Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 1 мая 2008 года по адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» №1–2008» и номера задач, решения которых Вы посылаете, например «М2071» или «Ф2078». В графе «От кого» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем Вашим адресом и необходимый набор марок (в этом конверте Вы получите результаты проверки решений).

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с Вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «Задачник «Кванта», новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором Вы учитесь.

Задачи М2073, М2075 и М2078 предлагались на III Всероссийской олимпиаде по геометрии имени И.Ф.Шарыгина.

Задачи М2071–М2080, Ф2078–Ф2087

М2071. Универсальным числом $U(n)$ назовем минимальное натуральное число, из которого вычеркиванием цифр можно получить любое натуральное число от 1 до n. Сколько цифр имеет число $U(2008)$?

С.Волчёнков

М2072. Найдите $(n+1)$-ю цифру после запятой в десятичной записи числа $\sqrt{\underbrace{999\ldots99}_{2n\text{ девяток}}}$.

Я.Алиев

М2073. Даны две окружности, пересекающиеся в точках P и Q. Пусть C – произвольная точка одной из окружностей, отличная от P и Q; точки A и B – вторые точки пересечения прямых CP и CQ с другой окружностью. Найдите геометрическое место центров описанных окружностей треугольников ABC.

А. Заславский

М2074. Посетитель обходит залы музея по следующему правилу. Находясь в некотором зале, он выбирает среди всех соседних залов тот, который до этого был посещен им меньшее число раз, и переходит в него (если таких соседних залов несколько, то он переходит в любой из них). Верно ли, что посетитель через некоторое время обойдет все залы? (Известно, что из любого зала музея можно пройти в любой другой зал.)

С.Волчёнков

М2075. Каждое ребро выпуклого многогранника параллельно перенесли на вектор так, что ребра образовали каркас нового выпуклого многогранника. Обязательно ли он равен исходному?

А.Заславский

М2076. Найдите все функции $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$, удовлетворяющие при всех $x\neq 0$ и y равенству

$$xf(y)-yf(x)=f\left(\frac{y}{x}\right).$$

Э.Туркевич

М2077. Найдите наименьшее натуральное число k, обладающее следующим свойством: в любой таблице $n\times n$, заполненной действительными числами, можно увеличить не более k чисел так, чтобы суммы чисел во всех строках и столбцах стали равными.

П.Кожевников

М2078. Точки A', B', C' – основания высот остроугольного треугольника ABC. Окружность с центром B и радиусом BB' пересекают прямую $A'C'$ в точках K и L (K и A находятся по одну сторону от прямой BB'). Докажите, что точка пересечения прямых AK и CL лежит на прямой BO, где O – центр описанной окружности треугольника ABC.

В.Протасов

М2079. Существует ли такая тройка попарно взаимно простых натуральных чисел x, y, z, больших 10^{10}, что $x^8+y^8+z^8$ делится на $x^4+y^4+z^4$?

В.Сендеров

М2080*. Последовательность векторов $\{\vec{e}_n\}$ на плоскости задана условиями: $\vec{e}_1=(0;1)$, $\vec{e}_2=(1;0)$, $\vec{e}_{n+2}=\vec{e}_{n+1}+\vec{e}_n$ при $n\geq 1$. Отложим от начала координат все векторы, являющиеся суммами нескольких различных векторов из последовательности $\{\vec{e}_n\}$. Докажите, что множество концов отложенных векторов состоит из всех точек с целыми неотрицательными координатами, лежащих внутри некоторой полосы между параллельными прямыми.

И.Пушкарев

Ф2078. Из листа фанеры вырезали кусок в форме прямоугольного треугольника с катетами 60 см и 80 см, масса этого куска равна 2 кг. Кусок фанеры подвесили к потолку при помощи двух одинаковых легких нитей, расстояние между точками прикрепления нитей к потолку равно 100 см (рис.1). Найдите силы натяжения нитей.

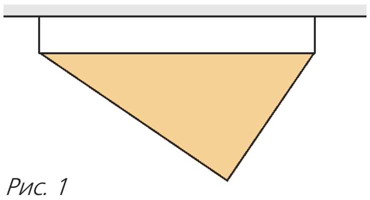

Рис. 1

А.Простов

Ф2079. Клин массой M с углом α при основании находится на гладком горизонтальном столе. На наклонной грани клина стоит тележка массой m, к ней привязана легкая нить, переброшенная через блок, закрепленный осью в вершине клина (рис.2). Свободный конец нити привязан к стене. Вначале клин удерживают, затем отпускают. С каким ускорением он начнет двигаться?

