

том дешевле второго на 20%. Сколько рублей стоит первый том?

3. Найдите сумму корней уравнения

$$4|x-1| + |x+3| = 10.$$

4. Вычислите

$$1,5 \log_8 18 - \log_2 (12\sqrt{2}).$$

5. Найдите сумму квадратов корней уравнения

$$x^2 - x = 9.$$

6. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 5x + y = 0,95, \\ 2x + 3y = 0,9. \end{cases}$$

В ответ запишите $2x + y$.

7. Пусть

$$f(x) = \frac{2x^2}{3} + \frac{36}{x} + 2 \sin(x-3) + 6 \cos(x-3) + 9 \ln(3x).$$

Тогда $f'(3) = \dots$

8. Если $\cos \alpha = 1/3$ и $0 < \alpha < \pi/2$, то $\sqrt{50} \operatorname{tg}(\alpha/2) = \dots$

9. Вычислите

$$\sqrt[3]{10\sqrt{15}} \cdot \sqrt{0,6} \cdot (1,5)^{-2/3}.$$

10. Диагонали трапеции равны 40 и 26, средняя линия равна 21. Найдите площадь трапеции.

11. Найдите количество целочисленных решений неравенства

$$x - 3 < \sqrt{x+17}.$$

12. Третий член арифметической прогрессии равен 5, а сумма членов с десятого по двадцатый равна 22. Найдите пятый член прогрессии.

13. Решите неравенство

$$2 \log_2(x/12) + 5 \log_{(x/6)}(x/12) \leq 6.$$

В ответ запишите количество целых решений.

14. Найдите наименьшее положительное решение (в градусах) уравнения

$$\cos 5^\circ \cos x + \cos 95^\circ \sin x = \cos 35^\circ.$$

15. Развертка боковой поверхности конуса дает сектор площади 54π и угловой меры $2\pi/3$ радиан. Пусть V — объем конуса, тогда $V/\pi = ?$

Вариант 2

(факультет экономики и менеджмента)

1. Решите уравнение

$$1,25 + \frac{x}{15} = 1,2x - \frac{1}{6}.$$

2. Костюм (пиджак и брюки) стоит 5400 рублей, причем пиджак на 25% дороже, чем брюки. Сколько рублей стоит пиджак?

3. Найдите сумму корней уравнения

$$|x+1| = 3x+7.$$

4. Вычислите $0,5 \log_{0,8} 5 - \log_{0,8} 2$.

5. Найдите сумму квадратов корней уравнения

$$2x^2 - 3x = 5.$$

6. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 4y + x = 2,4, \\ 2x + 3y = 3,8. \end{cases}$$

В ответ запишите $2x - y$.

7. Пусть

$$f(x) = x^{2 \log_x 5} + \frac{3x^2 + 2x + 8}{x} + 8\sqrt{2x}.$$

Тогда $f'(2) = \dots$

8. Если $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha = 3,125$, то $\sin 2\alpha = \dots$

9. Вычислите

$$\sqrt[3]{9,8\sqrt{3,5}} \cdot \sqrt{0,56} \cdot (1,25)^{-0,8}.$$

10. Диагонали граней прямоугольного параллелепипеда равны $\sqrt{52}$, $\sqrt{116}$, $\sqrt{136}$. Найдите объем параллелепипеда.

11. Найдите сумму целых решений неравенства

$$\frac{5x+1}{x^2+7x+10} \geq \frac{x-1}{x+2}.$$

12. Из пунктов A и B навстречу друг другу одновременно вышли пассажирский поезд и товарный состав. Через 4 часа они встретились. Поезд дошел до пункта B , простоял там 24 минуты и отправился обратно. Через 4 часа после выхода из B он догнал товарный состав. Найдите скорость поезда (км/ч), если $AB = 280$ км.

13. Решите неравенство

$$\log_4(9 - 6x + x^2) + \log_{0,5}(x+3) \leq -1.$$

В ответ запишите сумму целочисленных решений.

14. Найдите сумму целых чисел, принадлежащих области значений функции

$$f(x) = 1,5 \cdot 0,2^{\sqrt{0,2} \sin 3x} \cdot 25^{\sqrt{0,2} \cos 3x} - 3.$$

15. В окружность радиуса $3\sqrt{6}$ вписан остроугольный треугольник ABC . Найдите AC , если $AB = 8\sqrt{3}$, $BC = 12$.

Публикацию подготовил Е.Матвеев

Московский государственный технический университет им. Н.Э.Баумана

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

1. За три часа один лыжник прошел на 2,5 км больше другого, так как один километр он проходил на одну минуту быстрее. За сколько минут каждый лыжник проходил один километр?

