(Начало см. на с. 16)

потребуем, чтобы гипотенуза z была точным квадратом:

$$m^2 + n^2 = g^2, \qquad (2)$$

где g – натуральное число. Прямоугольных треугольников с таким свойством существует бесконечное множество, мы назовем их *подходящими*.

Алгоритм «сборки» эйлеровых треугольников следующий:

1. Возьмем два подходящих треугольника, выбрав нужную пару чисел m_1, n_1; $m_2 n_2$ и рассчитав по ним длины сторон x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2 пифагоровых треугольников по формулам (1). Пропорционально увеличим стороны каждого из этих треугольников: k_1x_1, k_1y_1, k_1z_1; k_2x_2, k_2y_2, k_2z_2 так, чтобы в итоге оказались равными стороны, формируемые четными катетами основных пифагоровых треугольников:

$$k_1y_1 = k_2y_2,$$

или

$$k_1m_1n_1 = k_2m_2n_2, \qquad (3)$$

где k_1, k_2 – некоторые целые числа.

2. «Соберем» новый треугольник, совместив равные катеты двух полученных на предыдущем шаге треугольников. Это можно сделать двояко, как показано на рисунках 1 и 2, на которых итоговый треугольник ABC выделен красным цветом. Стороны a и b окончательного треугольника образованы гипотенузами прямоугольных треугольников, полученных на предыдущем шаге, а третья сторона равна сумме катетов этих треугольников:

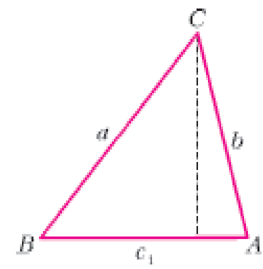

Рис. 1

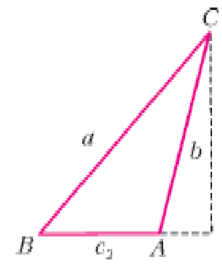

Рис. 2

$$c_1 = k_1\left(m_1^2 - n_1^2\right) + k_2\left(m_2^2 - n_2^2\right)$$

или их разности:

$$c_2 = k_1\left(m_1^2 - n_1^2\right) - k_2\left(m_2^2 - n_2^2\right).$$

В качестве полезного, но технически громоздкого упражнения предлагаем читателям самостоятельно убедиться в том, что как в одном, так и в другом случае треугольник ABC является эйлеровым, т.е. у него все три биссектрисы выражаются рациональными числами.

Построенные нами треугольники обладают целым букетом и других замечательных свойств. Например, у них не только стороны, но и площадь выражаются целыми числами (такие треугольники по традиции называют героновыми). А отсюда следует, что все три высоты, радиус вписанной и радиус описанной окружностей треугольника ABC выражаются рационально. Наверное, Леонард Эйлер порадовался бы такому результату.

Р.Сарбаш, А.Елизаров

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

КМШ

ЗАДАЧИ

(см.»Квант» №3)

1. Проведем 6 кругов радиуса a с центрами в вершинах аудитории-шестиугольника (рис.1). Каждый студент попадает либо в 2, либо в 3, либо в 6 кругов (точка в центре). Поскольку храпометры в сумме зафиксировали 7 спящих, то двое спящих студентов попали в пересечение двух кругов, а один – в пересечение 3 кругов. Всего на лекции спали 3 студента.

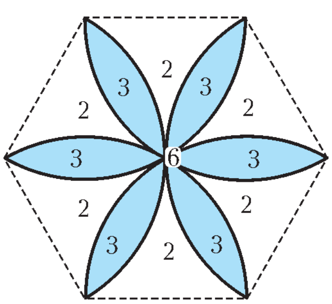

Рис. 1

2. Достаточно доказать, что точка P пересечения диагоналей является серединой какой-либо диагонали четырехугольника (рис.2).

Пусть точка M – середина диагонали BD. Если она не совпадает с точкой P, то площадь треугольника APM равна площади треугольника CPM, так как

$$S_{\Delta ABM} + S_{\Delta CDM} = \frac{1}{2} S_{ABCD} = S_{\Delta ABP} + S_{\Delta CDP}.$$

Но это означает, что MP является медианой в треугольнике ACM, т.е. точка P – середина диагонали AC.

3. Неверно. Например, для числа 288 не существует натуральных чисел n таких, что

$$288 = n + S(n) \qquad \text{(а)}$$

или

$$288 = n - S(n), \qquad \text{(б)}$$

где $S(n)$ – сумма цифр числа n.

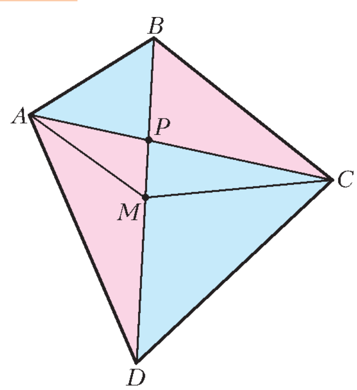

Рис. 2

Докажем невозможность равенства (а). Этому равенству могут удовлетворять не превышающие 288 натуральные числа n, делящиеся на 9 (последнее утверждение следует из того, что числа n и $S(n)$ имеют одинаковые остатки при делении на 9). Поскольку в этом случае $S(n) < 2 + 9 + 9 = 20$, то следует перебрать и проверить только два числа: 270 и 279. Как легко убедиться, ни одно из них не подходит.

Для проверки невозможности равенства (б) переберите трехзначные числа n, большие 288, но меньшие $288 + 27 = 315$, поскольку для них заведомо $S(n) < 9 + 9 + 9 = 27$.

4. Пусть a – длина левого плеча рычажных весов, b – длина правого плеча, k – вес колбасы, c – вес сахара. Тогда, по правилу рычага, $ca = 8b$, $kb = 2a$, откуда $kc = 16$. Из различных разложений числа 16 на множители: $16 = 16 \cdot 1 = 8 \cdot 2 = 4 \cdot 4$ только первый вариант удовлетворяет условию задачи. Итак, колбаса весит 16 кг, а сахар – 1 кг соответственно, одно из плечей рычажных весов в 8 раз длиннее другого.

5. Речь идет об электризации через влияние. При поднесении к лицу заряженного предмета происходит электризация микроволосков на коже лица, которая при «шевелении» вызывает на коже ощущения, как будто лица коснулась невидимая паутина.

КОНКУРС «МАТЕМАТИКА 6–8»

(см. «Квант» № 1)

16. Предположим, что среди выбранных 40 чисел не найдутся два числа, сумма которых равна 81.

Назовем *дополнительным* к выбранному числу другое число, в сумме с выбранным дающее 81. По предположению, вместе с выбранными все дополнительные числа представляют первые натуральные числа от 1 до 80 включительно. Кроме того, из условия следует, что сумма чисел, дополнительных к выбранным 20 нечетным числам, равна сумме чисел, дополнительных к выбранным 20 четным числам. А так как дополнительным к четному числу является число нечетное, а дополнительным к нечетному числу – четное, то получается, что все четные числа натурального ряда от 1 до 80 дают такую же сумму, что и нечетные числа в этом же промежутке, что неверно. Полученное противоречие доказывает утверждение задачи.

17. Укажем способ построения центра вписанной окружности (она же – точка пересечения биссектрис треугольника ABC) – точки O (рис. 3).

Проведем $PQ \perp AB$ и докажем, что четырехугольник $CPQO$ – ромб. Из равенства $\Delta ACP = \Delta AQP$ (треугольники равны по гипотенузе и острому углу) следует $CP = PQ$ и $\angle CPA = \angle QPA = 67{,}5°$. Так как $\angle BCD = 45°$, то $\angle COP = 180° - \angle OCP - \angle OPC = 67{,}5°$. Отсюда $CP = CO$. Обозначим через M точку пересечения отрезков OP и CQ.

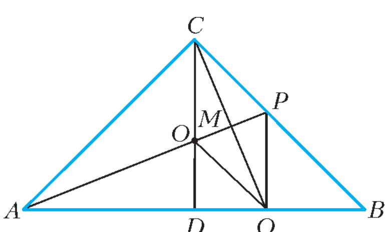

Рис. 3

В равнобедренном треугольнике CPQ отрезок MP является биссектрисой, значит, он является также медианой и высотой. В равнобедренном треугольнике OCP высота CM является медианой. Отсюда $OM = MP$, $CM = MQ$, четырехугольник $CPQO$ – параллелограмм. Он же – ромб, так как $OC = CP = PQ$.

