Сто восемьдесят лет тому назад, 23(11) февраля 1826 года состоялось первое публичное выступление Николая Ивановича Лобачевского с изложением основ совершенно новой, неевклидовой геометрии.

Сегодня мы воспроизводим статью академика Александра Даниловича Александрова, опубликованную в «Кванте» в 1982 году и приуроченную к 190-летию со дня рождения Н.И.Лобачевского.

Один из крупнейших геометров двадцатого века А.Д.Александров, пожалуй, как никто другой смог не только профессионально передать суть открытия, но и эмоционально и ярко раскрыть драматизм столкновения идей, характеров. И автор статьи – Александров и ее герой – Лобачевский были выдающимися представителями российской науки. Обладая могучим математическим талантом, и тот и другой явились основоположниками фундаментальных геометрических теорий, навсегда вписав свои имена в историю мировой науки. Оба, обладая твердым характером и яростным темпераментом, страстно отстаивали науку и образование от агрессивной невежественности «сильных мира сего». На протяжении многих лет являясь ректорами ведущих университетов, и Николай Иванович и Александр Данилович оставили неизгладимый след в судьбе Казанского и Ленинградского университетов, которые они возглавляли.

Тупость и гений

А.АЛЕКСАНДРОВ

Всякий, кто занимался математикой – решая задачи, доказывая теоремы или формируя новые концепции, наверное, имел случай не раз поражаться своей тупости. Думал, думал над задачей – не решил, а узнал решение – подумал: какой дурак! как я не сообразил? А то думал, думал – решил и рад, а все же, бывает, подумаешь: тупица! как я раньше не сообразил?

У ученых-математиков бывает так: думаешь, думаешь над теоремой, иногда долго, иной раз не год и не два, ищешь доказательство и так и сяк, и с этого конца и с другого, ан не выходит, а вышло – удивляешься: дурак! как я раньше не сообразил? А уж о новых концепциях и говорить не приходится: занимаешься какими-нибудь вопросами, а не приходит в голову посмотреть на них с более общей точки зрения или с другой, так сказать, стороны; не формулируются поэтому общие понятия, проясняющие круг вопросов. А потом, если – какое счастье! – сообразил, то удивляешься: как это раньше тебе в голову не пришло? Ну а если сообразил кто-то другой, то как ни радуешься успеху науки, а зло берет: как это я, тупица, сам не додумался!

Поиски решения нестандартной задачи, как и доказательства теоремы, состоят обычно в том, что приходит в голову одно решение или доказательство – неверное! потом – другое: «гениальная идея!» – неверно! третья попытка – неверно! еще бросок на задачу – промах… И если задача или теорема трудная, то так может длиться долго.

Помню, предложил я Иосифу Либерману одну теорему доказать, была у меня хорошая гипотеза. Тогда он был студентом и стал бы крупным геометром, если бы не война: он погиб в августе 1941 года, а в июле в форме морского офицера защитил диссертацию – уже на втором году аспирантуры – такой был талант. Так вот, предложил я ему доказать теорему. Встречаемся через некоторое время, он говорит: доказал, и рассказывает. А я его зацепил: в этом месте почему вы так утверждаете? Ошибка – ушел Иосиф. Опять встречаемся – исправил он ошибку, но дальше опять ошибки. Так я его почти целый год гонял. Но потом он еще подучил топологию и доказал не только мою теорему, но и более сильную, которую уже сам сформулировал.

Таких историй долгих поисков можно рассказать множество. Вот, например, придумал я в 1937 году одну теорему, очень хорошую теорему, и доказал ее при некоторых дополнительных предположениях. Естественно, встал вопрос доказать ее без этих предположений. Вопрос стоит до сих пор – 45 лет. Очень я старался ее доказать, и другие очень старались, да не вышло.

И так во всех науках. Бьется филолог над расшифровкой и толкованием текста – и так и сяк... А потом, когда сообразил, тоже, наверное, удивляется, вроде нас, математиков: какой дурак! как это я раньше не сообразил? оно ведь очевидно!

