Заряженные частицы в магнитном поле

В.МОЖАЕВ

Выражение для силы, действующей на движущуюся в электромагнитном поле заряженную частицу, было получено Х.Лоренцем. В векторной форме это выражение имеет вид

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\left[\vec{v}\vec{B}\right],$$

где q – заряд частицы, $\vec{E}$ – напряженность электрического поля, $\vec{B}$ – магнитная индукция, $\vec{v}$ – скорость частицы относительно той системы координат, в которой измеряются величины $\vec{F}$, $\vec{E}$ и $\vec{B}$.

Первый член в правой частиц этой формулы – это сила, действующая на заряженную частицу в электрическом поле, а второй – в магнитном. Выражение для магнитной части силы Лоренца записано в виде векторного произведения: $\left[\vec{v}\vec{B}\right]$ – это вектор, который перпендикулярен векторам $\vec{v}$ и $\vec{B}$, а его абсолютная величина равна

$$\left|\left[\vec{v}\vec{B}\right]\right| = vB\sin\alpha,$$

где α – угол между векторами $\vec{v}$ и $\vec{B}$.

Так как сила, действующая со стороны магнитного поля на частицу, перпендикулярна $\vec{v}$, то она не совершает работы, а только искривляет траекторно движения частицы, не изменяя ее энергии. Это свойство магнитной составляющей силы Лоренца широко используется в различных приборах и устройствах: например, в ускорителях для удержания заряженных частиц на заданной орбите, в камере Вильсона для наблюдения следов (треков) заряженных частиц, в масс-спектрометрах для разделения ионизованных молекул и атомов по их массам, в магнитных линзах для фокусировки пучков заряженных частиц, в магнитных ловушках, которые способны длительное время удерживать заряженные частицы внутри определенного объема пространства.

А теперь – несколько конкретных задач.

Задача 1. *Электрон влетает в постоянное однородное магнитное поле с индукцией $\vec{B}$ (рис.1) и в точке A имеет скорость $\vec{v}$, образующую с направлением поля угол α. Описав один виток винтовой линии, электрон оказывается в точке C. Чему равно расстояние AC?*

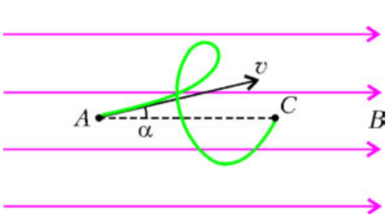

Рис. 1

Движение электрона по винтовой линии можно рассматривать как суперпозицию (сумму) двух движений: вдоль оси, совпадающей с направлением вектора $\vec{B}$, и в плоскости, перпендикулярной этому направлению. В нашем случае вектор скорости $\vec{v}$ лежит в плоскости рисунка, поэтому проекция скорости электрона вдоль горизонтальной оси x равна $v_x = v\cos\alpha$, а в плоскости, перпендикулярной оси x, составляет $v_\perp = v\sin\alpha$. Очевидно, что вдоль горизонтальной оси электрон будет двигаться прямолинейно и равномерно со скоростью v_x, а в перпендикулярной плоскости – по окружности с линейной (окружной) скоростью $v_\perp$.

Уравнение движения электрона по окружности имеет вид

$$\frac{mv_\perp^2}{R} = ev_\perp B,$$

где m и e – масса и заряд электрона, а R – радиус окружности. Время, через которое электрон окажется в точке C, равно периоду обращения электрона:

$$\tau = T = \frac{2\pi R}{v_\perp} = \frac{2\pi m}{eB}.$$

За это время электрон сместится по горизонтали на искомое расстояние AC (шаг винтовой линии):

$$AC = v_x T = \frac{2\pi v_x}{\frac{e}{m}B} = \frac{2\pi v\cos\alpha}{\frac{e}{m}B},$$

где $\frac{e}{m}$ — удельный заряд электрона.

Сделаем несколько замечаний.