В прямоугольном треугольнике PBQ $\angle QPB = 45°$, поэтому $QB = PQ = PC$.

Взяв фиксированный раствор циркуля, равный PC, из точки B на прямой AB строим точку Q, а затем из точек Q и C двумя засечками строим точку O.

Задача всегда имеет решение, и это решение единственно.

18. а) Воспользуемся тождеством

$$x^4 + x^2y^2 + y^4 = \left(x^2 + y^2\right)^2 - x^2y^2 = \left(x^2 + y^2 + xy\right)\left(x^2 + y^2 - xy\right).$$

Из него следует, что при натуральных x, y число $x^4 + x^2y^2 + y^4$ делится на $x^2 + xy + y^2$.

При любых натуральных z, t имеем

$$z^{16} + z^8t^8 + t^{16} \text{ делится на } z^8 + z^4t^4 + t^8,$$

$$z^8 + z^4t^4 + t^8 \text{ делится на } z^4 + z^2t^2 + t^4,$$

$$z^4 + z^2t^2 + t^4 \text{ делится на } z^2 + zt + t^2.$$

Таким образом, числа $a = z^2$, $b = zt$, $c = t^2$ удовлетворяют требуемым условиям делимости, а для выполнения остальных условий достаточно положить при этом $z = t + 1 > 10^{10}$.

б) Пусть a, b, c – числа, найденные в предыдущем пункте. Достаточно положить $A = a^2$, $B = b^2$, $C = c^2$.

19. По вине редакции в условии этой задачи была допущена неточность. Приведем точную формулировку условия:

Рациональное число r назовем хорошим, если можно найти $p + q$ последовательных натуральных чисел, сумма первых p из которых равна сумме остальных q, причем $r = \frac{p}{q}$. Укажите множество всех хороших рациональных чисел.

Очевидно, что хорошие рациональные числа $\frac{p}{q}$ удовлетворяют неравенству $\frac{p}{q} > 1$. Докажем, что $\frac{p}{q} < 1 + \sqrt{2}$. Если число $\frac{p}{q}$ хорошее, то, по условию, для некоторого неотрицательного целого m должно выполняться равенство

$$(m + 1) + (m + 2) + \ldots + (m + p) = (m + p + 1) + (m + p + 2) + \ldots + (m + p + q). \quad (1)$$

Обозначим $l = p - q$. После очевидных преобразований равенство (1) приводится к виду

$$2ml + l^2 + l = 2q^2, \quad (2)$$

или $\frac{l^2}{q^2} + \frac{l}{q} \cdot \frac{2m + 1}{q} = 2$. Второе слагаемое в левой части последнего равенства положительно, поэтому $\frac{l^2}{q^2} < 2$, откуда следует $\frac{p}{q} < 1 + \sqrt{2}$.

Пусть $\gamma = \frac{a}{b}$ – произвольное рациональное число из интервала $\left(1; 1 + \sqrt{2}\right)$. Докажем, что можно подобрать m, $p = na$ и $q = nb$ (n натуральное) таким образом, чтобы выполнялось равенство (1). Подставив выражения $p = na$, $q = nb$ в равенство (2), получим

$$m = \frac{2b^2n - n(a - b)^2 - (a - b)}{2(a - b)}. \quad (3)$$

Пусть $n = \frac{r(a - b)}{2}$, где r – некоторое натуральное число, подлежащее дальнейшему подбору, причем четное, если числа a и b разной четности. Подставив это выражение в равенство (3), получим

$$m = \frac{r\left(b^2 + 2ab - a^2\right) - 2}{4}. \quad (4)$$

Несложно убедиться в том, что если положить

$$r = \begin{cases} 4s + 1, & \text{если } a \text{ и } b \text{ нечетны,} \\ 4s + 2, & \text{если } a \text{ и } b \text{ разной четности,} \end{cases}$$

где s – произвольное натуральное число, то выражение в правой части равенства (4) является целым числом, а с учетом ограничений $1 \le \frac{a}{b} < 1 + \sqrt{2}$ – натуральным числом.

Итак, искомое множество хороших рациональных чисел таково: $\left(1; 1 + \sqrt{2}\right)$.

20. а) В результате разрезов каждая клетка доски оказывается разрезанной на два прямоугольных треугольника. В тех частях, на которые разделилась в результате доска, эти треугольники соединяются между собой по общим катетам. Суммарное количество таких общих катетов на всей доске нетрудно подсчитать – оно равно $2 \times 7 \times 8 = 112$, а общее количество треугольников равно $2 \times 64 = 128$. Пусть доска разделилась на n частей и количества треугольников в этих частях равны $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Тогда $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 128$. С другой стороны, чтобы в i-й части (для каждого $i = 1, 2, \ldots, n$) соединить все треугольники в одно целое, необходимо задействовать не меньше $\left(a_i - 1\right)$ общих катетов. Поэтому суммарное количество общих катетов не меньше $\left(a_1 - 1\right) + \left(a_2 - 1\right) + \ldots + \left(a_n - 1\right) = 128 - n$. А так как это суммарное количество равно 112, то $112 \ge 128 - n$, и $n \ge 16$. Итак, число частей, на которые распадется доска, не меньше 16. С другой стороны, можно привести пример, когда оно равно 16 (рис. 4). Таким образом, окончательный ответ: 16.

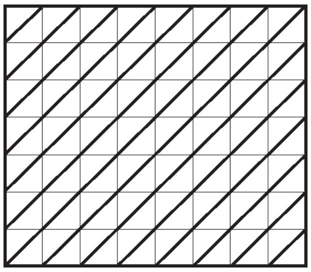

Рис. 4

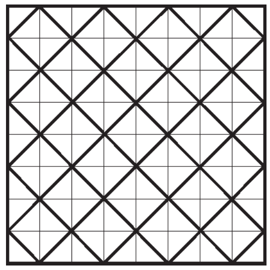

Рис. 5

б) Площадь фигуры, которая целиком находится внутри доски (т.е. никакая ее сторона не выходит на границу доски), не меньше 2; площадь фигуры, которая выходит на границу доски, но не содержит в себе угол доски, не меньше 1; наконец, площадь фигуры, содержащей в себе угол доски, не меньше $\frac{1}{2}$. Исходя из этого можно сделать вывод, что суммарное число частей не превышает 41. С другой стороны, можно привести пример ровно с 41 частью (рис.5). Поэтому окончательный ответ: 41.

ГИПОТЕЗА КАТАЛАНА

1. а) Решений нет. *Указание*: $3^x \equiv 3$ или $1 \pmod 8$.
б) Так как $3^x \equiv 1 \pmod 4$, то $x = 2t$; отсюда $u = 3^t + 1$ и $v = 3^t - 1$ – степени двойки. Значит, $v = (u,v) = 2$. Ответ: $(2, 3)$.
в) При четном x аналогично пункту б). Пусть x нечетно, тогда $(z-1)\left(z^{x-1} + \ldots + 1\right) = (z-1)A = 2^y$, где A – сумма нечетного числа нечетных слагаемых. Значит, A нечетно, откуда $A = 1$, $x = 1$. Ответ: $(2, 3, 3)$.
г) При четном x число $n^x + 1$, где $n \in \boldsymbol{N}$, не делится на 4. При нечетном x аналогично пункту в) получаем $z^{x-1} - \ldots + 1 = 1$, откуда $z^x + 1 = z + 1$ и, значит, $z = 1$ либо $x = 1$. Решений нет.
2. $(2, 3, 1)$ и $(3, 2, 3)$.
3. а) Пусть $x, y, p \in \boldsymbol{N}$, $x > y$, $p > 1$. Тогда
$x^p - y^p =$

$$= (x-y)\left(x^{p-1} + \ldots + y^{p-1}\right) \ge (x-y)(x+y) \ge (x-y) \times 3 \ge 3.$$

б) **Лемма 1.** Пусть $a \ge 2$, p – нечетное простое число. Тогда число $a^p - 1$ имеет хотя бы один простой делитель, не являющийся делителем числа $a - 1$.
Доказательство. Рассмотрим разложение

$$a^p - 1 = (a-1)\left(a^{p-1} + a^{p-2} + \ldots + a^2 + a + 1\right) = (a-1)b.$$

