

# Материалы вступительных экзаменов 2006 года

Институт криптографии, связи и информатики Академии ФСБ РФ

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

(факультеты прикладной математики и информационной безопасности)

1. Найдите наибольшее значение параметра  $a$ , при котором неравенство  $2x^2 - 6x - 1,5 \geq a$  верно для любого действительного  $x$ .

2. Решите неравенство

$$|\sqrt{17-x} - x| \leq x + 2.$$

3. Решите уравнение

$$\frac{2 \sin 4x - \sqrt{3} - 2 \sin 2x + 2\sqrt{3} \cos 2x}{2 \sin 4x + \sqrt{3}} = 0.$$

4. Груз вначале погрузили в вагоны вместимостью по 80 тонн, но один вагон остался загружен не полностью. Тогда весь груз переложили в вагоны вместимостью по 60 тонн. При этом понадобилось на 8 вагонов больше, и все равно один вагон остался загружен не полностью. Наконец, груз переложили в вагоны вместимостью по 50 тонн. При этом понадобилось еще на 5 вагонов больше, и все вагоны оказались полностью загруженными. Сколько было тонн груза?

5. Отрезок  $AD$  является биссектрисой прямоугольного треугольника  $ABC$  ( $\angle C = \pi/2$ ). Окружность радиуса  $\sqrt{15}$  проходит через точки  $A, C, D$  и пересекает гипотенузу  $AB$  в точке  $E$  так, что  $AE : AB = 3 : 5$ . Найдите площадь треугольника  $ABC$ .

6. Какую фигуру на координатной плоскости определяет система неравенств

$$\begin{cases} y \geq |x + 2| - 1, \\ y \leq 8 - |x - 1|? \end{cases}$$

Ответ обоснуйте. Найдите площадь данной фигуры.

Вариант 2

(факультеты специальной техники и информационной безопасности)

1. Сколько решений имеет система уравнений

$$\begin{cases} -x + ay = 2, \\ ax - y = 3a - 5 \end{cases}$$

при различных значениях параметра  $a$ ?

2. Решите уравнение

$$3\sqrt{x+3} - \sqrt{x-2} = 7.$$

3. Решите уравнение

$$\sqrt{8 + \frac{1}{\log_x 3}} - \sqrt{10 \log_9 x + 20} + 2 = 0.$$

4. Решите уравнение

$$\sin 2x + \sin 6x = \sqrt{3} \cos 2x.$$

5. В ромбе  $ABCD$  из вершины тупого угла  $B$  на сторону  $AD$  опущен перпендикуляр  $BE$ . Найдите углы ромба, если  $2\sqrt{3}CE = \sqrt{7}AC$ .

6. Три бригады, работая одновременно, выполняют дневную норму цеха за 5 часов. Вторая бригада, работая отдельно, выполняет норму цеха на 5 часов быстрее, чем одна третья бригада. За какое время вторая бригада выполнит норму цеха, если известно, что третья бригада выполнила бы ее вдвое быстрее, чем первая?

Вариант 3

(олимпиада-2006, все факультеты)

1. В арифметической прогрессии, все члены которой являются целыми числами, второй член равен 4, а сумма квадратов третьего и четвертого членов меньше 16. Чему может быть равен первый член прогрессии?

2. Можно ли расположить числа от 1 до 7 в вершинах фигуры, показанной на рисунке 1, так, что все числа в вершинах попарно различны, а сумма чисел в вершинах каждого из трех четырехугольников равна 14?

3. Решите неравенство

$$\frac{8}{9} \cdot \frac{3^x}{3^x - 2^x} \leq 1 + \left(\frac{2}{3}\right)^x.$$

4. Четырехугольник  $PQRT$  вписан в окружность. Длины его сторон  $PQ$  и  $RT$  равны 9 и 6 соответственно, а длины диагоналей  $PR$  и  $QT$  равны 8 и 10 соответственно. Найдите отношение площадей треугольника  $PQR$  и четырехугольника  $PQRT$ .