1) Из уравнения движения электрона по окружности следует, что радиус круговой орбиты частиц с удельным зарядом $\frac{q}{m}$ в однородном магнитном поле $\vec{B}$ равен

$$R = \frac{v_\perp}{\frac{q}{m}B}.$$

При постоянных значениях $\frac{q}{m}$ и $v_\perp$ радиус кривизны траектории заряженной частицы обратно пропорционален величине индукции магнитного поля. Для удержания заряженных частиц высоких энергий в ограниченном объеме используют специальную конфигурацию магнитного поля. Такие устройства называют магнитными ловушками.

2) Из выражения для периода обращения следует, что частота обращения заряженной частицы в постоянном магнитном поле $\vec{B}$ в плоскости, перпендикулярной полю, пропорциональна удельному заряду частицы и индукции поля:

$$\nu_c = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi}\frac{q}{m}B.$$

В теории плазмы эту частоту называют циклотронной частотой. Например, для электронов земной ионосферы, находящихся в магнитном поле Земли, $\nu_c = 1{,}4\cdot 10^6$ Гц.

Задача 2. *На плоский вакуумный диод, расстояние между анодом и катодом которого d = 2 см, подается высокое напряжение (рис.2). Диод находится в однородном магнитном поле, индукция которого равна B = 0,1 Тл и направлена перпендикулярно плоскости рисунка. Пренебрегая начальной скоростью вылетающих из катода электронов, определите, при каких напряжениях электроны будут попадать на анод.*

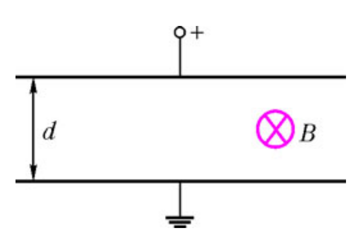

Рис. 2

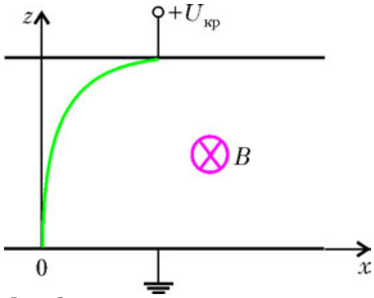

Рис. 3

Пусть электрон при $t = 0$ находился у поверхности катода с координатами $x = 0$, $z = 0$ и имел нулевую скорость (рис. 3). Уравнение движения электрона вдоль оси x для произвольного момента времени будет иметь вид

$$mv'_x = ev_z B .$$

Это уравнение можно записать в другом виде:

$$dv_x = \frac{e}{m} B dz ,$$

где $\frac{e}{m}$ – удельный заряд электрона.

Рассмотрим случай, когда траектория электрона касается поверхности анода (см. рис.3). Пусть это происходит при разности потенциалов между катодом и анодом $U_{кр}$. Запишем решение уравнения движения для момента времени, когда электрон находится в своей наивысшей точке и имеет только горизонтальную составляющую скорости $v_{x\,кр}$:

$$v_{x\,кр} = \frac{e}{m} Bd .$$

С другой стороны, закон сохранения энергии позволяет записать такое равенство:

$$\frac{mv_{x\,кр}^2}{2} - eU_{кр} = 0 .$$

Из совместного решения двух последних уравнений находим напряжение, при котором электрон касается анода:

$$U_{кр} = \frac{\frac{e}{m} B^2 d^2}{2} = 3{,}5 \cdot 10^5 \text{ В} .$$

При напряжениях $U \geq 3{,}5 \cdot 10^5$ В электроны будут попадать на анод.