Докажем вначале, что числа $a - 1$ и b не могут иметь общего делителя q, отличного от 1 и от p. Действительно, если $a - 1$ делится на q, то и $a^m - 1$ делится на q при любом натуральном m. Значит, $b = ql + p$, где l – некоторое целое число. Поэтому b делится на q лишь при $q = 1$ или $q = p$.
Таким образом, осталось рассмотреть случай, когда $b = p^n$ и $a - 1$ делится на p. Докажем, что этот случай невозможен. Поскольку $b > p$, достаточно доказать, что b не делится на p^2.
Если $a = p^\alpha k + 1$, где k не делится на p, то

$$a^p = \left(p^\alpha k + 1\right)^p = 1 + p^{\alpha+1}k + p \times \frac{p-1}{2} \times p^{2\alpha}k^2 + \ldots = 1 + p^{\alpha+1}k + p^{\alpha+2}d,$$

где d целое. Отсюда $a^p - 1 = \left(p^\alpha k + 1\right)^p - 1 = p^{\alpha+1}(k + pd)$. Поскольку k не делится на p, то очевидно, что b делится на p и не делится на p^2. (Несколько иное доказательство последнего утверждения см. в решении задачи М2032.) Лемма доказана.
Лемма 2. Пусть $a \ge 2$, p – нечетное простое число и выполнено хотя бы одно из неравенств $a \ne 2$ и $p \ne 3$. Тогда $a^p + 1$ имеет простой делитель, не являющийся делителем числа $a + 1$.
Доказательство. Рассмотрим разложение

$$a^p + 1 = (a+1)\left(a^{p-1} - a^{p-2} + \ldots + a^2 - a + 1\right) = (a+1)b.$$

Докажем вначале, что числа $a + 1$ и b не могут иметь общего делителя r, отличного от 1 и от p. Действительно, если $a + 1$ делится на r, то и $a^k + 1$ делится на r при любом нечетном k; если же $k = 2m$, то $a^k - 1$ делится на число $a^2 - 1$, которое, в свою очередь, делится на r. Значит, $b = rl + p$, где l – некоторое целое число. Поэтому число b делится на r лишь при $r = 1$ или $r = p$.
Таким образом, осталось рассмотреть случай $b = p^n$, $a + 1$ делится на p. Докажем, что этот случай невозможен. Вначале покажем, что $b > p$. Имеем $b \ge a^2 - a + 1 \ge a + 1 \ge p$. Из условий леммы следует, что среди неравенств этой цепочки есть строгие. С другой стороны, как и в доказательстве леммы 1, можно показать, что b не делится на p^2, что и завершает доказательство.
Из лемм 1 и 2 следует, что каждое из чисел $x^y - 1$ и $z^t + 1$ имеет не менее двух различных простых делителей.
Заметим, что из леммы 2 сразу следует и единственность решения $(x, z, t) = (3, 2, 3)$ уравнения $x^2 - z^t = 1$, где $x \in \boldsymbol{P}$, $z, t \in \boldsymbol{N}$, $t > 1$. (Ср. это замечание с упражнением 2.)
5. Число $x^p - 1$ делится на p, и в силу малой теоремы Ферма $x - 1$ делится на p. Следовательно, $x^{p-1} + \ldots + 1$ делится на p. Вследствие леммы Гензеля (см. решение задачи М2032) эта сумма не делится на p^2.
6. а) $3^x = t^p + 1$, где $t = y^{z/p}$. Так как $n^2 + 1$ при $n \in \boldsymbol{N}$ не делится на 3, то p нечетно. Значит, так как $\frac{t^p + 1}{t+1} \ge \frac{t^3 + 1}{t+1} = t^2 - t + 1 \ge t + 1 > 1$, то $\left(\frac{t^p + 1}{t+1}, t + 1\right) = t + 1 =$ $= 3^\alpha$, где $\alpha > 0$. С другой стороны, $3^\alpha \mid p$, откуда $p = 3$, $\alpha = 1$. Получили $t + 1 = 3$, $t = 2$. Далее см. упражнение 1,б). Ответ: $(2, 2, 3)$.
б) $(1, 2, 2)$.
7. а) 2 кратно x, $x = 2$. Далее см. упражнение 1,а). Решений нет.
б) $(2, 2, 3)$. Это – частный случай задачи 6 для 11 класса Московской математической олимпиады 1999 года, которая формулировалась так: решите в натуральных числах уравнение $\left(1 + n^k\right)^l = 1 + n^m$, где $l > 1$. Дадим ее решение.
Поскольку $1 + n^k \mid 1 + n^m$, то $k \mid m$, и исходное уравнение можно переписать в виде $u^y - 1 = (u-1)^z$, где $u \ge 3$.
Пусть $y = 2^\alpha \ge 4$. Тогда $(u-1)^z$ кратно $u^2 + 1$. Значит, если $u^2 + 1$ кратно p, то $u - 1$ кратно p. Но $\left(u^2 + 1, u^2 - 1\right) \le 2$, поэтому $u^2 + 1 = 2^\beta$. Однако $u^2 + 1$ не делится на 4.
Пусть теперь $y = 2$. Тогда $u + 1 = (u-1)^{z-1}$, $(u-1) + 2 =$ $= (u-1)^{z-1}$, поэтому 2 делится на $u - 1$, и $u - 1 = 2$.
Пусть, наконец, y кратно p, $p > 2$. Тогда $u^{p-1} + \ldots + 1$ – нечетный делитель числа $(u-1)^z$. Поэтому любой простой делитель q числа $u^{p-1} + \ldots + 1$ делит и $u - 1$; отсюда $q = p$, и $u^{p-1} + \ldots + 1 = p^\alpha$. Из леммы Гензеля следует, что $\alpha = 1$; в то же время, очевидно, $u^{p-1} + \ldots + 1 > 1 + \ldots + 1 = p$. Противоречие.

в) Сразу следует из пунктов а) и б).

9. Имеем $x-1=z^{t-1}a^t$, где $z,t\geq 5$. Так как, кроме того, $z\neq t$, то либо $z\geq 5$ и $t\geq 7$, либо $z\geq 7$ и $t\geq 5$. Оценим снизу a. По теореме Касселса $x=z^{t-1}a^t+1$ кратно t. По малой теореме Ферма $z^{t-1}\equiv 1(\operatorname{mod} t)$, $a^t\equiv a(\operatorname{mod} t)$. Значит, число $a+1$ кратно t, $a\geq t-1$. Таким образом,

$$x>z^{t-1}(t-1)^t\geq \min\left\{5^6\times 6^7,\,7^4\times 4^5\right\}>2\times 10^6.$$

Аналогичными рассуждениями легко показать, что $y>10^7$.

11. Так как $(2k+1)(2k-1)=z^m$ и $(2k+1,\,2k-1)=1$, то $2k+1=u^m$, $2k-1=v^m$, где $u,v\in \boldsymbol{N}$. Отсюда при $m>1$ было бы $2=u^m-v^m\geq 3$.

12. Если $m>1$, то x^m кратно 4.

13. а) Вследствие упражнения 10 число $n+1$ четно. Воспользуйтесь упражнением 11. (Второй способ: воспользуйтесь упражнениями 11 и 12.)

б) Вследствие упражнения 10 число n нечетно. Воспользуйтесь упражнением 12.

МНОЖЕСТВО ЗНАЧЕНИЙ ФУНКЦИИ

1. $\left(-\infty;\frac{1}{8}\right]$. **2.** $\left[-\frac{1}{2};\frac{5}{2}\right]$. **3.** $\left[\frac{3}{13};1\right]$. **4.** $\left[\frac{8-2\sqrt{2}}{7};\frac{8+2\sqrt{2}}{7}\right]$.

5. $\left[-\frac{3\sqrt{3}}{4};\frac{3\sqrt{3}}{4}\right]$. **6.** $[-18;18]$. **7.** $\left[0;\frac{3\sqrt{35}}{35}\right]$.

8. $(-\infty;0)\cup(0;\infty)$. **9.** $(0;1)\cup(1;+\infty)$. **10.** $(-\infty;1]$. **11.** $\left[0;\frac{16}{3}\right]$.

12. $\left[-3\sqrt{3};3\sqrt{3}\right]$. **13.** $\left[2;\frac{17}{4}\right]$. **14.** $\left(-2;\frac{1}{4}\right]$.

15. $(-\infty;-1)\cup[1;+\infty)$. **16.** $\left(-\infty;\frac{3}{4}\right]$. **17.** $\left[\frac{144}{13};117\right],\left[-\frac{3}{2};-\frac{1}{2}\right]$.

ЗАДАЧИ LXX МОСКОВСКОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЫ

6 класс

1. На первом канале.