5. Решите уравнение

$$x - |x - |x + 1|| = \sqrt{5 - |2 - |6 - x||}.$$

6. Решите уравнение

$$\frac{3 \operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^3 x}{2 - \cos^2 x} = \frac{4 + 2 \cos \frac{6x}{5}}{\cos 3x + \cos x}.$$

7. Решите уравнение

$$x^5(x-1)^5 + \dots + (x-2006)^5 = 0.$$

ФИЗИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

(факультеты специальной техники и информационной безопасности)

1. Камень, брошенный с поверхности земли под углом  $\alpha = 30^\circ$  к горизонту, дважды побывал на одной и той же высоте  $h$  спустя время  $t_1 = 3$  с и  $t_2 = 5$  с после начала

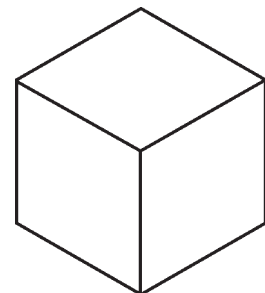


Рис. 1

движения. Найдите начальную скорость камня  $v_0$ . Ускорение свободного падения  $g = 10 \text{ м/с}^2$ .

2. Брусок массой  $M = 2 \text{ кг}$  движется вдоль горизонтальной плоскости под действием силы  $F = 20 \text{ Н}$ , направленной вверх под углом  $\alpha = 30^\circ$  к горизонту (рис.2). Коэффициент трения скольжения бруска о плоскость  $\mu = 0,1$ . Найдите ускорение бруска  $a$ . Ускорение свободного падения  $g = 10 \text{ м/с}^2$ .

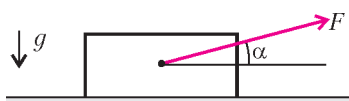


Рис. 2

3. Электроплитка имеет три секции с одинаковыми сопротивлениями. При параллельном их соединении вода закипает через  $t_0 = 6 \text{ мин}$ . Через какое время  $t$  закипит вода

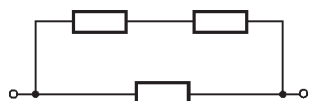


Рис. 3

такой же массы и такой же начальной температуры при соединении секций, показанном на рисунке 3? 4. Температура нагревателя идеальной тепловой машины Карно  $T_1 = 390 \text{ К}$ , а температура холодильника  $T_2 = 300 \text{ К}$ . Количество теплоты, получаемое машиной от нагревателя в каждом цикле, равно  $Q_1 = 60 \text{ кДж}$ . Вычислите количество теплоты  $Q_2$ , отдаваемое холодильнику в каждом цикле.

5. В водоем на одну и ту же глубину помещены два точечных источника: первый источник красного света, второй – фиолетового. Абсолютный показатель преломления воды для красных лучей  $n_1 = 1,328$ , для фиолетовых –  $n_2 = 1,335$ . Найдите отношение радиусов кругов  $R_1$  и  $R_2$  на поверхности воды, в пределах которых возможен выход в воздух лучей от первого и второго источников соответственно. Абсолютный показатель преломления воздуха считать равным единице.

Вариант 2

(факультеты прикладной математики и информационной безопасности)

1. В течение времени  $t_1 = 5 \text{ ч}$  поезд двигался со скоростью  $v_1 = 60 \text{ км/ч}$ , а затем в течение времени  $t_2 = 4 \text{ ч}$  – со скоростью  $v_2 = 15 \text{ км/ч}$ . Найдите среднюю скорость поезда  $v_{\text{ср}}$  за все время движения.

2. Призма находится на горизонтальном шероховатом столе (рис.4). На поверхность призмы, составляющую угол  $\alpha$  с горизонтом, положили брусок массой  $m$  и отпустили. Он стал соскальзывать, а призма осталась в покое. Коэффициент трения скольжения между бруском и призмой  $\mu$ . Найдите силу трения  $F_{\text{тр}}$  между призмой и столом.