Задача 3. *Длинная медная незаряженная пластинка движется равномерно со скоростью $v = 6{,}0$ м/с в однородном магнитном поле с индукцией $B = 0{,}2$ Тл. Векторы $\vec{v}$ и $\vec{B}$ взаимно перпендикулярны и параллельны плоскости пластинки (рис.4). Определите поверхностную плотность электрических зарядов, возникающих на плоскостях пластинки при ее движении.*

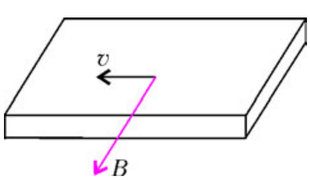

Рис. 4

В медной пластинке содержится большое количество свободных электронов, их концентрация равна $n \approx 10^{23}$ см$^{-3}$. Эти электроны не принадлежат атомам, а образуют электронный газ, «разогретый» до температуры $T \approx 5 \cdot 10^4$ К. При движении пластинки помимо хаотического движения электроны приобретают упорядоченную скорость, равную скорости пластинки $\vec{v}$. Если мы обозначим скорость «теплового» движения одного из электронов, назовем его i-м, через $\vec{v}_т$, то его полная скорость будет равна

$$\vec{v}_i = \vec{v} + \vec{v}_т .$$

В магнитном поле на такой электрон будет действовать сила Лоренца, равная

$$F_i = evB + ev_т B \sin\alpha_i .$$

Если мы усредним по большому количеству N электронов, то среднее значение синуса будет равно нулю:

$$\langle \sin\alpha \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \sin\alpha_i = 0 .$$

Любому электрону, летящему под каким-то углом, найдется электрон, летящий в противоположную сторону, поэтому мы можем забыть о хаотическом движении электрона.

Как только пластинка приходит в движение, сила Лоренца начинает отклонять электроны к нижней поверхности пластинки. В результате на нижней поверхности накапливается отрицательный поверхностный заряд, а на верхней – положительный (рис.5). Между поверхностями пластинки возникает электрическое поле $\vec{E}$, подобное полю плоского конденсатора.

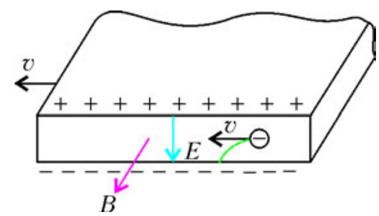

Рис. 5

Как только сила, действующая на электрон со стороны электрического поля, уравновесит силу Лоренца, перераспределение заряда прекратится и в проводнике установится стационарное электрическое поле с напряженностью

$$E_{ст} = vB .$$

Величина этого поля связана с поверхностной плотностью зарядов на плоскостях пластинки σ простым соотношением:

$$E_{ст} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} .$$

Отсюда получаем

$$\sigma = \varepsilon_0 E_{ст} = \varepsilon_0 vB = 10{,}6 \cdot 10^{-12} \text{ Кл/м}^2 .$$

Интересно, что на 1 см^2 поверхности находится $\frac{\sigma}{10^4 e} \approx 6600$ электронов.

Задача 4. *В одном из проектов получения электроэнергии предлагается использовать морские течения и магнитное поле Земли. Для этого в море погружают две горизонтальные металлические пластины, расположенные одна над другой на расстоянии $l = 100$ м; площадь каждой пластины $S = 1$ км^2. Морская вода, удельное сопротивление которой $\rho = 0{,}25$ Ом $\cdot$ м, протекает между пластинами с запада на восток со скоростью $v = 1$ м/с. Магнитное поле Земли в данном месте однородно и направлено с юга на север, индукция поля равна $B = 10^{-5}$ Тл. Определите максимальную электрическую мощность, которая может выделиться на нагрузке, подсоединенной к пластинам.*

Принцип действия такой установки можно понять из рисунка 6. Морская вода, конечно же, содержит какое-то количество положительных и отрицательных ионов. Когда эти ионы пересекают линии магнитного поля, на них действует сила Лоренца: положительные ионы отклоняются к верхней пластине, а отрицательные – к нижней.