2. Тройка. Разложим число 2007 на простые множители:

$$2007=3\times 3\times 223.$$

Отсюда можно было бы сделать вывод, что отметки Вовочки – это две двойки и три тройки. Но надо еще доказать, что нет других вариантов отметок. Посмотрим, как еще можно разложить 2007 на множители: $2007=9\times 223=3\times 669$. Поскольку отметки больше 5 не бывает, эти разложения числа 2007 не могли возникнуть из Вовочкиных отметок. Так как троек у Вовочки больше, чем двоек, и последняя отметка, как ни переставляй множители, тройка, можно надеяться, что тройку в четверти он получит.

3. 700 золотых монет. За книгу «Три поросенка-2» каждый автор должен получить четверть гонорара. Но так как Наф-Наф свою долю уже забрал, Волку причитается $1/3$ остатка. За книгу «Красная шапочка-2» ему также полагается $1/3$ гонорара. Поэтому всего он должен получить треть переданной ему суммы.

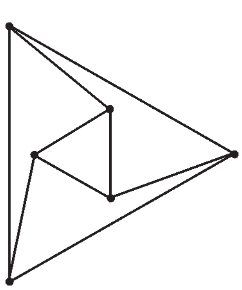

Рис. 6

4. План города может быть, например, таким, как на рисунке 6.

5. Из предложенных фигурок можно сложить четыре различные фигуры, имеющие ось симметрии. Две приведены на рисунке 7. У одной из них ось симметрии вертикальная, а у другой проходит по диагонали. Это не случайно – ось симметрии фигуры, нарисованной по клеточкам, может быть либо параллельна сторонам клеток, либо идти под углом 45° к ним. Попробуйте найти остальные два решения.

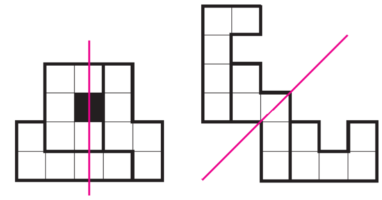

Рис. 7

6. а) Да; б) да. а) Пусть все царевны назовут царевнами Кощеевых дочек (рис.8). Тогда Кощеевых дочек назовут не менее трех раз, а царевен – не более чем дважды. Так Иван их и отличит.

Любое из решений пункта б), конечно, годится и для пункта а).

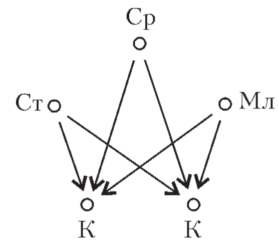

Рис. 8

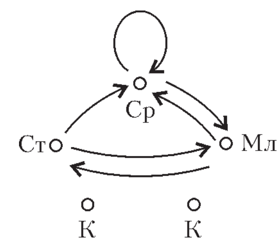

Рис. 9

б) Пусть та царевна, которая будет отвечать Кощею первой, назовет среднюю и младшую из царевен, вторая по счету – старшую и младшую, последняя – старшую и среднюю. Тогда дочери Кощея – те две девушки, которых не назвали трое остальных (рис.9). Ошибки быть не может, ведь каждую царевну называют как минимум двое. Теперь Иван знает, кто царевны. Старшая из них – та, которую не назвала первая из отвечавших царевен. Средняя – та, которую не назвала вторая, а младшая – оставшаяся.

7 класс

1. 7 этажей. Пусть с шестого этажа Тане надо было спуститься на n этажей. Тогда Таня прошла «лишний путь» вверх до последнего этажа и обратно до шестого. Длина лишнего пути $1{,}5n-n=0{,}5n$ этажей. Половину этого лишнего пути Таня шла вверх, а половину – вниз. Значит, вверх она поднялась на $n/4$ этажей. Если она поднялась на один этаж ($n/4=1$), то Таня живет на 4 этажа ниже Даши и в доме 7 этажей. Если же $n/4$ равно 2 или больше, то Тане пришлось бы спуститься с шестого этажа минимум на 8 этажей вниз, что невозможно.

2. 11 часов 40 минут. Во время разговора энергия аккумулятора расходуется в $\frac{210}{6}=35$ раз быстрее, чем в то время, когда разговор не ведется. Пусть Алена проговорила x часов. Тогда энергии аккумулятора осталось на $6-x$ часов разговора или на $35(6-x)$ часов ожидания. По условию это время также равно x часов ожидания, поэтому $35(6-x)=x$, откуда $x=\frac{35\times 6}{36}=\frac{35}{6}$ часов, т.е. 5 ч 50 мин. И значит, вся поездка продолжалась 11 ч 40 мин.

Примечание. Ответом в этой задаче является среднее гармоническое чисел 6 и 210 (средним гармоническим чисел a и b называется число $\frac{2}{1/a+1/b}=\frac{2ab}{a+b}$).

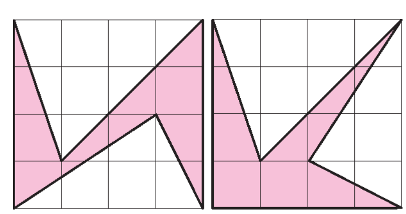

Рис. 10

3. См. рис.10.

4. а) Нет, не всегда; б) да, всегда.

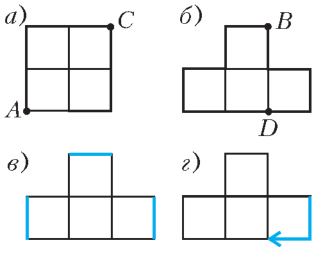

Рис. 11

а) Всегда, когда Буратино приближается к перекрестку A, он удаляется от перекрестка C (рис.11,*а*). Поэтому Буратино не сможет различить следующие две ситуации:
1) клад закопан на перекрестке A, и радио говорит правду;
2) клад закопан на перекрестке C, и радио лжет.

б) Заметим, что если Буратино знает, что радио говорит правду, то он сможет найти клад. Действительно, двигаясь по улице BD сверху вниз (рис. 11,*б*), он найдет горизонтальную улицу, на которой лежит клад. Затем, двигаясь по этой горизонтальной улице слева направо, он найдет точное местоположение клада. Если же Буратино знает, что радио лжет, то он найдет клад, действуя тем же способом, но заменяя указания радио на противоположные.

Пусть вначале Буратино предположит, что радио говорит правду. Действуя, как описано выше, он найдет точку T, в которой может быть зарыт клад, либо поймет, что радио лжет. Аналогично, предположив, что радио лжет, Буратино найдет точку L, в которой предположительно лежит клад, либо сможет установить, что радио говорит правду.

Итак, проделав это, Буратино либо уже установил, говорит ли радио правду, либо нашел две точки T и L, в одной из которых точно находится клад.

Рассмотрим на плане города три отрезка (рис.11,*в*).

Хотя бы на одном из них не лежит ни T, ни L. Поэтому Буратино может встать в один из концов этого отрезка и совершить переход в соседнюю точку, не лежащую на этом отрезке (рис.11,*г*). При этом он приблизится как к T, так и к L. Таким образом Буратино определит, лжет ли радио, и узнает, где находится клад.

8 класс

1. 500 человек.

2. Да. Число $\sqrt{N}$ лежит на числовой оси между какими-то подряд идущими натуральными числами b и $b + 1$. Тогда число N лежит между b^2 и $(b+1)^2$.

Середина отрезка $\left[b^2; (b+1)^2\right]$ – это полусумма его концов, т.е. число $b^2+b+1/2$. Так как это число нецелое, N не может попасть точно на середину.

Если N лежит справа от середины, то

$N > b^2+b+1/2 = (b+1/2)^2+1/4$, откуда $\sqrt{N} > b+1/2$, т.е. $\sqrt{N}$ ближе к $b + 1$, чем к b.

Если же N лежит слева от середины b^2, тогда

$N < b^2+b+1/2$ и, так как N натуральное,

$N \le b^2+b = (b+1/2)^2-1/4$, откуда $\sqrt{N} < b+1/2$. Значит, $\sqrt{N}$ ближе к b, чем к $b + 1$.

3. 15. Каждая команда сыграла 15 игр и могла набрать самое большее $15\times 3 = 45$ очков. Значит, у успешной команды не меньше 23 очков.

Пусть было n успешных команд. Тогда суммарное количество набранных очков не меньше $23n$. С другой стороны, в каждой игре разыгрывается не более 3 очков, а всего было сыграно $\frac{16\times 15}{2}$ игр. Поэтому всего было разыграно не более

$3\times\frac{16\times 15}{2} = 360$ очков. Значит, $23n \le 360$, откуда $n < 16$.

