1* равна A_{41} ($A_{41} > 0$). Найдите работу, совершенную машиной в процессе изотермического расширения *1–2*, если температура в нем равна T. Рабочее вещество машины – ν молей идеального одноатомного газа.

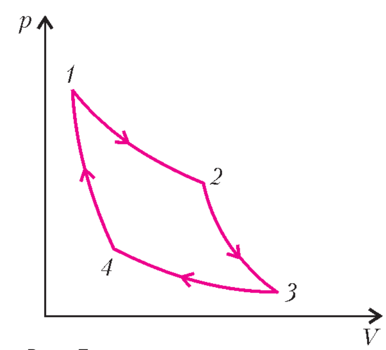

Рис. 5

3. В центре закрепленного кольца радиусом R с равномерно распределенным по кольцу положительным зарядом Q удерживают небольшой по размерам шарик массой m с зарядом $2Q$. Шарик отпускают, и он движется вдоль оси кольца. Найдите скорость шарика на расстоянии $4R/3$ от центра кольца.

4. В схеме, показанной на рисунке 6, все элементы можно считать идеальными. Параметры элементов указаны на рисунке. До замыкания ключа K ток в цепи отсутствовал. Ключ замыкают на некоторое время τ, а затем размыкают. Оказалось, что за все время опыта (т.е. за время, пока ключ был замкнут, и за время, пока ключ был разомкнут) в схеме выделилось количество теплоты Q. Найдите время τ.

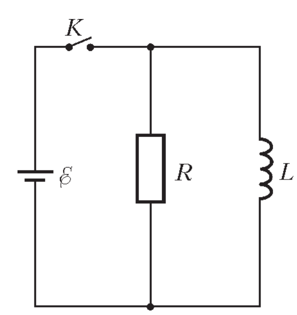

Рис. 6

5. С помощью тонкой линзы на экране получено изображение предмета с двукратным увеличением. Предмет расположен перпендикулярно главной оптической оси линзы. 1) Во сколько раз расстояние между линзой и экраном больше фокусного расстояния линзы? Затем линзу и предмет передвинули вдоль оптической оси так, чтобы, не меняя положения экрана, получить на нем изображение с пятикратным увеличением. 2) На сколько передвинули предмет, если линзу переместили на $b = 30$ см?

Вариант 3

1. Два мальчика бегут к неподвижной тележке, находящейся на горизонтальной поверхности. Мальчик массой m запрыгивает на тележку. Второй мальчик массой $1{,}2m$ нагоняет уже движущуюся тележку и тоже запрыгивает на нее. Скорость тележки увеличивается на 80%. Найдите массу тележки. Горизонтальные составляющие скоростей мальчиков относительно поверхности земли перед попаданием на тележку одинаковы. Сопротивлением движению тележки пренебречь. Направления всех движений находятся в одной вертикальной плоскости.

2. Тонкий подвижный теплопроводящий поршень делит герметичный цилиндр на две части. С одной стороны от поршня находится $m = 1$ г воды, с другой стороны – воздух под давлением p = 0,28 атм. Начальная температура в цилиндре $t_1 = 7\ ^\circ\text{C}$. При медленном нагревании поршень в некоторый момент начинает двигаться, при температуре $t_2 = 100\ ^\circ\text{C}$ останавливается и при дальнейшем нагревании остается неподвижным. 1) Какая масса воды в начальный момент находится в газообразном состоянии? 2) Найдите объем цилиндра. Объемом жидкости можно пренебречь по сравнению с объемом цилиндра. Давление насыщенных паров воды при температуре $20\ ^\circ\text{C}$ равно $p_{\text{н}} = 0{,}023$ атм. Силу тяжести и трение поршня о цилиндр не учитывать.

3. В электрической цепи (рис.7), собранной из резисторов, батарей и первоначально незаряженных конденсаторов, все возникшие после соединения процессы перезарядки закончились. Все элементы можно считать идеальными, их параметры указаны на рисунке. 1) Найдите разность потенциалов $\varphi_A - \varphi_B$ в установившемся режиме при разомкнутом ключе K. 2) Найдите ток (с указанием направления) через резистор сопротивлением R сразу после замыкания ключа.