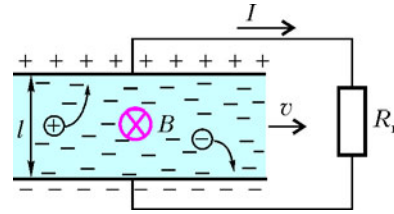

Рис. 6

Между пластинами возникает разность потенциалов, которая и приводит к появлению тока во внешней цепи.

Электрическая схема нашей установки эквивалентна цепи, изображенной на рисунке 7.

Мы знаем, что ЭДС источника – это напряжение на его

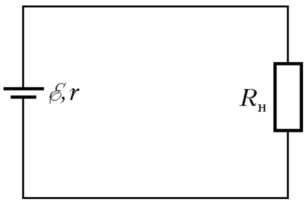

Рис. 7

концах при разомкнутой цепи. Воспользовавшись результатом решения задачи 3, мы можем утверждать, что установившаяся напряженность электрического поля между пластинами равна

$$E_{уст} = vB .$$

А, следовательно, ЭДС нашего источника есть

$$\mathscr{E} = vBl .$$

Очевидно, что внутреннее сопротивление r источника равно сопротивлению морской воды в объеме прямоугольника длиной l с площадью поперечного (по отношению к току) сечения S:

$$r = \rho \frac{l}{S} .$$

Таким образом, ток в цепи будет равен

$$I = \frac{\mathscr{E}}{R_н + r} = \frac{vBl}{R_н + \rho l/S} ,$$

и на нагрузке выделится мощность

$$P = I^2 R_н = \frac{(vBl)^2 R_н}{(R_н + \rho l/S)^2} .$$

Остается исследовать это выражение на максимум по параметру $R_н$. Предоставим это читателю, а для контроля сообщим, что мощность будет максимальной при $R_н = r = \rho l/S$ и составит

$$P_{max} = \frac{(vBl)^2}{4\rho l/S} = 10^{-2} \text{ Вт} .$$

Мы получили чрезвычайно малую мощность, что, в первую очередь, обусловлено слабым магнитным полем Земли.

Задача 5. *Протон со скоростью $v_0 = 10^7$ м/с влетает в камеру Вильсона с индукцией магнитного поля $B = 0,2$ Тл, направленной перпендикулярно плоскости орбиты протона (рис.8). На протон в камере Вильсона действует сила торможения, пропорциональная его скорости: $\vec{F}_т = -\alpha\vec{v}$, где $\alpha = 7 \cdot 10^{-20}$ Н · с/м. На каком расстоянии от точки влета протон остановится?*

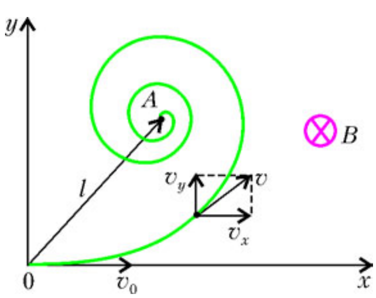

Рис. 8

Пусть в произвольный момент времени проекции скорости $\vec{v}$ протона на оси x и y равны v_x и v_y. Тогда уравнения движения протона по этим осям будут иметь вид

$$mv'_x = -qv_yB - \alpha v_x ,$$

$$mv'_y = qv_xB - \alpha v_y ,$$

где $m = 1,7 \cdot 10^{-27}$ кг – масса протона, а $q = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл – его заряд. Учитывая, что $dy = v_ydt$ и $dx = v_xdt$, запишем эти уравнения через бесконечно малые приращения:

$$dv_x = -\omega_c dy - \frac{\alpha}{m} dx ,$$

$$dv_y = \omega_c dx - \frac{\alpha}{m} dy ,$$

где $\omega_c = \frac{qB}{m}$ – это частота, с которой протон вращается в однородном магнитном поле $\vec{B}$, перпендикулярном скорости протона (циклотронная частота).