2. Решите уравнение $\sin 6x = 2 \sin 2x$. Найдите его корни, принадлежащие промежутку $[0; \pi/2]$.

3. Решите уравнение

$$2^{3+\sqrt{x}} + 4 = 33\sqrt{2^{\sqrt{x}}}.$$

4. Решите неравенство

$$\log_x(49x^2 - 84x + 36) > 2.$$

5. Какая наибольшая площадь может быть у прямоугольника, координаты вершин которого удовлетворяют уравнению $|y| = (x-1)(4-x)$, $1 < x < 4$, а стороны параллельны координатным осям?

6. Найдите все значения a , при которых система уравнений

$$3(x - a)^2 = x - y - a + 2, \quad \frac{1 - \log_2 y}{1 - \log_2 x} = 1$$

имеет хотя бы одно решение, и решите ее при каждом a .

7. Найдите площадь сечения правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ плоскостью, параллельной диагонали BA_1 боковой грани ABB_1A_1 и проходящей через центр описанного около призмы шара и вершину основания A , если стороны основания призмы равны 2, а расстояние от центра основания призмы до секущей плоскости равно $1/5$.

Вариант 2

1. За вторую половину шестичасовой смены рабочий изготовил на 6 деталей больше, чем за первую, так как на обработку одной детали во второй половине смены тратил на 1 мин меньше, чем в первую. Сколько деталей изготовил рабочий за смену?

2. Решите уравнение $\cos 4x = 3 + 5 \sin 2x$ и укажите его корни, лежащие в промежутке $[-3\pi/2; \pi/2]$.

3. Решите уравнение

$$\log_4(10x - 54) = 1 + \log_2(x - 12).$$

4. Решите неравенство

$$\log_2 \frac{x-2}{x-3} + \log_2 x < 3.$$

5. Какую наименьшую площадь может иметь прямоугольный треугольник, гипотенуза которого лежит на касательной к графику функции $y = 6 + 2x^2$, катет лежит на оси x , а одна из вершин совпадает с точкой касания?

6. Найдите все значения a , при которых система уравнений

$$(x - a)^2 = 25(y + a - 6), \quad y^2 + \left(\frac{x-6}{|x|-6}\right)^2 = 1$$

имеет хотя бы одно решение, и решите ее при каждом a .

7. Основанием пирамиды $TABC$ служит равнобедренный прямоугольный треугольник с катетами AC и BC , равными 6, а ее высота совпадает с боковым ребром TC . Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, которая проходит через середину бокового ребра TA , пересекает высоту TC в точке P , так что $PC = 4PT$, и параллельна медиане основания AD , если расстояние от вершины пирамиды T до секущей плоскости равно $\sqrt{3/5}$.

ФИЗИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Непроводящее кольцо, имеющее равномерно распределенный заряд, может свободно вращаться вокруг своей оси (рис.1). Кольцо помещено в перпендикулярное плоскости кольца магнитное поле, индукция которого равномерно уменьшается до нуля. При этом кольцо начинает вращаться.

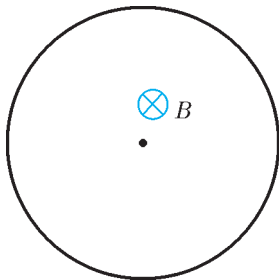


Рис. 1

Объясните, какие силы приводят кольцо в движение.

2. На рисунке 2 показан ход светового луча при переходе из среды 1 в среду 2. В какой среде скорость света больше? Ответ обоснуйте.

3. Точка начинает двигаться по оси x по закону $x = 5 + 4t - 2t^2$ (м). На каком расстоянии от начала координат скорость точки будет равна нулю?

4. Число радиоактивных ядер некоторого элемента уменьшилось в 8 раз за 6 дней. Чему равен период полураспада этого элемента (в днях)?

5. Один моль идеального одноатомного газа участвует в процессе, для которого абсолютная температура газа прямо пропорциональна квадрату его давления: $T = \alpha p^2$, где α – постоянная. Определите молярную теплоемкость газа в этом процессе.

6. В системе, состоящей из двух concentric сфер радиусами R и $3R$ (рис.3), внутренняя сфера соединена с землей через источник с ЭДС \mathcal{E} . Заряд внешней сферы $+2q$. На расстоянии $2R$ от центра системы находится точечный заряд $-q$. Зная величины q, \mathcal{E}, R , определите заряд внутренней сферы. Потенциал земли принять равным нулю.