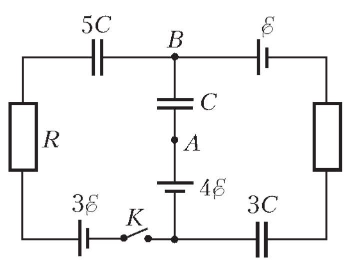

Рис. 7

4. По длинным вертикальным проводящим штангам, находящимся на расстоянии l друг от друга, может без трения скользить, не теряя электрического контакта и оставаясь перпендикулярной рельсам, проводящая перемычка. Штанги соединены через резистор сопротивлением r и идеальную батарею с ЭДС $\mathcal{E}$ (рис.8). Сопротивлением остальных участков цепи можно пренебречь. Система находится в горизонтальном постоянном однородном магнитном поле с индукцией B, перпендикулярном плоскости рисунка. 1) Найдите массу перемычки m, если после подвешивания к ней на нити груза такой же массы m перемычка оказалась неподвижной. После обрыва нити через некоторое время устанавливается равномерное движение перемычки. 2) Найдите величину и направление скорости этого движения. Считайте заданными $\mathcal{E}$, r, B, l, g.

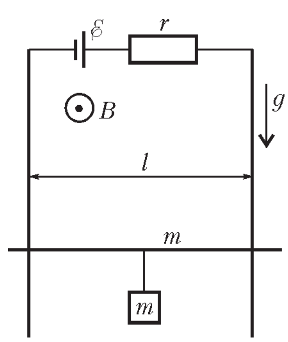

Рис. 8

5. В круглое отверстие листа фанеры вставлена собирающая линза с фокусным расстоянием F = 20 см и диаметром D = 69 мм. Точечный источник света находится на главной оптической оси линзы на расстоянии d = 40 см от линзы. На экране, расположенном перпендикулярно главной оптической оси линзы, получено резкое изображение этого источника. Линзу при неподвижных источнике и экране передвигают на x = 20 см вдоль главной оптической оси в сторону экрана. 1) На каком расстоянии от экрана получилось новое изображение источника? 2) Найдите диаметр светлого пятна на экране.

Публикацию подготовили Д.Александров, Р.Константинов, М.Шабунин

Московский государственный институт электроники и математики (технический университет)

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

(факультеты электроники, информатики и телекоммуникаций, автоматики и вычислительной техники)

1. Решите неравенство
$$\log_{\frac{1}{2}}(3-2x) > -3.$$

2. Решите неравенство
$$\frac{3^x}{9} > 27^{-x^2}.$$

3. Решите систему уравнений
$$\begin{cases} x^3y + xy^3 = 30, \\ x^2 + y^2 = 10. \end{cases}$$

4. Решите уравнение
$$2\sin x + 3\cos x = \frac{2}{\sin x}.$$

5. Найдите область определения и множество значений функции
$$y = \log_3\left(5 + 4x - x^2\right).$$

6. Найдите все значения a, при которых уравнение
$$\frac{ax-5}{x-1} = x - 4$$
имеет единственное решение.

7. Найдите площадь области, заданной на координатной плоскости xOy системой неравенств
$$\begin{cases} x^2 + y^2 \le 8x - 7, \\ y + x \ge 1. \end{cases}$$

8. В основании пирамиды $SABC$ лежит треугольника ABC, в котором $AB = AC = 6\sqrt{10}$, BC = 12. Высота пирамиды проходит через вершину B. Радиус сферы, описанный вокруг пирамиды, равен 26. Найдите объем пирамиды.

9. Найдите все значения a, при которых уравнение
$$\sqrt{3 + 8\sin x} = \frac{4}{3}\sin x + a$$
имеет решение.

Вариант 2

(факультеты прикладной математики и экономико-математический)

1. Решите неравенство
$$\sqrt{3x + 4 - x^2} > \sqrt{3x - 5}.$$