Перейдя к конечным приращениям v_x, v_y, x и y от момента влета протона в камеру и до момента остановки, получим

$$-v_0 = -\omega_c y_A - \frac{\alpha}{m} x_A ,$$

$$0 = \omega_c x_A - \frac{\alpha}{m} y_A ,$$

где x_A и y_A – координаты точки остановки протона A. Из последних уравнений находим x_A и y_A:

$$x_A = \frac{(\alpha/m)v_0}{\omega_c^2 + (\alpha/m)^2} , \quad y_A = \frac{\omega_c v_0}{\omega_c^2 + (\alpha/m)^2}$$

и расстояние l от точки влета протона в камеру до точки остановки:

$$l = \sqrt{x_A^2 + y_A^2} = \frac{v_0}{\sqrt{\omega_c^2 + (\alpha/m)^2}} = \frac{v_0 m}{\sqrt{q^2B^2 + \alpha^2}} = 21,7 \text{ см} .$$

Задача 6. *В однородном магнитном поле электрон вращается по круговой орбите в плоскости, перпендикулярной линиям индукции поля. Индукцию поля медленно (за время, во много раз превышающее период обращения электрона) увеличивают в три раза. Во сколько раз изменится при этом радиус орбиты электрона?*

Рассмотрим изменение величины индукции магнитного поля ΔB за малое время Δt. Пусть радиус орбиты электрона в момент t равен R. Изменяющееся магнитное поле приводит к появлению вихревого электрического поля:

$$\pi R^2 \frac{\Delta B}{\Delta t} = E_{вихр} \cdot 2\pi R ,$$

откуда

$$E_{вихр} = \frac{R}{2}\frac{\Delta B}{\Delta t} .$$

На электрон со стороны этого поля за время Δt подействует импульс силы, который приведет к изменению импульса электрона:

$$eE_{вихр}\Delta t = \frac{eR}{2}\Delta B = m\Delta v ,$$

где e – заряд, m – масса, а Δv – приращение скорости электрона. Уравнение движения электрона по орбите радиусом R со скоростью v в магнитном поле с индукцией B имеет вид

$$\frac{mv^2}{R} = evB .$$

Перепишем это уравнение так:

$$v = \frac{e}{m}RB .$$

Продифференцируем его по трем переменным v, R и B:

$$\Delta v = \frac{e}{m}R\Delta B + \frac{e}{m}B\Delta R .$$

Подставим это выражение в уравнение изменения импульса электрона:

$$e\frac{R}{2}\Delta B = eR\Delta B + eB\Delta R ,$$

или

$$-\frac{1}{2}\frac{\Delta B}{B} = \frac{\Delta R}{R}.$$

После интегрирования получим

$$R\sqrt{B} = \text{const}.$$

Следовательно, радиус новой орбиты уменьшится в $\sqrt{3}$ раз.

Упражнения

1. С помощью камеры Вильсона, помещенной в магнитное поле с индукцией $\vec{B}$, наблюдают упругое рассеяние α-частиц на ядрах дейтерия. Определите начальную энергию α-частицы, если радиус кривизны начальных участков траекторий ядра и α-частицы после рассеяния оказался равным R. Обе траектории лежат в плоскости, перпендикулярной индукции магнитного поля.

2. Частица массой m с положительным зарядом q находится в однородных электрическом и магнитном полях. Напряженность электрического поля равна E и параллельна линиям индукции магнитного поля (рис.9). В начальный момент частице сообщают скорость v_0, направленную под углом α к линиям индукции. Через некоторое время частица возвращается в начальную точку. Чему равно это время? Определите также значения индукции магнитного поля, при которых происходит возвращение частицы в начальную точку.

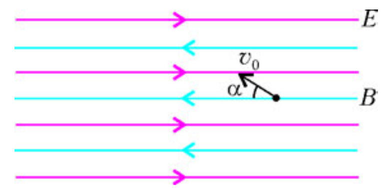

Рис. 9

3. В однородное магнитное поле с индукцией $\vec{B}$ помещена тонкая металлическая лента шириной d и толщиной a так, что плоскость ленты перпендикулярна линиям индукции (рис.10). По ленте пропускают ток I. Найдите разность потенциалов, возникающую между боковыми поверхностями ленты (т.е. на расстоянии d), если концентрация свободных электронов в металле ленты равна n.