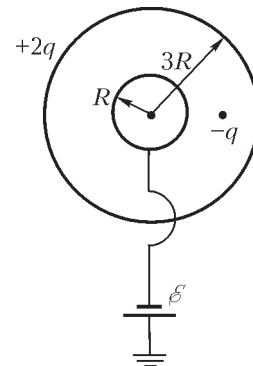


Рис. 3

7. Два одинаковых гладких упругих шарика A и B движутся во

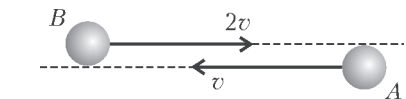


Рис. 4

встречных направлениях со скоростями v и $2v$, причем прямые, проходящие через центры каждого из шариков в направлении их движения, касаются другого шарика (рис.4). Найдите, под каким углом к первоначальному направлению будет двигаться шарик A после соударения.

Вариант 2

1. Тело массой $m = 1$ кг брошено под углом к горизонту. За все время полета его импульс изменился на $\Delta p = 20$ кг·м/с. Пренебрегая сопротивлением воздуха, определите наибольшую высоту подъема тела.

2. Найдите разность потенциалов на клеммах источника постоянного тока, если внешнее сопротивление замкнутой цепи в 5 раз больше внутреннего сопротивления источника. ЭДС источника тока $\mathcal{E} = 6$ В.

3. Стержень движется в продольном направлении с постоянной скоростью относительно некоторой инерциальной системы отсчета. При каком значении скорости (в долях скорости света) длина стержня в этой системе отсчета будет в 1,66 раза меньше его собственной длины?

4. В опыте по фотоэффекту на металлическую пластину падает свет с длиной волны $\lambda = 420$ нм. Фототок прекращается при задерживающей разности потенциалов $U_3 = 0,95$ В. Определите работу выхода электрона из металла.

5. Два груза массами $3m$ и m связаны невесомой нерастяжимой нитью, переброшенной через неподвижный блок (рис.5). В начальный момент груз массой m удерживают, прижимая его к столу, затем отпускают. На какую максимальную высоту подни-

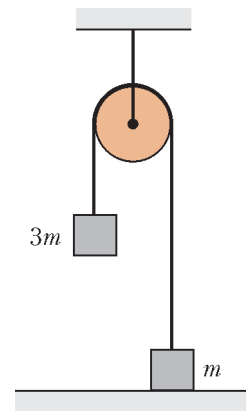


Рис. 5

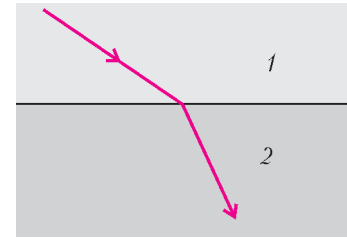


Рис. 2

мется этот груз над столом, если при ударе груза массой $3m$ о стол выделяется количество теплоты Q ? Удар абсолютно неупругий. Массой блока и силами трения в блоке пренебречь.

6. В горизонтальном закрепленном цилиндрическом сосуде, закрытом поршнем массой $M = 1$ кг, находится идеальный одноатомный газ. Газ нагревают. При этом поршень, двигаясь равноускоренно, приобретает скорость $v = 4$ м/с. Найдите количество теплоты, сообщенное газу. Теплоемкостью сосуда и поршня, а также внешним давлением и трением пренебречь.

7. Горизонтальный контур образован двумя замкнутыми на катушку индуктивностью L параллельными проводами, находящимися на расстоянии h друг от друга (рис.6). По проводам без трения может скользить перемычка массой m . Контур помещен в вертикальное однородное магнитное поле с индукцией B . В начальный момент времени неподвижной перемычке сообщают скорость v_0 . Определите расстояние, которое пройдет перемычка до первой остановки, если сопротивлением всех элементов можно пренебречь.

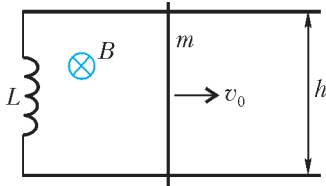


Рис. 6

Публикацию подготовили Л.Паршев, Ю.Струков

Московский инженерно-физический институт

(олимпиада Федерального агентства по атомной энергии РФ)

МАТЕМАТИКА

Вариант 1

1. Куплены апельсины на сумму 300 рублей и яблоки на сумму 400 рублей. Яблок куплено на 2 кг меньше, чем апельсинов, и по цене (за 1 кг) на 20 рублей больше. Сколько куплено яблок?