Словом, тот, кто думал, вдумывался, искал, тот знает, насколько туп и несообразителен бывает человек. Сообразительностью своей любуются обычно люди, которым не приходилось упорно вдумываться и искать,– легко дается удача тому, кто не ставит перед собою трудных задач, серьезных целей.

Что такое геометрия Лобачевского

И вот, я хочу рассказать историю о человеческой тупости и о гении, историю, несравненно более значительную, чем те, о которых я только что говорил. Разговор пойдет об одном из величайших завоеваний человеческого духа, в котором участвовали первоклассные таланты и подлинные гении без преувеличений. Речь – о неевклидовой геометрии, о ее более чем 2000-летней истории.

История эта очень интересна и поучительна. С ней связано много такого, что касается не математики самой по себе, а свойств, путей и страстей человеческих. Но, прежде чем говорить об истории, надо бы объяснить, что такое неевклидова геометрия, или геометрия Лобачевского.

Ответ, конечно, всем известен: это – геометрия, полученная из геометрии Евклида изменением одной только аксиомы параллельных. Именно, у Лобачевского принимается за аксиому, что через точку, не лежащую на данной прямой, проходит по крайней мере две прямые, параллельные данной (т.е. лежащие с ней в одной плоскости и ее не пересекающие). Утверждения, или, другими словами, теоремы, которые выводятся из так измененных оснований геометрии Евклида, и образуют геометрию Любачевского. Все это, как мы видим, «очень просто» и говорится коротко и ясно. Трудность, однако, в том, что аксиома Лобачевского не соответствует нашему наглядному представлению. Поэтому и выводы из нее – многие теоремы геометрии Лобачевского – оказываются вовсе странными и невообразимыми. Реальный смысл этой геометрии из данного выше ее простого формального определения совершенно не ясен.

Сам Лобачевский называл свою геометрию *воображаемой.* Он смотрел на нее как на теорию, которая могла бы оказаться приложимой к реальному пространству. Но только «могла бы» – реальных же приложений не было. Поэтому и логическая непротиворечивость этой геометрии оставалась неустановленной. Ведь как ни развивал ее Лобачевский, а могло бы оказаться, что дальше все-таки обнаружится противоречие.

Реальный смысл и логическая непротиворечивость геометрии Лобачевского вытекают из ее простой модели, придуманной немецким математиком Ф. Клейном. В этой модели за «плоскость» принимается внутренность какого-либо круга (рис.1), за «точки»– точки этой внутренности, за «прямые» – хорды, конечно, с исключением концов, поскольку рассматривается только внутренность круга. За «перемещения» принимаются преобразования круга, переводящие его в себя и хорды – в хорды. Соответственно, «конгруэнтными» называются фигуры, переводимые друг в друга такими преобразованиями.

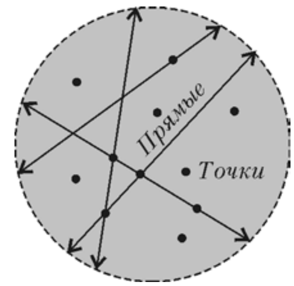

Рис. 1

Всякая теорема планиметрии Лобачевского является в этой модели теоремой геометрии Евклида и, обратно, всякая теорема геометрии Евклида, говорящая о фигурах внутри данного круга, является теоремой геометрии Лобачевского. Это общее утверждение доказывается проверкой справедливости в модели аксиом геометрии Лобачевского. То, что аксиома параллельных не выполняется в этой модели, видно непосредственно: на рисунке 2 через точку C, не лежащую на «прямой» (т.е. на хорде) AB, проходит бесконечно много «прямых» (хорд), не пересекающих AB. Поэтому, если в геометрии Лобачевского имеется противоречие, то это же противоречие (вернее, его перевод на «язык в круге») имеется и в геометрии Евклида.

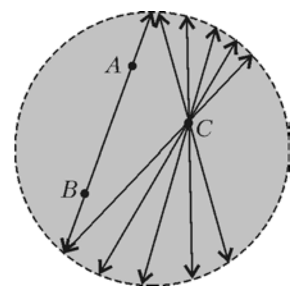

Рис. 2

Далее, всякая теорема геометрии Лобачевского описывает в модели Клейна некоторые факты, имеющие место внутри круга. Именно факты, если мы берем не абстрактный круг, а реальный круг и реальные хорды и понимаем теоремы как утверждения об этих реальных вещах, взятые, конечно, с той точностью, которая доступна для наших построений. Таким образом, геометрия Лобачевского имеет вполне реальный смысл с той точностью, с какой вообще имеет смысл геометрия в применении к реальным телам.