Покажем, что в чемпионате могло быть 15 успешных команд. Пронумеруем команды. Пусть команда номер 16 проигрывает всем остальным. Расположим номера остальных команд (числа от 1 до 15) по кругу. Пусть каждая из этих команд выиграет у следующих по кругу 7 команд (а остальным проиграет). Тогда 15 команд выиграют по 8 игр и наберут по 24 очка.

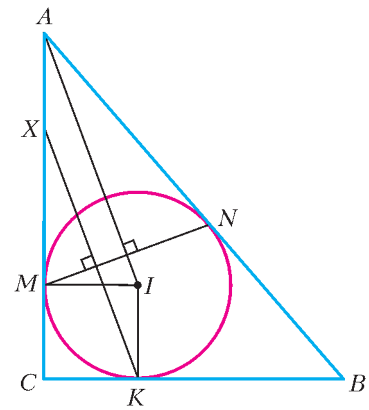

Рис. 12

4. Пусть I – центр вписанной окружности треугольника ABC (рис.12), тогда I лежит на биссектрисе угла A. Так как треугольник AMN равнобедренный, прямая IA является в нем не только биссектрисой, но и высотой, поэтому $IA \perp MN$. По условию $KX \perp MN$, а значит, IA и KX параллельны.

Заметим, что $IK \perp BC$, откуда следует, что IK и AC параллельны. Значит, четырехугольник $AXKI$ – параллелограмм, т.е. $AX = KI$. Но в прямоугольнике $KIMC$ стороны IK и IM равны (как радиусы вписанной окружности), а значит, $KIMC$ – квадрат, откуда $CK = KI = AX$.

5. Может. Фукс за 52 тура называет 52^2 карт – в каждом туре все карты по разу в одном и том же порядке, после чего говорит «стоп». Заметим, что всякий раз карты передвигаются в одном направлении: если передвинута карта a, то следующей будет передвинута карта b по другую сторону от свободного места (она будет названа раньше a). В каждом туре хотя бы одна карта сдвинется, значит, сдвигов не менее 52, и каждая карта со своего места уйдет. С другой стороны, каждая карта сдвинулась не более 52 раз, поэтому полный круг (53 хода) она сделать не успеет и на свое место не вернется. Есть много других верных алгоритмов. Например, Фуксу достаточно назвать все карты в некотором определенном порядке 51 раз (докажите!).

6. 30°. Пусть O, K, L – середины отрезков BC, AC и BD соответственно, P – точка пересечения прямых AC и BD. Точки K, L различны (иначе $ABCD$ – ромб и $\angle BMC < \angle BPC = 90°$).

Поскольку углы BKC, BMC и BLC прямые, точки K, M, L лежат на окружности с диаметром BC. Хорда KM равна $\frac{2}{2}CD = OC$ как средняя линия треугольника ACD, поэтому треугольник KOM равносторонний и $\angle MOK = 60°$. Аналогично, $\angle MOL = 60°$, поэтому $\angle KOL = 120°$. Вписанный угол KBL опирается на дугу KL или ее дополнение, поэтому равен $60°$ или $120°$. В любом случае это означает, что в прямоугольном треугольнике BKP угол B равен $60°$ и поэтому $\angle BPK = 30°$.

Замечание. Решение в равной мере подходит для выпуклого и невыпуклого четырехугольников.

9 класс

1. Два раза. Пусть в каком-то году возникло описанное совпадение. Если номер олимпиады двузначный, то его сумма с числом, образованным последними двумя цифрами года, делится на 11 (сумма двух чисел, состоящих из цифр a и b, равна $11(a + b)$). Поскольку каждый год эта сумма увеличивается на 2, событие может повторяться не чаще чем через 11 лет. И действительно, 81-я и 92-я олимпиады пройдут в 2018 и 2029 годах.

Если номер олимпиады трехзначный, то предпоследние цифры номера и года совпадают. Поэтому предпоследней цифрой их разности может быть только 0 или 9. Но разность года проведения олимпиады и ее номера всегда будет равна 1937. Противоречие.

Если номер олимпиады четырехзначный, то суммы цифр номера и года совпадают. Поскольку любое число дает такой же остаток при делении на 9, что и сумма его цифр, разность года и номера должна делиться на 9. Но остаток при делении на 9 числа 1937 равен 2. Противоречие.

Заметим, что и в дальнейшем такая ситуация наблюдаться не будет.

2. $\dfrac{ab}{c}$. Пусть l_0 – ордината точки пересечения прямых AB и CD. Тогда прямая AB задается уравнением вида $y = kx + l_0$, поэтому числа a, b являются корнями уравнения $x^2 - kx + l_0 = 0$. По теореме Виета их произведение равно $-l_0$. Аналогично, произведение абсцисс точек C и D равно $-l_0$, и, следовательно, абсцисса точки D равна $\dfrac{ab}{c}$.

3. (2; 3), (3; 5; 7). Пусть d – разность прогрессии. Если $d = 1$, то в прогрессии есть четные числа. Поскольку единственное четное простое число – это 2, получаем прогрессию (2; 3).

Если $d = 2$, то три члена прогрессии a, $a + 2$ и $a + 4$ дают при делении на 3 попарно различные остатки. Поэтому один из них делится на 3 и, будучи простым числом, равен 3. Отсюда получаем прогрессию (3; 5; 7).

Пусть $d > 2$. Последние $d - 1$ членов прогрессии дают попарно различные остатки при делении на $d - 1$. Поэтому один из них (обозначим его a) делится на $d - 1$. Так как $d - 1 > 1$ и a – простое число, то $a = d - 1 < d$. Но количество членов прогрессии больше d, поэтому $a - d$ принадлежит прогрессии и, значит, положительно. Противоречие.

4. Нет. Рассмотрим полукруг с центром O и радиусом 1. Данный треугольник можно параллельно перенести так, что одна из его вершин попадет в некоторую точку X, лежащую на прямой l, которая содержит диаметр полукруга, а две другие окажутся по ту же сторону от l, что и полукруг. Теперь после переноса на вектор XO одна вершина треугольника будет лежать в центре полукруга, а две другие – на его окружности.

Условию задачи удовлетворяет и общая часть двух кругов единичного радиуса, расстояние между центрами которых также равно 1.

5. Если две команды набрали поровну очков, то разность между количествами ничьих у них кратна трем. Количества ничьих находятся в пределах от 0 до $n - 1$. Поэтому количество групп, в каждой из которых команды имеют поровну выигрышей, ничьих и поражений, не превосходит $k = \left[\dfrac{n+2}{3}\right]$. Значит, некоторая группа состоит не менее чем из трех команд.

Пусть все группы состоят из трех или менее команд. Тогда групп ровно k (иначе $n < 3k - 2$ и $\left[\dfrac{n+2}{3}\right] < k$ – противоречие). Рассмотрим группы с наименьшим и наибольшим количеством ничьих.

Если $n = 3k - 2$, то у команд первой группы количество ничьих равно 0, а у команд второй $3k - 3$. Значит, команды второй группы свели вничью все игры, в том числе с командами первой группы, у которых нет ничьих. Противоречие.

Если $n = 3k - 1$ и у команд первой группы по l ничьих, то у команд второй группы по $l + 3k - 3$ ничьих, т.е. по $1 - l$ результативных встреч. Если $l = 1$, то вторая группа может содержать только одну команду, так как две команды сыграли бы вничью с командой первой группы, у которой только одна ничья. Если же $l = 0$, то первая группа может содержать лишь одну команду, так как две команды имели бы результативную игру с командой второй группы, у которой результативная игра только одна. Таким образом, одна из этих групп содержит лишь одну команду. Но тогда оставшиеся команды нельзя разбить на $k - 1$ группу, каждая из которых содержит не более трех команд.

Если $n = 3k$, то все группы должны содержать ровно по 3 команды. При этом если у команд первой группы по l ничьих, то у команд второй группы по $2 - l$ результативных игр. Поэтому друг против друга команды этих групп проводят не более чем $3l + 3(2 - l) = 6$ игр. Противоречие.

б) Нетрудно составить турнир 10 команд, три из которых имеют по 1 победе и 8 ничьих, четыре – по 2 победы, 2 поражения и 5 ничьих, и еще три – по 3 победы, 4 поражения и 2 ничьих (рис.13).

