Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 1 июня 2005 года по адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» №2–2005» и номера задач, решения которых Вы посылаете, например «М1946» или «Ф1953». В графе «От кого» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем Вашим адресом и необходимый набор марок (в этом конверте Вы получите результаты проверки решений).

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с Вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «Задачник «Кванта», новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором Вы учитесь.

Задачи М1946–М1950, Ф1953–Ф1957

М1946. Пусть ABC – равнобедренный треугольник ($AC = CB$), AH и CL – высоты, I – центр вписанного круга. Докажите, что проекция CH стороны AC на сторону BC равна стороне AB в точности если $IH \parallel AB$.

А.Полянский (ученик 10 кл.)

М1947. Квадрат натурального числа оканчивается на 3 одинаковые ненулевые цифры. Докажите, что предшествующая им цифра нечетна.

В.Сендеров

М1948. Окружности S_1, S_2, S_3 попарно касаются друг друга внешним образом. Окружности S_1 и S_2 имеют одинаковые радиусы и касаются в точке B. Окружности S_1 и S_3 касаются в точке A. Окружность S_2 касается S_3 в точке C. Прямая AB вторично пересекает S_2 в точке D. Прямая DC вторично пересекает S_3 в точке F. Прямая FA пересекает вторично S_1 в точке N. Прямая AC вторично пересекает S_2 в точке L. Докажите, что четырехугольник $DNAL$ является ромбом.

И.Рудаков

М1949. На координатной плоскости расположен правильный многоугольник M с центром $(0, 0)$ и одной из вершин $(1, 0)$.

а) Пусть $\{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\}$ – множество проекций вершин многоугольника M на ось Ox. Докажите, что существует многочлен n-й степени с целыми коэффициентами, корнями которого являются числа $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$.

б) Пусть $\{\beta_1,\ldots,\beta_m\}$ – множество проекций вершин многоугольника M на ось Oy. Докажите, что существует многочлен m-й степени с целыми коэффициентами, корнями которого являются числа $\beta_1,\ldots,\beta_m$.

И.Дорофеев

М1950. Правильный восьмиугольник легко разрезать на параллелограммы. Докажите, что правильный восьмиугольник нельзя разрезать на параллелограммы равной площади.

В.Произволов

Ф1953. Пуля вылетает из ствола с уровня земли со скоростью 50 м/с и «втыкается» в землю, закончив свой полет. На каком максимальном расстоянии от точки выстрела она могла оказаться через 3 с после выстрела? Земля в тех местах плоская, сопротивлением воздуха можно пренебречь.

А.Простов

Ф1954. Верхний блок с закрепленной осью склеен из двух дисков, один из которых имеет вдвое больший диаметр, чем другой (рис.1). Легкая нерастяжимая нить намотана на диски и охватывает также нижний блок, причем нижний блок имеет такой диаметр, что свободные куски нити вертикальны. Найдите ускорения грузов. Блоки считать легкими.

А.Блоков

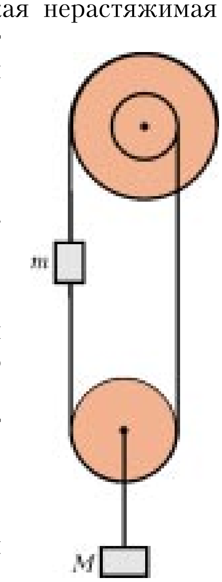

Рис. 1

Ф1955. В вакууме находятся два массивных одинаковых тела, их температуры вначале равны T и $3T$. Если привести тела в соприкосновение, то при выравнивании температур от горячего тела к холодному перетечет количество теплоты Q. Какую максимальную работу можно было бы получить, используя эти тела и тепловую машину? Других тел в нашем распоряжении нет.

Р.Повторов

Ф1956. Три большие параллельные пластины площадью $S = 2\ \text{м}^2$ каждая расположены в вакууме на одинаковых малых расстояниях $d = 1$ мм друг от друга. Заряд средней пластины $Q = 1$ мкКл, заряды двух других Q и $-2Q$. Между крайними пластинами включают резистор сопротивлением $R_1 = 30$ кОм, одновременно с ним еще один резистор сопротивлением $R_2 = 20$ кОм включают между средней пластиной и пластиной с зарядом $-2Q$. Какое количество теплоты выделится при этом в первом резисторе?

А.Зильберман

Ф1957. Цепь из катушки индуктивностью L и конденсатора емкостью C используют в качестве фильтра низких частот (рис.2). При увеличении частоты генератора начиная с некоторой частоты напряжение на нагрузке уменьшается и при дальнейшем увеличении частоты становится совсем малым.

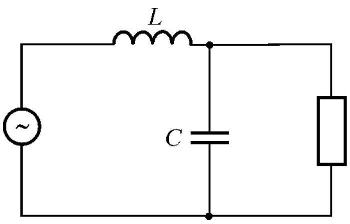

Рис. 2

При каком сопротивлении нагрузки R напряжение с увеличением частоты генератора будет меняться монотонно? (Если взять R достаточно большим, то будет явно выражен резонанс – при приближении к собственной частоте LC-контура напряжение нагрузки будет резко возрастать, и только потом – на еще больших частотах – будет уменьшаться).