Стало быть, геометрия Лобачевского настолько непротиворечива, насколько непротиворечива геометрия Евклида, и имеет в такой же степени реальный, экспериментально устанавливаемый смысл.

От Евклида до Лобачевского

Сам Евклид (4 в. до н.э.) принимал в качестве аксиомы параллельных следующее предложение (у Евклида оно было «пятым постулатом»):

Если прямая пересекает две прямые и образует внутренние односторонние углы в сумме меньше двух прямых, то при неограниченном продолжении этих двух прямых они пересекутся с той стороны, где углы меньше двух прямых.

Мы привели эту формулировку Евклида только затем, чтобы можно было убедиться в ее сложности.

Другие постулаты гораздо проще и формулируются гораздо короче, начиная с первого, согласно которому,через всякие две точки можно провести прямую.

Естественно возникали попытки освободиться от сложного пятого постулата, вывести его из других основных посылок геометрии. Я думаю, что сам Евклид предпринимал такие попытки или, во всяком случае, в его время уже были такие попытки. Известно упоминание у арабских авторов не дошедшего до нас сочинения Архимеда (3 в. до н.э.) «О параллельных линиях», где, надо полагать, пятый постулат выводился из каких-то более простых посылок.

Попытки доказать пятый постулат продолжались с тех пор в течение 2000 лет. Их предпринимали многие ученые. Вот неполный перечень: греки Птолемей (II в., тот самый Птолемей, «которого система») и Прокл (V в.), араб ал-Хайсам (X в.), перс (или таджик) Омар Хайям (XI в.– начало XII в., тот самый Хайям, который известен как великий поэт), азербайджанец ат-Туси (XIII в.), немец Клавий-Шлюссель (1514 г.; здесь и дальше это дата работы), итальянцы Катальди (1603), Борелли (1658) и Витале (1680), англичанин Валлис (1663), итальянец Саккери (1733), немец Ламберт (1766), французы Бертран (1778) и Лежандр (1794, 1823), русский Гурьев (1798). Все их попытки сводились к тому, что пятый постулат выводился из какого-нибудь другого положения. При этом многие не замечали этого, считая, что доказательство им удалось. Другие, более проникновенные и критичные, явно формулировали то положение, из которого выводили пятый постулат, как это сделал, например, Омар Хайям.

Напряжение поисков доказательства с бурным развитием математики в XVII–XVIII веках возрастало. Значительные усилия сделал итальянский монах, преподаватель математики и грамматики Джироламо Саккери, труд которого с попыткой доказательства пятого постулата появился в 1733 году – в год его смерти. Он называется «Евклид, очищенный от всех пятен, или же геометрическая попытка установить первые начала всей геометрии». Отправляясь от работ своих предшественников, Саккери пытается доказать пятый постулат от противного – приняв предположение, равносильное отрицанию пятого постулата, он выводил из него следствия, стремясь прийти к противоречию. Но так как отрицание пятого постулата есть аксиома Лобачевского, то выводы, которые получал Саккери, были не более и не менее как теоремами геометрии Лобачевского. Иначе говоря, Саккери развивал новую геометрию, не понимая, однако, того, что делает. К противоречию он не пришел, но все же заключил, что ему удалось доказать пятый постулат, хотя, по-видимому, он не был в этом вполне уверен. Он как бы убеждал сам себя, когда писал о гипотезе, равносильной отрицанию пятого постулата, что он «вырвал эту зловредную гипотезу с корнем».