	1	1	1	1	1	1	3	1	1
1		1	1	1	1	1	1	3	1
1	1		1	1	1	1	1	1	3
1	1	1		0	1	1	0	3	3
1	1	1	3		1	1	0	0	3
1	1	1	1	1		3	3	0	0
1	1	1	1	1	0		3	3	0
0	1	1	3	3	0	0		3	0
1	0	1	0	3	3	0	0		3
1	1	0	0	0	3	3	3	0	

Рис. 13

Докажем, что случай $n < 10$ невозможен. Так как не все команды имеют поровну побед, ничьих и поражений, найдутся команды, которые выиграли больше встреч, чем проиграли, и команды, которые проиграли больше, чем выиграли. Предположим сначала, что в каждой из этих групп команд количества побед и поражений отличаются на 1, т.е. в одной группе команды одержали x побед, потерпели $x - 1$ поражение и $n - 2x$ встреч завершили вничью, а в другой эти числа равны $y - 1$, y и $n - 2y$ соответственно. Тогда, приравнивая набранные командами очки, получаем, что $x = y - 3$. Так как $n - 2y \ge 0$, то $n - 2x \ge 6$, а поскольку $x \ge 1$, получаем, что $n \ge 8$. Пусть теперь есть команды, у которых разность между количеством побед и поражений по модулю больше 1. Аналогичные рассуждения показывают, что существуют команды, завершившие вничью по крайней мере 9 встреч. Таким образом, неравенство $n \ge 8$ выполнено всегда, а случай $n < 10$ возможен, только когда разность между количеством побед и поражений у любой команды по модулю не превышает 1. Предположим, что $n = 8$. Тогда, как показано выше, есть k команд, у которых побед на одну больше, чем поражений, k команд, у которых побед на одну меньше, чем поражений, и $8 - 2k$ команд, у которых побед и поражений поровну. При этом количество ничьих у команд первой группы на 6 больше, чем у команд второй. Это возможно в единственном случае, когда эти команды имеют одну победу и 6 ничьих. Соответственно, у команд второй группы по 3 победы и 4 поражения. Команды первой группы против команд второй проводят k^2 встреч, среди которых нет ничейных и не больше чем k результативных (по одной на каждую команду первой группы). Значит, $k^2 \le k$, т.е. $k = 1$ и $n - 2k = 8 - 2k > 4$ (такой турнир существует). Аналогично доказывается, что $k \le 2$ при $n = 9$, откуда $n - 2k = 9 - 2k > 4$.

10 класс

1. $\dfrac{1}{4}$. Обозначим вершины квадрата через A, B, C, D, так что L лежит на AB, M лежит на BC, N лежит на CD, K лежит на AD. Пусть O – точка пересечения KM и LN. Обозначим длины отрезков AL и AK через x и y соответственно. Тогда по теореме Пифагора $1 - x - y = \sqrt{x^2 + y^2}$. Отсюда возведением в квадрат получаем $1 = 2x + 2y - 2xy$. Так как $AD \parallel LN \parallel BC$ и $AB \parallel KM \parallel CD$, то $OL = y$ и $OK = x$. Тогда $OM = 1 - x$ и $ON = 1 - y$. Значит, $NC = 1 - x$ и $MC = 1 - y$. Поэтому площадь треугольника NMC равна

$$\frac{1}{2} NC \cdot MC = \frac{1}{2}(1 - x)(1 - y) = \frac{1}{2}(1 - x - y + xy) = \frac{1}{4}.$$

2. Нет. Пусть A, B, C, D, E – последовательные вершины внешнего пятиугольника, A', B', C', D', E' – соответствующие вершины внутренней звезды. Покажем, что каждому цвету, в который покрашена хотя бы одна сторона внешнего пятиугольника, отвечают два из образующих звезду отрезков того же цвета. Из этого вытекает решение задачи: если на контуре пятиугольника встречаются только 2 цвета, то они чередуются, что невозможно из-за нечетности числа 5. Если же на контуре наблюдаются все три цвета, то отрезков, образующих звезду, обнаружится не менее 6 – хотя бы по два отрезка каждого цвета, а их всего 5. Итак, рассмотрим произвольную сторону внешнего пятиугольника, скажем, AB. Пусть она синяя. Тогда отрезки AA' и BB' не синие. Остается проверить, что синими являются один отрезок звезды, примыкающий к вершине A', и один отрезок, примыкающий к вершине B'. Но два отрезка звезды, исходящих из вершины A', отличаются по цвету от отрезка AA' (не синего) и, кроме того, различны по цвету. Значит, среди них есть синий. Точно так же рассматриваются отрезки звезды, исходящие из вершины B'.

Замечание. Граф, описанный в задаче, это знаменитый граф Петерсона.

3. Так как $\angle XAB = \angle XBC$, то все точки X лежат на одной окружности ω, проходящей через точки A и B. Опустим на прямую BP перпендикуляр OY. Из перпендикулярности PX и OX следует, что точки Y, O, P, X лежат на одной окружности. Отсюда получаем равенства ориентированных углов: $\angle BYX = \angle PYX = \angle POX = \angle BAX$. Значит, точка Y лежит на окружности ω. Поэтому все точки P лежат на прямой, проходящей через точку B и точку пересечения ω с окружностью, построенной на OB как на диаметре.

4. Верно. Обозначим наши операции через $f(x) = \frac{1+x}{x}$, $g(x) = \frac{1-x}{x}$. Докажем сначала, что, последовательно применяя их, мы можем получить операции, обратные к f и g.

Имеем $f(g(f(x))) = -x$ и $f\left(g\left(f\left(g\left(f(x)\right)\right)\right)\right) = \frac{1}{1+x}$ при $x \neq -1$. Поэтому $f\left(g\left(f\left(f\left(g\left(f(x)\right)\right)\right)\right)\right) = x$ при $x \neq -1$ и $f\left(g\left(f\left(g\left(f\left(g(x)\right)\right)\right)\right)\right) = x$ при $x \neq -1$. Далее, из 2 можно получить –2 (и наоборот). Кроме того, $f(-2) = 1/2$, $g(1/2) = 1$. Значит, можно получить 1 из 2. Так как $g(-1) = -2$, а из –2 можно получить 2, можно получить 2 из –1. Так как $g(2) = -1/2$ и $f(-1/2) = -1$, можно получить –1 из –2. Итак, обратимость доказана. Теперь достаточно доказать, что из единицы можно получить все положительные рациональные числа. Докажем это индукцией по сумме числителя и знаменателя несократимой дроби, представляющей наше рациональное число $\frac{m}{n}$.

База индукции для $m + n = 2$ очевидна. Допустим, что при $m + n < k$ число $\frac{m}{n}$ можно получить из единицы. Докажем, что тогда и при $m + n = k$ число $\frac{m}{n}$ получается из единицы.

Если $m > n$, то $\frac{m}{n} = 1 + \frac{1}{\frac{n}{m-n}}$ и $n + (m-n) = m < m+n$, поэтому число $\frac{n}{m-n}$ можно получить по предположению индукции.

Если же $m < n$, то $\frac{m}{n} = \frac{1}{1+\frac{n-m}{m}}$ и $(n-m)+m = n < m+n$, поэтому число $\frac{n-m}{m}$ можно получить по предположению индукции.

Значит, в обоих случаях число $\frac{m}{n}$ можно получить из единицы, что и требовалось.

11 класс

1. Может; наибольшее возможное значение равно 9.
Если секторы занумерованы в следующем порядке:

1, 11, 2, 12, 3, 13, 4, 14, 5, 15, 6, 16, 7, 17, 8, 18, 9, 19, 10, 20,

то наименьшая из разностей между соседними номерами равна 9. Эта величина не может быть больше 9, так как в противном случае при любой нумерации рядом (и слева, и справа) с сектором номер 10 может находиться только сектор с номером 20, что невозможно.

2. 4014. Преобразуем второе уравнение:

$$4^x + 4^{-x} = 2\cos ax + 4 \Leftrightarrow 4^x - 2 + 4^{-x} = 2(1+\cos ax) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(2^x - 2^{-x}\right)^2 = 4\cos^2\frac{ax}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4^{\frac{x}{2}} - 4^{-\frac{x}{2}} = 2\cos\frac{ax}{2}, \\ 4^{-\frac{x}{2}} - 4^{\frac{x}{2}} = 2\cos\frac{ax}{2}. \end{array}\right.$$

Оба последних уравнения сводятся к первому уравнению из условия задачи заменами $x = 2y$ и $x = -2z$ соответственно. Поэтому каждое из этих двух уравнений имеет 2007 корней. Нетрудно проверить, что общего корня у них нет. Следовательно, второе уравнение из условия задачи имеет $2 \times 2007 = 4014$ корней.

