

3. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции $y = 3x \cos 3x - \sin 3x$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{4}; \pi\right]$.

4. Вычислите площадь фигуры, ограниченной кривыми $y = -\sqrt{4x}$ и $y = -\frac{x^2}{4}$.

5. Из точки $B(2; 0)$ проведена касательная к окружности $(x + 3)^2 + (y + 3)^2 = 4$. Найдите абсциссу точки касания.

6. Стороны треугольника ABC находятся в отношении $AB : BC : CA = 5 : 7 : 6$. На сторонах треугольника AB, BC и CA взяты точки K, L, M соответственно так, что $AK : KB = 2 : 3, BL : LC = 3 : 4, CM : MA = 2 : 4$. Найдите площадь треугольника AKM и длину отрезка KM , если площадь треугольника ABC равна 60.

ФИЗИКА

Вариант 1

1. Тело массой m , движущееся со скоростью v по горизонтальной поверхности, налетает на пружину жесткостью k , второй конец которой закреплен (рис.1). На какую величину сожмется пружина к тому моменту времени, когда скорость тела станет равна $v/3$? Трение отсутствует.

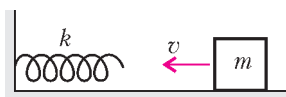


Рис. 1

2. Плавающая в жидкости, тело кубической формы погружается на глубину h_1 , а в другой жидкости – на глубину h_2 . Какова будет глубина погружения тела в жидкости, плотность которой равна среднему арифметическому плотностей первых двух жидкостей? Считать, что во всех случаях тело расположено в жидкости так, что две его грани параллельны поверхности.

3. Два маленьких шарика связаны непроводящей пружиной. Если шарики зарядить одинаковыми зарядами q , то длина пружины будет равна l_1 , а если зарядить одинаковыми зарядами $2q$, то длина пружины будет равна l_2 . Найдите жесткость пружины.

4. В горизонтальном цилиндрическом сосуде длиной l находятся n подвижных теплопроницаемых поршней, делящих сосуд на $n + 1$ отсеков (рис.2). Первоначально температура газа во всех отсеках равна T_0 , а их объемы одинаковы. Затем газ в самом левом отсеке нагревают до температуры T_1 , а температуру газа в других отсеках поддерживают равной T_0 . На сколько сместится при этом самый правый поршень?

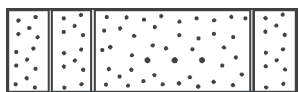


Рис. 2

5. На поверхности стола находится вертикальный цилиндр радиусом R , на который намотана длинная невесомая нерастяжимая нить. К концу свободного куска нити, длина которого l_0 , привязано тело. Телу сообщают скорость v , направленную перпендикулярно нити так, что нить начинает сматываться с цилиндра (рис.3, вид сверху). Найдите время, за которое длина свободного куска нити увеличится вдвое. Трение отсутствует.



Рис. 3

Вариант 2

1. Груз массой $m = 1$ кг лежит на полу кабины лифта. При этом груз действует на пол лифта с силой $F = 5$ Н. Найдите величину и направление ускорения лифта. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с².

2. Точечный источник света расположен на главной оптической оси тонкой собирающей линзы на расстоянии $d = 30$ см от линзы (рис.4). Фокусное расстояние линзы $F = 10$ см. Линзу сместили на расстояние $a = 2$ см в направлении, перпендикулярном главной оптической оси. На какое расстояние переместилось при этом изображение источника?

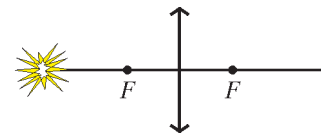


Рис. 4

3. В баллоне содержится ν молей одноатомного идеального газа при температуре T . При изохорическом нагревании газа средняя скорость молекул газа увеличилась в n раз. Найдите количество теплоты, подведенное к газу.

4. Корабль движется на север со скоростью v . Ветер дует с северо-запада под углом α к параллели. Скорость ветра, измеренная на корабле, равна u . Найдите скорость ветра относительно земли.

5. Индуктивность кольца известна и равна L (рис.5). Индуктивность контура, представляющего собой сектор кольца того же радиуса, опирающийся на угол $\pi/2$, также известна и равна L_1 . Найдите индуктивность контура, представляющего сектор кольца того же радиуса, опирающийся на угол $3\pi/2$.