2. Решите уравнение

$$\sqrt{1 + 11 \cos x} = 2 \sin x.$$

3. Решите неравенство

$$\sqrt{16^x - 2} \cdot \frac{25^x - 5 \cdot 15^x + 6 \cdot 9^x}{2x - 1} \geq 0.$$

4. а) На плоскости xOy укажите геометрическое место точек, удовлетворяющих неравенству $|x - \pi| + |y - 2\pi| \leq \pi$. Чему равно наименьшее значение суммы $x + y$?

б) При каждом значении $a \in \mathbf{R}$ решите систему неравенств

$$\begin{cases} |x - \pi| + |a - 2\pi| \leq \pi, \\ \cos^2 x + \sin^2 \frac{a}{2} < 1. \end{cases}$$

5. Точки K и L лежат, соответственно, на смежных ребрах B_1C_1 и C_1D_1 верхнего основания $A_1B_1C_1D_1$ прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1B_1C_1D_1$ ($AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1 \parallel DD_1$), а точки M и N лежат, соответственно, на смежных ребрах AD и AB нижнего основания $ABCD$. Известно, что $AB = AD$, $CC_1 = 4\sqrt{2}$. Отрезки KL и MN параллельны диагонали основания $BD = 14$. Расстояние от MN до точки A равно 6, а расстояние от KL до точки C_1 равно a . Точка $P \in CC_1$, $C_1P = 3$. Найдите:

а) площадь полной поверхности пирамиды C_1KLP в случае $a = 4$;

б) площадь сечения параллелепипеда плоскостью, проходящей через прямые KL и MN , в случае $a = 4$;

в) тангенс угла наклона плоскости сечения к плоскости основания при условии, что площадь сечения параллелепипеда плоскостью, проходящей через прямые KL и MN , максимальна.

Вариант 2

1. Сумма цифр натурального трехзначного числа равна 18, а цифра сотен этого числа на единицу меньше цифры десятков. Если в этом числе поменять местами цифры сотен и единиц, то разность между полученным и исходным числом будет равна 495. Найдите исходное число.

2. Решите уравнение

$$\sqrt{2 - x} = -x - 3.$$

3. Решите неравенство

$$\frac{\log_3^2 x - (\log_3 10) \cdot \log_3 x + (\log_3 2) \cdot \log_3 5}{x - 7} \leq 0.$$

4. Найдите производную и критические точки функции

$$f(x) = -\frac{5}{2 \sin^2 x + \sqrt{2} \sin x} \quad (x \in \mathbf{R}).$$

При каждом значении $a \in \mathbf{R}$ найдите x , при котором функция $f(x)$ достигает наибольшего значения на отрезке $\left[a; a + \frac{3\pi}{8} \right]$, если известно, что $f(x)$ определена во всех его точках.

5. В основании треугольной пирамиды $SABC$ лежит правильный треугольник ABC со стороной $6\sqrt{6}$, проекция вершины S на плоскость основания пирамиды есть середина ребра AB , а $SA = 3\sqrt{22}$. На ребре BC взята точка E так, что $CE : EB = 5 : 1$. Через точку E параллельно ребру AB проводится сечение пирамиды. а) Найдите объем пирамиды. б) Какие фигуры получаются в указанном сечении? в) Найдите минимально возможную площадь сечения.

ФИЗИКА

Вариант 1

1. Одну пятую часть пути автомобиль ехал со скоростью $v_1 = 40$ км/ч, а оставшийся путь — со скоростью $v_2 = 60$ км/ч. Найдите среднюю скорость автомобиля на всем пути.

2. Баллон, содержащий некоторое количество кислорода, разрывается при испытаниях при температуре $t_1 = 727$ °С. Такой же баллон, содержащий смесь вдвое меньшего количества кислорода и вчетверо меньшего (по массе) количества неизвестного газа, разрывается при температуре $t_2 = 127$ °С. Найдите молярную массу неизвестного газа. Молярная масса кислорода $M_{O_2} = 32$ г/моль.

3. Три воздушных конденсатора с емкостями C , $2C$ и $3C$ соединили последовательно и подключили к источнику напряжения U . Затем источник отключили, а конденсаторы с емкостями $2C$ и $3C$ опустили в жидкий диэлектрик с диэлектрической проницаемостью ϵ . Найдите напряжение на батарее конденсаторов после этого.

4. На передний край тележки массой M , движущейся со скоростью v_0 по гладкой горизонтальной поверхности, кладут брусок массой m . Начальная скорость бруска относительно земли равна нулю. Какой должна быть длина тележки, чтобы брусок в дальнейшем не упал с нее? Коэффициент трения между бруском и тележкой равен μ .