3. 6, 42, 1806.
Пусть $N = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_k$ ($k \geq 2$) – произведение нескольких различных простых чисел $p_1 < p_2 < \ldots < p_k$, удовлетворяющее условию задачи. Поскольку по условию N кратно четному числу $p_2 - 1$, оно само четно и $p_1 = 2$. Число $N = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_k$ имеет единственный делитель p_1 из интервала (1; p_2), но $p_2 - 1$ также принадлежит этому интервалу, значит, $p_2 - 1 = p_1 = 2$. Таким образом, $p_2 = 3$, а N может принимать значение $2 \times 3 = 6$.
Если $k \geq 3$, то по условию число $p_3 - 1$, принадлежащее интервалу (p_2; p_3), является делителем числа N. Этому интервалу может принадлежать единственный делитель N – число $p_1 \times p_2 = 6$. Следовательно, $p_3 = p_1 \times p_2 + 1 = 7$. Число $2 \times 3 \times 7 = 42$ удовлетворяет условию задачи.
Если $k \geq 4$, то по условию четное число $p_4 - 1$, принадлежащее интервалу (p_3; p_4), также является делителем N. Из четных делителей числа N этому интервалу могут принадлежать лишь числа $p_1 \times p_3 = 14$ и $p_1 \times p_2 \times p_3 = 42$. Число $15 = p_1 \times p_3 + 1$ является составным, значит, $p_4 = p_1 \times p_2 \times p_3 + 1 = 43$. Число $2 \times 3 \times 7 \times 43 = 1806$ удовлетворяет условию задачи.
Если $k \geq 5$, то по условию четное число $p_5 - 1$, принадлежащее интервалу (p_4; p_5), также должно являться делителем N. Из четных делителей числа N этому интервалу могут принадлежать лишь числа $p_1 \times p_4 = 86$, $p_1 \times p_2 \times p_4 = 258$, $p_1 \times p_3 \times p_4 = 602$ и $p_1 \times p_2 \times p_3 \times p_4 = 1806$. Каждое из чисел 87, 259, 603, 1807 является составным. Значит, у числа N не может быть более четырех различных простых делителей.

4. 5. По теореме синусов для треугольников SA_kO ($k = 1,2,\ldots,n$) имеем (рис.14)

$$\sin\angle SOA_k = \frac{SA_k}{SO}\sin\angle SA_kO.$$

Так как правая часть этого равенства не зависит от выбора $k = 1,2,\ldots,n$, величина $\sin\angle SOA_k$ также не зависит от этого выбора. Следовательно, при различном выборе k величина угла $\angle SOA_k$ может принимать не более двух различных значений, каждое из которых вместе с длинами SO, SA_k и углом SOA_k однозначно определяет треугольник SA_kO.

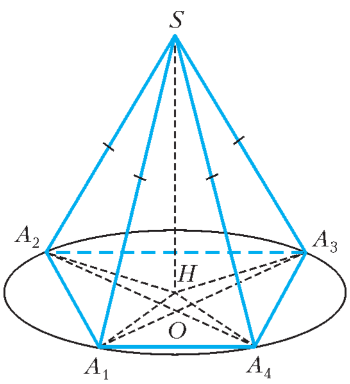

Рис. 14

Если $n \geq 5$, то среди треугольников SA_kO ($k = 1,2,\ldots,5$) есть по крайней мере три одинаковых. Пусть это, для определенности, треугольники SA_1O, SA_2O и SA_3O. Так как $OA_1 = OA_2 = OA_3$, точка O – центр описанной около треугольника $A_1A_2A_3$ окружности. Пусть SH – высота пирамиды $SA_1A_2A_3$. Тогда точка H также является центром описанной около $A_1A_2A_3$ окружности, т.е. $H = O$.

При $n = 4$ из условия не следует, что SO – высота пирамиды. Например, если $A_1A_2A_3A_4$ – равнобокая трапеция, O – точка пересечения ее диагоналей, H – центр описанной около нее окружности, то для пирамиды $SA_1A_2A_3A_4$, в которой SH является высотой к основанию, выполнены все условия задачи. Действительно, во-первых, $SA_1 = SA_2 = SA_3 = SA_4$ в силу равенства (по двум катетам) треугольников SHA_1, SHA_2, SHA_3 и SHA_4, а во-вторых, $\angle SA_1O = \angle SA_2O = \angle SA_3O = \angle SA_4O$ в силу равенства (по трем сторонам) равнобедренных треугольников SA_1A_3 и SA_2A_4. При этом $H \neq O$. При $N \leq 4$ из условия тем более не следует, что SO – высота пирамиды (соответствующий пример получается из предыдущего рассмотрением его части – пирамиды $SA_1A_2A_3$).

5. $2n - 4$. Пусть из некоторой раскраски P можно указанными преобразованиями сделать полностью черный квадрат. Тогда те же преобразования в обратном порядке переведут полностью черный квадрат в раскраску P. При каждом из этих преобразований одинаково раскрашенные строки или противоположно раскрашенные строки (т.е. строки, соответствующие клетки которых раскрашены в разные цвета) переходят также в одинаково или противоположно раскрашенные. Следовательно, все строки раскраски P были одинаково или противоположно раскрашены. Наоборот, из каждой раскраски с этим свойством можно указанными преобразованиями сделать сначала все строки одинаковыми, а затем – и полностью черными. Каждая такая раскраска удовлетворяет одному из следующих условий.

1) В каждой строке все клетки одного цвета. Тогда из условия задачи следует, что в первой и последней строках все клетки черные, т.е. всего черных клеток не менее $2n$.

2) В каждой строке есть не менее двух черных клеток, т.е. всего черных клеток не менее $2n$.

3) Существует строка, в которой ровно одна черная клетка. Тогда либо первая, либо последняя строка с ней не совпадает и, следовательно, противоположна ей, т.е. содержит $n - 1$ черную клетку. В этом случае общее число черных клеток не меньше

$$(n-1)\times 1 + 1 \times (n-1) = 2n - 2.$$

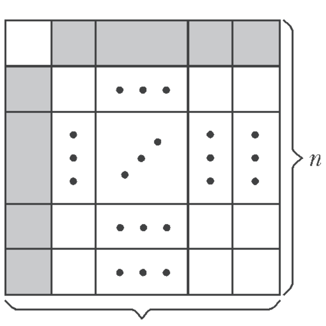

Рис. 15

Таким образом, в любом случае в раскраске P должно быть не менее $2n - 2$ черных клеток. Значит, число клеток, которые нужно предварительно перекрасить, должно быть не меньше $2n - 4$. На рисунке 15 изображен квадрат $n \times n$, все строки которого раскрашены одинаково или противоположно, а число предварительно перекрашенных в черный цвет клеток равно $2n - 4$.

6. Пусть γ_A и γ_C – окружности, описанные около треугольников AHC' и CHA' соответственно (рис. 16). Так как точки B и H симметричны относительно средней линии $A'C'$

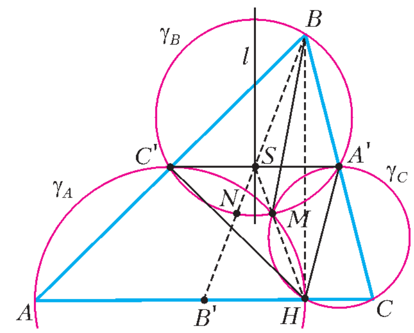

Рис. 16

треугольника ABC, то $C'H = C'B = C'A$, $A'H = A'B = A'C$, т.е. треугольники AHC' и CHA' равнобедренные. Поэтому $A'C'$ ($\parallel AC$) – общая касательная к окружностям γ_A и γ_C. Пусть S – точка пересечения прямых HM и $A'C'$, тогда $SC'^2 = SM \times SH = SA'^2$, т.е. S – середина $A'C'$ и $\angle CBB' = \angle CBS$.

Пусть γ_B – окружность, описанная вокруг треугольника $BA'C'$. Покажем, что точка M лежит на этой окружности. Действительно, если α, β, γ – углы треугольника ABC, то

$$\angle C'MA' = 2\pi - \angle C'MH - \angle A'MH = 2\pi - (\pi - \alpha) - (\pi - \gamma) = \alpha + \gamma = \pi - \beta.$$

Пусть l – серединный перпендикуляр к $A'C'$. Окружность γ_B симметрична относительно l. Так как $\angle HSC' = \angle BSC' = \angle A'SB'$, отрезки SH и SB' симметричны относительно l. Значит, точка N, симметричная точке M относительно l, лежит на γ_B и на BB', а дуги $C'M$ и NA' равны. Вписанные углы $C'BM$ и $A'BN$ опираются на эти дуги, т.е. равны. Итак, $\angle ABM = \angle C'BM = \angle A'BN = \angle CBB'$.