Из довольно многочисленных (55) появившихся в XVIII веке сочинений по теории параллельных особенно выделяется написанная в 1766 году «Теория параллельных» Иоганна Ламберта, немецкого математика, физика и астронома. Ведя доказательство пятого постулата от противного, Ламберт вывел из его отрицания много следствий. Он, можно сказать, в значительной мере построил основы геометрии Лобачевского. В его выводах не было противоречия, и он не подумал, что нашел его, как это делали почти все его предшественники. Ламберт даже высказал мысль, что он «почти должен сделать вывод», что опровергаемая им гипотеза «имеет место на какой-то мнимой сфере». Но все же он остался уверен, что геометрия, основанная на отрицании пятого постулата, невозможна. Его работа не давала, однако, доказательства этому убеждению. Поэтому, надо думать, он остался ею недоволен и не опубликовал ее. Она была издана только в 1786 году – через 9 лет после его смерти и через 20 лет после того, как она была написана. В общем, Ламберт очень близко подошел к открытию новой геометрии, но не сделал его.

Вплотную подошли к пониманию возможности неевклидовой геометрии немецкие математики Швейкарт (1818) и Тауринус (1825), но ясно выраженной мысли, что намечаемая ими теория будет столь же логически законной, как и геометрия Евклида, они все же не высказали.

Гаусс, по его собственному свидетельству, занимался теорией параллельных с 1792 года и, как видно из его переписки, постепенно приходил к убеждению, что доказательство пятого постулата невозможно. Так, в 1817 году в письме к Ольберсу он писал: «Я прихожу все более к убеждению, что необходимость нашей геометрии не может быть доказана, по крайней мере, человеческим рассудком и для человеческого рассудка». Раз он пишет «прихожу все более», то, значит, еще не пришел окончательно. Далее он продолжает: «Может быть, в другой жизни мы придем к другим взглядам на природу пространства, которые нам теперь недоступны. До тех пор геометрию приходится ставить не в один ранг с арифметикой, существующей чисто априори, а скорее с механикой». В то время он далеко развил неевклидову геометрию, но только в 1824 году в письме к Тауринусу он написал определенно, что неевклидова геометрия, «в которой сумма углов треугольника меньше 180°, совершенно последовательна» и что он «развил ее для себя совершенно удовлетворительно». Однако только в 1831 году он взялся за то, чтобы изложить, хотя бы кратко, свои выводы, но за всю свою жизнь так ничего и не опубликовал по поводу неевклидовой геометрии. Он боялся подорвать свой научный авторитет.

Но когда Гаусс писал все это, уже нашелся человек, который не только совершенно удовлетворительно развил геометрию, отрицающую пятый постулат, и не только пришел к убеждению, что эта геометрия совершенно последовательна, но, не убоявшись ничьего крика, доложил все это научному собранию. Это был Николай Иванович Лобачевский, который пришел к убеждению о возможности неевклидовой геометрии еще в 1824 году и представил доклад с изложением ее начал физико-математическому факультету Казанского университета 23 (11) февраля 1826 года; опубликовал он его в расширенном виде в работе «О началах геометрии» в ряде выпусков «Казанского вестника», научного издания Казанского университета, с февраля 1829 по август 1830 года.

В 1835–1838 годах Лобачевский публикует более развитое изложение своей теории «Новые начала геометрии с полной теорией параллельных», в предисловии к которому пишет: «Напрасное старание со времен Евклида, в продолжении двух тысяч лет, заставило меня подозревать, что в самих понятиях еще не заключается той истины, которую хотели доказывать и которую проверить, подобно другим физическим законам, могут лишь опыты, каковы, например, астрономические наблюдения». Для Лобачевского вопрос об истинности той или иной геометрии был, стало быть, вопросом опыта; свою геометрию он рассматривал как возможную теорию свойств реального пространства, т.е. свойств структуры соответствующих отношений материальных тел и явлений.

Почти одновременно с Лобачевским – в 1825 году – к той же геометрии пришел молодой венгерский математик Янош Больяй (Бойаи). Свои выводы Янош Больяй изложил в 1832 году в качестве приложения (Аппендикса) к учебнику геометрии своего отца Фаркаша Больяй. Фаркаш Больяй послал учебник Гауссу. Тот, одобрительно отозвавшись о результатах Яноша, написал вместе с тем, что все это ему давно известно. Янош, понимавший значение своих открытий, решил, что Гаусс просто приписал их себе. Он надолго прекратил свои занятия неевклидовой геометрией.