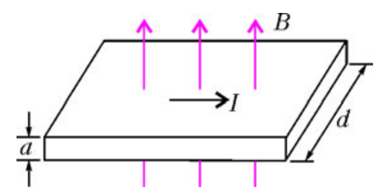

Рис. 10

Метод замены множителей

В.ГОЛУБЕВ

Основная идея метода

Метод интервалов для решения неравенств подробно рассматривается в школьных учебниках и пособиях для поступающих и, как правило, легко усваивается. Поэтому естественным можно признать желание свести решение того или иного неравенства повышенной сложности к решению рациональных неравенств. Оказывается, достаточно широкий класс неравенств подобную попытку допускает.

Любое неравенство приводимо к виду

$$\frac{u_1 \cdot u_2 \cdot \ldots \cdot u_n}{v_1 \cdot v_2 \cdot \ldots \cdot v_k} \vee 0, \qquad (1)$$

где символ «$\vee$» обозначает один из четырех возможных знаков неравенства: $<$, $\le$, $\ge$, $>$. Согласитесь, что при решении неравенства (1) нас интересует только знак любого множителя в числителе или знаменателе, а не абсолютная его величина. Поэтому, если по каким-либо причинам нам неудобно работать с данным множителем, мы можем заменить его на другой знакосовпадающий с ним множитель в области определения неравенства (и имеющий в этой области те же корни). Этот бесхитростный факт и определяет основную идею метода замены множителей.

Важно обратить внимание читателя, что замена множителя осуществляется только (!) при условии приведения неравенства к виду (1), т.е. когда требуется сравнить произведение с нулем.

Монотонность – ключ к замене множителя

Основная часть замен обусловлена двумя следующими равносильными утверждениями.

Утверждение 1. *Функция $f(x)$ есть строго (!) возрастающая тогда и только тогда, когда для любых двух значений t_1 и t_2 из области определения функции разность $(t_1 - t_2)$ совпадает по знаку с разностью $\left(f(t_1) - f(t_2)\right)$, т.е.*

$$f \nearrow \Leftrightarrow \left(t_1 - t_2 \overset{\text{одз}}{\leftrightarrow} f(t_1) - f(t_2)\right),$$

где символ «$\leftrightarrow$» *означает знакосовпадение*.

Утверждение 2. *Функция $f(x)$ есть строго (!) убывающая тогда и только тогда, когда для любых двух значений t_1 и t_2 из области определения функции разность $(t_1 - t_2)$ совпадает по знаку с разностью $\left(f(t_2) - f(t_1)\right)$, т.е.*

$$f \searrow \Leftrightarrow \left(t_1 - t_2 \overset{\text{одз}}{\leftrightarrow} f(t_2) - f(t_1)\right).$$

Обоснование этих утверждений непосредственно вытекает из определения строго монотонной функции. Равносильность утверждений 1 и 2 следует из того факта, что если $y = f(x)$ есть монотонно возрастающая функция, то $y = -f(x)$ есть монотонно убывающая функция.

Комментарий. Из утверждений 1 и 2 вытекают все возможные замены множителей, за исключением знакопостоянных. Поэтому, если нет желания трогать знак неравенства, всюду положительные множители просто убираем, а всюду отрицательные заменяем на (-1). Популярный знакопостоянный множитель – квадратный трехчлен $ax^2 + bx + c$ с отрицательным дискриминантом – удобно заменять на старший коэффициент или на свободный член, т.е.

$$ax^2 + bx + c \leftrightarrow a \leftrightarrow c \ \ (\text{при } D < 0). \qquad (2)$$