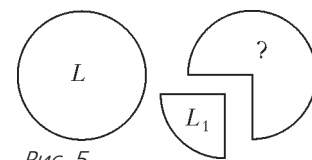


Рис. 5

Публикацию подготовили С.Муравьев, О.Нагорнов

Новосибирский государственный университет

ФИЗИКА

Письменный экзамен

Физический факультет

Каждый вариант состоял из задач трех типов. Первые три задачи – расчетные, различной степени трудности: от почти стандартных до сравнительно сложных, требующих смекалки, глубоких знаний, умения ориентироваться в непривычной или усложненной ситуации.

Четвертая задача – задача-оценка. Для ее решения необходимо разобраться в рассматриваемом физическом явлении, сформулировать простую (так как нужна только оценка) модель этого явления, выбрать разумные числовые значения величин и, наконец, получить численный результат, более или менее соответствующий реальности. В тексте задачи подчеркивается, что абитуриент может сам выбрать необходимые для решения задачи величины и их числовые значения.

Пятая задача – задача-демонстрация, при решении которой необходимо объяснить физическое явление, демонстрируемое в аудитории. Среди различных факторов, влияющих на процесс, необходимо выделить главный.

Вариант 1

1. Амперметры A_1 и A_2 имеют одинаковые сопротивления r и показывают токи I_1 и I_2 при включении в схему, приведенную на рисунке 1. Найдите сопротивление резистора R .

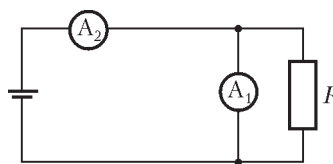


Рис. 1

2. Частицы с зарядом q и массой m движутся в магнитном поле с индукцией B по круговой орбите радиусом R и попадают в зазор

между электродами (рис.2). Чтобы вывести пучок с круговой орбиты, на электроды подают напряжение, создающее однородное электрическое поле между ними. Какова напряженность этого поля, если частицы в зазоре между электродами летят с неизменной по величине и направлению скорости?

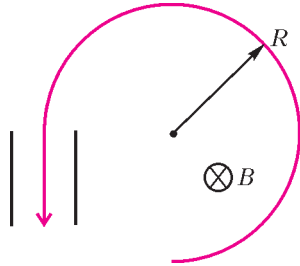


Рис. 2

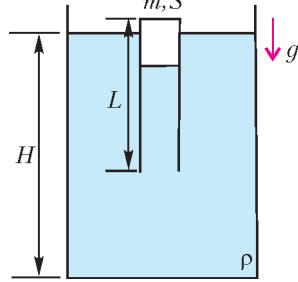


Рис. 3

3. В сосуде с водой глубиной H плавает перевернутая тонкостенная цилиндрическая пробирка длиной L , массой m и сечением S , содержащая некоторое количество воздуха (рис.3). Температуру системы медленно понижают. При температуре T_1 пробирка начинает тонуть и опускается до дна. Определите, до какой температуры T_2 теперь надо нагреть систему, чтобы пробирка всплыла? Считать, что плотность воды ρ не зависит от температуры, а воздух – идеальный газ. Ускорение свободного падения g , атмосферное давление p_0 .

4. Спортсмен, разогнавшись на спортивных санках, несется, лежа на них, по горизонтальному льду. Оцените, при



Рис. 4

какой скорости он рискует перевернуться, если один полоз санок наедет на выступ длиной 20 см и высотой 3 см (рис.4).

5. На экран через непрозрачную пластину с двумя отверстиями падает свет от двух источников. При одном положении



Рис. 5

видны три световых пятна, расположенных на прямой линии, при повороте пластины на 90° на экране видны четыре пятна в вершинах прямоугольника (рис.5). Объясните демонстрируемое явление.

Вариант 2

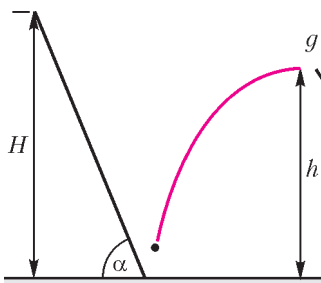


Рис. 6

1. Шарик соскальзывает с высоты H по наклонной плоскости и упруго ударяется о горизонтальный пол (рис.6). На какую наибольшую высоту он подпрыгнет? Угол между наклонной плоскостью и полом α , трения нигде нет.