З.Рафаилов

Решения задач М1921–М1930, Ф1938–Ф1942

М1921. *На наибольшей стороне AB треугольника ABC взяли точки M и N такие, что BC = BM и CA = = AN, а на сторонах CA и BC – точки P и Q такие, что PM параллелен BC и QN параллелен CA (рис.1). Докажите, что QC = CP.*

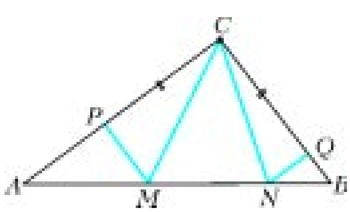

Рис. 1

Сразу обнаруживаем, что $\angle MPC = \angle CQN$. В самом деле, $\angle MPC = 180° - \angle ACB$, но и $\angle CQN = 180° - \angle ACB$.

Убедимся теперь, что MC является биссектрисой угла PMB. Действительно, с одной стороны, $\angle PMC = \angle BCM$, а с другой, $\angle BCM = \angle BMC$, ибо треугольник BCM равнобедренный. Аналогично убеждаемся, что NC является биссектрисой угла QNA.

Ввиду этого после симметричного отражения ΔPMC относительно MC получим точку P_1, образ точки P, лежащей на AB (рис.2). После симметричного отражения ΔQNC относительно NC получим точку Q_1, лежащую тоже на AB.

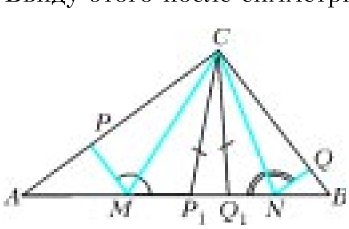

Рис. 2

Треугольник P_1Q_1C равнобедренный, так как $\angle MPC = \angle CQN$. Значит, $CP = QC$.

В.Произволов

М1922. *Бильярдный стол имеет форму многоугольника (не обязательно выпуклого), у которого соседние стороны перпендикулярны друг другу. Вершины этого многоугольника – лузы, при попадании в которые шар там и остается. Из вершины с (внутренним) углом 90° выпущен шар, который отражается от бортов (сторон многоугольника) по закону «угол падения равен углу отражения». Докажите, что шар в эту вершину никогда не вернется.*

Проведем доказательство от противного. Пусть шар вернулся в исходную точку. Обозначим начальную и конечную точку через A, а точки отражения через $A_1, \ldots, A_n$. Заметим, что угол (обычный, ненаправленный) между вертикальной прямой и отрезками пути шара постоянен (нетрудно проверить, что он не меняется при отражениях относительно как вертикальных, так и горизонтальных прямых). Можно считать, что он не равен 0° и 90°, иначе шар свалится в первую попавшуюся лузу. Так как A – вершина внутреннего угла, то существует лишь один луч с вершиной в A, образующий данный угол с вертикальной прямой и лежащий в той четверти, где расположен стол. Значит, шар вернулся в A по той же прямой, по которой и вылетел.

Таким образом, первый и последний отрезки пути шара совпадают. Рассмотрим два отражения шара от стенки в точке A_1 – первое и последнее. Учитывая закон отражения, получим, что шар в конце пути прилетел в точку A_1 по той же траектории, по которой вылетел из нее вначале. Поэтому второй и предпоследний отрезки пути шара также совпадают. Рассуждая аналогично, мы видим, что путь шара состоит из двух частей, вторая из которых получается из первой прохождением в обратном направлении. Значит, в некоторый момент времени шар, отразившись от стенки, пошел в противоположную сторону. Но тогда некоторый отрезок пути шара перпендикулярен стороне многоугольника, следовательно, образует с вертикальной прямой угол 0° или 90°. Противоречие получено.

А.Канель-Белов

М1923. *На плоскости отмечено N различных точек. Известно, что среди попарных расстояний между отмеченными точками встречаются не более n различных расстояний. Докажите, что $N \le (n+1)^2$.*

Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_N$ – отмеченные точки, и каждое из расстояний A_iA_j ($1 \le i < j \le N$) равно одному из n фиксированных чисел $r_1, r_2, \ldots, r_n$. Это означает, что для каждого i ($1 \le i \le N$) все отмеченные точки, кроме A_i, лежат на одной из n окружностей $O(A_i, r_1)$, $O(A_i, r_2), \ldots, O(A_i, r_n)$ (через $O(X, r)$ мы обозначаем окружность радиуса r с центром в точке X).

Введем на плоскости систему координат так, что оси координат не параллельны прямым A_iA_j ($1 \le i < j \le N$). Рассмотрим отмеченную точку с наименьшей абсциссой, пусть это точка A_1. Среди прямых $A_1A_2, A_1A_3, \ldots, A_1A_N$ найдем прямую (или одну из пря-