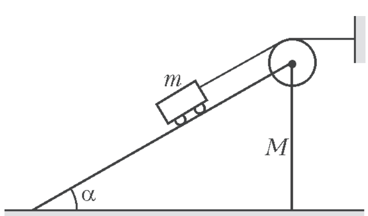

Рис. 2

Р.Клинов

Ф2080. Две большие параллельные пластины двигают навстречу друг другу с одинаковыми скоростями v_0. Между пластинами находится очень маленький упругий шарик. В тот момент когда одна из пластин ударяется о него, расстояние между пластинами составляет L. Считая удары абсолютно упругими, найдите скорость шарика в тот момент, когда расстояние между пластинами составит $L/5$. Действием силы тяжести пренебречь. Скорость шарика перед первым ударом равна нулю.

А.Шариков

Ф2081. В комнате, заполненной воздухом, находится пустой кубический сосуд объемом 100 л. В стенке сосуда открывается маленькое отверстие площадью 1 см^2 и через 0,001 с закрывается. Оцените количество молекул, попавших в сосуд за это время. Оцените также давление, которое установится в сосуде. Стенки сосуда тепло не проводят, теплоемкостью стенок можно пренебречь.

А.Повторов

Ф2082. Моль гелия в сосуде расширяется от начального объема $V_1 = 10$ л до конечного объема $V_2 = 50$ л, при этом давление газа в процессе меняется так, что $pV^2 =$ const. Начальная температура газа $T_1 = 300$ К. Найдите конечную температуру. Найдите также работу газа в процессе (если не получится найти точно, посчитайте приближенно) и полученное в процессе количество теплоты.

Р.Газов

Ф2083. К батарейке подключают амперметр (вообще говоря, так поступать не следует!) – он показывает силу тока 1 А. Параллельно подключают еще один такой же амперметр – теперь они в сумме показывают 1,2 А. Сколько в сумме покажут 2008 таких же амперметров, если их подключить к батарейке параллельно?

Т.Оков

Ф2084. Одна из квадратных пластин плоского конденсатора закреплена, а вторая может свободно смещаться параллельно, оставаясь на расстоянии d от первой. Масса подвижной пластины M, площадь каждой из пластин S. Конденсатор зарядили до напряжения U_0. Сдвинем теперь подвижную пластину относительно положения равновесия. Найдите период малых колебаний этой пластины. Зависит ли он от того, как мы сдвинули пластину? Сила тяжести отсутствует.

З.Рафаилов

Ф2085. Катушка индуктивностью L и резистор сопротивлением R соединены параллельно, к выводам цепочки очень давно подключен внешний источник, ток в его цепи равен I_0. Ток в цепи источника очень быстро увеличивают в 3 раза. Какое количество теплоты выделится в резисторе после этого? Какой полный заряд протечет через резистор?

А.Зильберман

Ф2086. Две одинаковые катушки индуктивности соединены последовательно. Выводы получившейся цепочки подключены к звуковому генератору последовательно с низковольтной лампочкой для фонарика. Параллельно одной из катушек подключают конденсатор и начинают изменять в широких пределах частоту генератора. На частоте $f = 600$ Гц наблюдается четкий минимум свечения нити накала лампочки. На какой частоте (частотах) лампочка будет гореть ярче всего?

Р.Старов

Ф2087. Небольшая плосковыпуклая линза отштампована из прозрачной пластмассы. Форма выпуклой поверхности аккуратно рассчитана при помощи ЭВМ, она отличается от сферической (сферическая поверхность «собирает» лучи параллельного пучка в фокусе только приблизительно). Диаметр плоской поверхности линзы 2 см, толщина линзы 0,5 см. Найдите фокусное расстояние линзы. Коэффициент преломления пластмассы 1,5.

З.Очков

Решения задач М2051–М2055, Ф2063–Ф2072

М2051. *Пусть $a, b, c > 0$; $(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b) = abc$. Докажите, что $a = b = c$.*

Положим $x = a + b - c$, $y = b + c - a$, $z = c + a - b$. Так как $x + y = 2b > 0$, $y + z = 2c > 0$, $z + x = 2a > 0$, то среди чисел x, y, z нет двух отрицательных. Кроме того, по условию $xyz = abc > 0$, значит, все три числа x, y, z положительны. Имеем:

$$xyz = \frac{z+x}{2}\frac{x+y}{2}\frac{y+z}{2} \geq \sqrt{zx}\sqrt{xy}\sqrt{yz} = xyz.$$