2. Изображение точечного источника находится на расстоянии f от нее. Найдите фокусное расстояние линзы F и расстояние от источника до линзы d , если при опускании линзы на h перпендикулярно оси изображение смещается на H (рис.7).

3. Четыре частицы имеют одинаковые заряды q . Вначале

их удерживают на прямой (рис.8) так, что расстояния r между соседними частицами равны ($AB = BC = CD$). Частицы отпускают. Они разлетаются, расстояния между соседними частицами увеличиваются, но остаются одинаковыми ($A'B' = B'C' = C'D'$). Известно, что масса каждой из внутренних частиц равна m . Найдите массы M крайних частиц, а также конечные скорости каждой частицы.

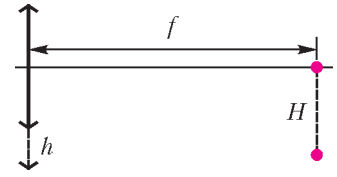


Рис. 7

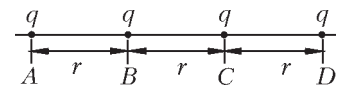


Рис. 8

4. За спутником, летящим по орбите в разреженной атмосфере, образуется область почти полного вакуума. Оцените наименьшую скорость молекул воздуха, которые могут оказаться на оси движения сзади спутника на расстоянии порядка его радиуса.

5. Две дощечки подвешены на проволочках, прикрепленных к стержню. Одна дощечка частично погружена в воду, другая лежит на подставке. При медленном подъеме стержня обе дощечки поднимаются. Когда стержень резко дергают вверх, то за ним поднимается лишь дощечка, лежащая на подставке, а проволочка, привязанная к дощечке, частично погруженной в воду, обрывается. Объясните демонстрируемое явление.

Вариант 3

1. С края горизонтального стола с начальной скоростью v слетает шарик. Через какое время величина его скорости увеличится на $1/4$ начальной скорости? Ускорение свободного падения g .

2. Цилиндр радиусом R и массой M соприкасается с дном и боковой стенкой наклонной прямоугольной коробки (рис. 9). Второй цилиндр меньшего радиуса r и массой m соприкасается с первым цилиндром и дном коробки. Найдите отношение масс M/m , если при угле наклона дна с горизонталью α первый цилиндр начинает подниматься. Трение между цилиндрами, стенкой и дном коробки отсутствует.

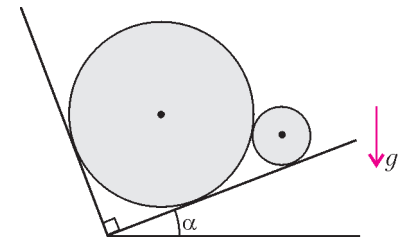


Рис. 9

3. На конце горизонтальной спицы закреплен заряд q , а на расстоянии r от него нитью удерживается насаженная на спицу бусинка массой m с таким же зарядом q (рис.10). Спица движется с горизонтальной скоростью v , направленной в сторону бусинки. Нить пережигают, а спицу, прикладывая к ней силу, продолжают двигать с прежней скоростью. Найдите работу этой силы к моменту времени, когда расстояние между зарядами увеличится до R . Трения нет.

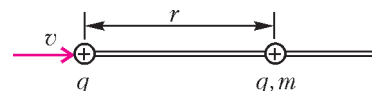


Рис. 10

4. В открытую сверху и снизу вертикальную трубу поступает углекислый газ (рис.11). Оцените, во сколько раз его температура должна превышать температуру окружаю-

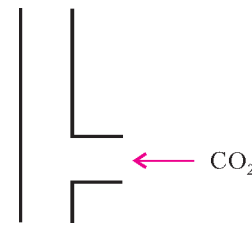


Рис. 11

щего воздуха, чтобы углекислый газ поднимался по трубе и выходил через верхнее отверстие.

5. На наклонной доске покоится тело. Оно не сползает, даже если заметно покачивать доску при неизменном ее наклоне. Однако при постукивании по доске сбоку тело сползает без сколь-нибудь заметных смещений доски. Объясните явление.

Публикацию подготовили И.Воробьев, Г.Меледин, Б.Шварц, Т.Рыбницкая

Российский государственный педагогический университет им. А.И.Герцена

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

(факультеты математики, физики, информационных технологий, технологии и предпринимательства)

Вариант 1

1. Решите неравенство $\frac{\sqrt{9-x^2}}{x+1} > 0$.