Но Лобачевский продолжал разрабатывать свою геометрию и публиковать работы с ее изложением вплоть до самой смерти.

Нельзя удивляться, что новая геометрия могла казаться невозможной. Посмотрите на рисунок 3: ясно, что прямая CM, если ее достаточно далеко продолжить, обязательно пересечет прямую AB. Допущение, будто через одну точку проходят две прямые, параллельные данной, совершенно противоречит наглядному представлению. Такое допущение кажется просто нелепым. Никакой неевклидовой геометрии быть не может! Тем более нужно отдать должное смелости мысли Лобачевского и Больяй, которые решились допустить «нелепость». Нелепость с точки зрения наглядного представления – да, но с точки зрения логики – другое дело. Как ни кажется наглядно нелепым допущение многих параллелей, логически оно допустимо. Нужна была большая смелость мысли, чтобы твердо убедиться в этом, хотя теперь, когда найден простой смысл неевклидовой геометрии, никакой смелости мысли не нужно – достаточно самой небольшой способности к отвлеченному мышлению.

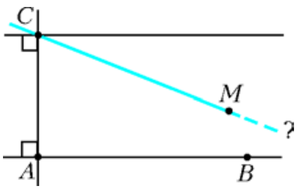

Рис. 3

От убеждения к доказательству

Итак, Лобачевский и Больяй публично, а Гаусс в письмах выразили убеждение в правомерности неевклидовой геометрии и далеко развили ее. Однако это убеждение основывалось только на том, что в полученных выводах не было противоречий. Но ведь можно было бы думать, что в дальнейших выводах противоречия все же появятся. Реальный смысл новой геометрии оставался совершенно неясным. И пока он не был найден, великое открытие все же висело в воздухе – геометрия Лобачевского оставалась не более чем воображаемой.

В 1839–1840 годах появились две работы профессора Дерптского (ныне Тартуского) университета Ф.Миндинга, в которых он исследовал некоторые специальные поверхности – поверхности постоянной отрицательной кривизны. В этих работах по существу заключался вывод, что геометрия на таких поверхностях есть не что иное как геометрия Лобачевского. Но этот вывод там не был явно высказан. Интересно, что двумя годами раньше в том же журнале, где были напечатаны работы Миндинга, была опубликована одна из работ Лобачевского!

В 1854 году, при вступлении на должность профессора Геттингенского университета, Бернхард Риман, как это полагалось, прочел пробную лекцию. Лекция называлась «О гипотезах, лежащих в основаниях геометрии». Она содержала необычайное богатство плодотворных идей – от общей концепции математического пространства до предвидения того, что стало потом общей теорией относительности. Кроме того, в лекции была намечена общая теория некоторого типа пространств (называемых теперь *римановыми*), которые включают, как простейшие частные случаи, пространства Евклида, Лобачевского и так называемые сферические пространства. Риман дал чисто аналитическое определение этих пространств; это по существу означало, что геометрия Лобачевского в такой же степени непротиворечива, как и анализ.

Но этого никто не понял, не заметил. Лекция Римана осталась непонятой. И только слушавший ее старый, 77-летний Гаусс ушел, как свидетельствуют, после лекции в глубокой задумчивости. Лекция Римана не была сразу опубликована, ее издали только в 1868 году, через 2 года после его смерти. И тогда она сразу произвела величайшее впечатление, вызвала бурное развитие намеченной в ней теории.

Тогда же, в 1868 году, итальянский математик Бельтрами сделал то, до чего дошел, но чего не сказал Миндинг,– он показал, что геометрия Лобачевского выполняется на поверхностях постоянной отрицательной кривизны.

Однако выводы Бельтрами были аналитическими, далекими от элементарной геометрии, от Евклида. Лишь в 1871 году Клейн заметил ту модель на круге, о которой шла речь в начале статьи. Позднее Пуанкаре нашел другую интересную модель, связанную с комплексными числами.

Так через 40 лет после опубликования первых работ Лобачевского и Больяй их убеждение было доказано, и их геометрия получила всеобщее признание.

(Продолжение следует)