7. Нет. Предположим, что Коле удалось придумать способ наверняка угадать за 3 хода периметр многоугольника с точностью до 0,3. Для каждой из трех указанных Колей прямых Миша отвечает, пересекает ли эта прямая загаданный многоугольник. По предположению для каждого из 8 возможных наборов таких ответов Коля придуманным им способом определяет значение периметра с точностью до 0,3. Следовательно, настоящее значение периметра может принадлежать одному из 8 числовых отрезков суммарной длины не более $8 \times 0,6 = 4,8$. С другой стороны, периметр многоугольника из условия задачи может принимать любое значение из интервала $(0;\ 2\pi)$ длины $2\pi > 4,8$. Следовательно, среди них найдется такой многоугольник, угадать периметр которого с требуемой точностью Коле не удастся.

ИЗБРАННЫЕ ЗАДАЧИ МОСКОВСКОЙ ФИЗИЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЫ

Первый теоретический тур

7 класс

1. $T = \dfrac{T_З T_М}{T_М - T_З} \approx 779$ дней.

2. Лед занимает $\eta = \dfrac{p}{\rho_л g h} = 0,1 = 10\%$ объема снега, воздух – весь остальной объем.

3. $F = \dfrac{P}{3}$.

4. $\rho = \dfrac{\rho_в}{2} = 500$ кг/м^3.

8 класс

1. $S = \dfrac{F_0}{\rho_0 g h_0} = 0{,}01\ \text{м}^2$; $m = \dfrac{F_0}{g} = 1$ кг.

2. $t = 0\ °\text{C}$; $m = \rho_л V + m_в\left(1 - \dfrac{\rho_л}{\rho_в}\right)\left(1 + \dfrac{c_в t_в}{\lambda}\right) \approx 0{,}97$ кг.

3. Конец «черного ящика» с катушкой притягивается к середине «черного ящика» с магнитом, а наоборот – нет. Кроме того, со временем «черный ящик» с катушкой нагревается, а поле катушки ослабевает.

9 класс

1. $S = \dfrac{k}{\rho g} = 0{,}01\ \text{м}^2$.

2. $I_2 = I - \dfrac{U}{R_3} = 0{,}035$ А, $I_3 = \dfrac{U}{R_3} = 0{,}15$ А,

$$R_4 = \frac{R_1\left(UR_3 - R_2\left(IR_3 - U\right)\right)}{\left(IR_3 - U\right)\left(R_1 + R_2\right)} \approx 59\ \text{Ом}.$$

10 класс

1. $v = \dfrac{v_2 - v_1}{2} = 10$ см/с; $\tau = \dfrac{\pi L}{2\left(v_1 + v_2\right)} \approx 1$ с.

2. Ускорение первого груза направлено вверх и равно $a_1 = g/3$, ускорение второго груза направлено вниз и равно $a_2 = g/3$, третий груз неподвижен.

3. $\mu = \dfrac{v_0^2}{2gl\left(1 + m/M\right)}$. **4.** $R_{BC} = R_{AC} + R_{BD} - R_{AD}$.

11 класс

1. $\omega_К = -\dfrac{\omega}{3}$; $\omega_В = \dfrac{\omega}{4}$; $\omega_П = -\dfrac{\omega}{2}$.

2. $h = h_0 \dfrac{m_2^2 - m_1^2}{\left(m_1 + m_3\right)^2 - m_2^2}$. **3.** $E_2 = 2E_1 = 2{,}8$ МэВ.

4. а) $0{,}4\ \text{л} = \dfrac{m_в}{\rho_в} \le V < \dfrac{m_в}{\rho_в}\left(1 + \dfrac{c_в t_в}{c_л\left|t_л\right| + \lambda}\right) = V_1 = 0{,}67$ л;

б) $V > \dfrac{m_в}{\rho_л}\left(1 + \dfrac{c_в t_в + \lambda}{c_л\left|t_л\right|}\right) = V_2 = 6{,}7$ л;

в) $0{,}67\ \text{л} = V_1 \le V \le V_2 = 6{,}7$ л.

5. $\omega_1 = \dfrac{\omega}{\sqrt{2 - \omega^2 LC}}$, $\omega_2 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$.

Второй теоретический тур

8 класс

1. $t_1 = \dfrac{L^2}{2vL_B} = 25$ мин, $t_2 = \dfrac{L^2}{2v\left(L - L_B\right)} = 37{,}5$ мин;

велосипедист отдыхал в Липовке в течение

$$\Delta t = \frac{L^2\left(L - L_A - L_B\right)}{2vL_B\left(L - L_B\right)} = 12{,}5\ \text{мин}.$$

2. $\rho_м = \rho + \left(\rho_в - \rho\right)\dfrac{l_1^2}{l_2^2} \approx 780\ \text{кг/м}^3$.

3. $\tau = \dfrac{V_0}{N_0 v}\left(\dfrac{ch\rho t}{m\lambda} + \dfrac{H}{V}\right) \approx 55$ мин.

9 класс

1. $x = \dfrac{l}{12} = \dfrac{\pi R}{6}$; $\alpha = \dfrac{\pi}{6}$; $\mu > \mathrm{tg}\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

2. Вольтметр V_2 показывает меньшее напряжение;

$I_2 = I_1\left(1 - \dfrac{U'}{U}\right) = 1{,}2$ мА; $U_0 = \dfrac{UU'}{U - U'} + U + U' = 1{,}9$ В.

3. а) $L = \dfrac{h}{\mathrm{tg}\,\alpha}$; б) $L = \dfrac{h}{\mathrm{tg}\,2\alpha}$ при $\alpha < 45°$, $L = 0$ при $\alpha > 45°$.

10 класс

1. $h = \dfrac{9}{121}\dfrac{v^2}{g}$; $\beta = \mathrm{arctg}\dfrac{3\sqrt{3}}{11} \approx 25°$.

2. Ускорение груза *1* направлено вправо и равно

$$a_1 = \frac{2g}{\left(M_1 + m_1\right)\left(\dfrac{1}{M_1 + m_1} + \dfrac{1}{M_2 + m_2} + \dfrac{1}{m_1} + \dfrac{1}{m_2}\right)},$$

ускорение груза *2* направлено влево и равно

$$a_2 = \frac{2g}{\left(M_2 + m_2\right)\left(\dfrac{1}{M_1 + m_1} + \dfrac{1}{M_2 + m_2} + \dfrac{1}{m_1} + \dfrac{1}{m_2}\right)},$$

сила натяжения нити равна

$$T = \frac{2g}{\dfrac{1}{M_1 + m_1} + \dfrac{1}{M_2 + m_2} + \dfrac{1}{m_1} + \dfrac{1}{m_2}}.$$

11 класс

1. $\alpha = \arccos\dfrac{g}{\omega^2 R} = 60°$, $\mathcal{E} = \dfrac{1}{2}BR^2\left(1 - \left(\dfrac{g}{\omega^2 R}\right)^2\right)\omega = 0{,}6$ В.

2. $l_1 \approx \dfrac{1}{2}R\cos\alpha$, $l_2 \approx R\sqrt{1 - \dfrac{3}{4}\cos^2\alpha}$.

Квант журнал ©

НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ

А.А.Егоров, С.П.Коновалов, А.Ю.Котова, В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан

НОМЕР ОФОРМИЛИ

Д.Н.Гришукова, В.В.Иванюк, А.Е.Пацхверия, М.Н.Голованова

ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР

Е.В.Морозова

КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА

Е.А.Митченко, Л.В.Калиничева

Журнал «Квант» зарегистрирован в Комитете РФ по печати. Рег. св-во №0110473

Адрес редакции:
119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант»
Тел.: 930-56-48
E-mail: admin@kvant.info, math@kvant.info, phys@kvant.info

Отпечатано в ОАО ордена Трудового Красного Знамени «Чеховский полиграфический комбинат»
142300 г.Чехов Московской области,
Сайт: www.chpk.ru E-mail: marketing@chpk.ru
Факс: 8(49672) 6-25-36, факс: 8(499) 270-73-00
Отдел продаж услуг многоканальный: 8(499) 270-73-59