2. Найдите решения уравнения $\cos(\pi - 2x) = 1 - \sin^2 2x$.

3. Длины сторон треугольника 3, 5 и 7. Определите радиус окружности, описанной около треугольника.

4. При каких значениях x числа 32^x , 6^{x^2+1} , 3^{5x} являются последовательными членами геометрической прогрессии?

5. Найдите решения неравенства $\log_2 x - \log_x 2 \geq \frac{3}{2}$.

6. Найдите двузначное число, если произведение его цифр равно 28, а его сумма с числом, записанным этими же цифрами, но в обратном порядке, равна 121.

7. Вычислите $\operatorname{tg}^2\left(\frac{1}{2} \arcsin \frac{3}{5}\right)$.

8. Один из корней уравнения $x^3 + ax^2 - 7x + 6 = 0$ равен 1. Вычислите два других корня.

9. Полная поверхность правильной четырехугольной пирамиды равна S , плоский угол боковой грани при вершине равен α . Найдите объем пирамиды.

Вариант 2

1. Решите неравенство $\frac{1}{x+2} \leq \frac{2}{x+5}$.

2. Найдите решения уравнения $\sin 2x + 2 \cos x = 0$ из промежутка $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

3. В треугольнике, площадь которого равна 8, стороны $AC = b = 5$, $AB = c = 4$. Найдите длину третьей стороны ($\angle A < 90^\circ$).

4. Решите уравнение $2\sqrt{x+1} = 3\sqrt[4]{x+1} + 77$.

5. Найдите область определения функции

$$f(x) = \sqrt[6]{2^x + 2^{|x|} - 2\sqrt{2}}.$$

6. Вычислите $\cos(2 \operatorname{arctg}(\sqrt{2} + 1))$.

7. Сколько граммов чистого спирта надо добавить к 735 г 16%-го раствора йода в спирте, чтобы получить 10%-й раствор?

8. Сколько решений в зависимости от параметра a имеет уравнение

$$a - ||x - 2| - 2| = 0 ?$$

9. Основанием пирамиды служит прямоугольник. Из боковых граней две перпендикулярны к плоскости основания, а две другие образуют с ней углы α и β . Высота пирамиды равна H . Определите объем пирамиды.

Публикацию подготовили Г.Хамов, Т.Свенцицкая, О.Корсакова

Российский государственный технологический университет им. К.Э.Циолковского (МАТИ)

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Найдите наименьший корень уравнения

$$|x + 2| = \sqrt{20 - 2x}.$$

2. Решите уравнение

$$\log_5(2x - 1) \log_{x+1} 5 = 1.$$

3. Найдите сумму корней уравнения

$$\sin x = -\cos x,$$

принадлежащих промежутку $\left(\frac{\pi}{4}; \pi\right)$.

4. Найдите количество целочисленных решений системы неравенств

$$\begin{cases} x^2 - 2x - 1 \geq 0, \\ |x - 1| \leq 4. \end{cases}$$

5. Решите уравнение

$$5^{1+\sin x + \sin^2 x + \dots} = 25.$$

6. Для решения (x, y, z) системы уравнений

$$\begin{cases} xy = 2, \\ xz = -3, \\ yz = -6 \end{cases}$$

найдите значение $x^2 + y^2 + z^2$.

7. Решите уравнение

$$\log_4 \sin^2 x - \log_{\sin x} 64 = \log_{\sqrt{2}} 4 + 1.$$

8. Вычислите

$$\frac{\sin \alpha + \sin 2\alpha + \sin 3\alpha}{2 \cos \alpha + 1}$$

при $\alpha = \frac{\pi}{12}$.

9. На стороне AC треугольника ABC выбрана точка D так, что $AD : DC = 1 : 2$. Найдите $\angle BDC$, если $AB = 5$, $BC = 7$ и $AC = 6$.

10. При каких значениях параметра k уравнение

$$(x + 1)(x + 3)(x + 5)(x + 7) = -k^2 - k$$

имеет 2 решения?

Вариант 2

1. Найдите наибольший корень уравнения

$$|x - 2| = \sqrt{5x - 4}.$$

2. Решите уравнение

$$\log_2(3x - 2) \log_{2x+3} 2 = 1.$$