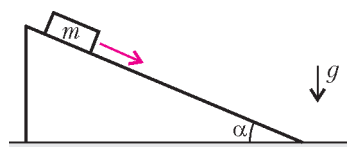


Рис. 4

3. Два резистора с сопротивлениями  $R_1 = 10 \text{ Ом}$  и  $R_2 = 20 \text{ Ом}$ , соединенные друг с другом параллельно, подключены к источнику с ЭДС  $\mathcal{E} = 6 \text{ В}$  и внутренним сопротивлением  $r = 2 \text{ Ом}$ . Найдите тепловую мощность  $P$ , выделяющуюся на сопротивлении  $R_1$ . Сопротивлением соединительных проводов пренебречь.

4. В цилиндре под поршнем находится воздух при температуре  $T_1 = 300 \text{ К}$  и давлении  $p_1 = 100 \text{ кПа}$ . Воздух сжимают так, что его объем уменьшается в 20 раз, а давление возрастает до  $p_2 = 6000 \text{ кПа}$ . Найдите конечную температуру воздуха  $T_2$ .

5. Оптическая система состоит из двух линз – рассеивающей с фокусным расстоянием, равным по модулю  $|F_1| = 10 \text{ см}$ , и собирающей с фокусным расстоянием  $F_2 = 15 \text{ см}$ , распо-

ложенных вдоль общей главной оптической оси на расстоянии  $a = 30 \text{ см}$  друг от друга. Перед системой со стороны рассеивающей линзы на расстоянии  $d_1 = 12 \text{ см}$  от нее на главной оптической оси помещен точечный источник света. На каком расстоянии  $f_2$  от второй линзы получится изображение источника, даваемое системой этих линз?

Вариант 3

(олимпиада-2006, все факультеты)

1. Ведущая шестерня радиусом  $R$  вращается с постоянной угловой скоростью  $\Omega$  и приводит во вращение шестерню радиусом  $r$ . В некоторый момент времени метки  $A$  и  $B$ , выбитые на шестернях, совпадают (рис.5). Через какой наименьший промежуток времени  $t_0$  относительная скорость меток станет равной нулю? Оси вращения шестерен неподвижны.

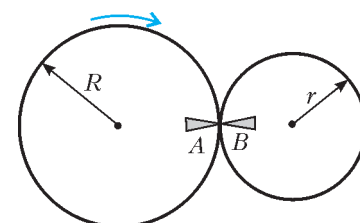


Рис. 5

2. Упругая шайба падает плашмя на горизонтальную абсолютно твердую поверхность таким образом, что в момент падения ее скорость равна  $v_0 = 4,5 \text{ м/с}$  и направлена под углом  $\alpha = 30^\circ$  к горизонту. Коэффициент трения скольжения между шайбой и поверхностью  $\mu = 0,25$ . Чему равно расстояние  $s$  между местом второго и местом третьего удара шайбы о поверхность? Влиянием силы тяжести за время удара можно пренебречь. Ускорение свободного падения  $g = 10 \text{ м/с}^2$ .

3. Сосуд квадратного сечения со стороной  $a$  заполнен водой до высоты  $h = 40 \text{ см}$ . Силы давления воды на боковую стенку сосуда и на его дно равны друг другу. Найдите сторону квадрата  $a$ .

4. Два баллона одного и того же объема  $V = 1 \text{ л}$  соединены тонкой трубкой с закрытым краном В первом баллоне находится сухой воздух под давлением  $p_{\text{в}} = 750 \text{ мм рт.ст.}$ , а в другой баллон после откачки до глубокого вакуума помещена капелька воды массой  $m = 0,1 \text{ г}$ . Какое давление  $p$  будет в баллонах после открытия крана и установления равновесия, если температура баллонов постоянна и равна  $t = 22^\circ \text{ C}$ , а давление насыщенного водяного пара при этой температуре составляет  $p_{\text{нас}} = 20 \text{ мм рт.ст.}$ ? Молярная масса воды  $M_{\text{воды}} = 0,018 \text{ кг/моль}$ .

Для справки:  $1 \text{ атм} \approx 10^5 \text{ Па} \approx 760 \text{ мм рт.ст.}$

5. В коробке собрана некоторая электрическая цепь и сделаны два вывода  $A$  и  $B$  (рис.6). При подключении к ним идеального амперметра и гальванического элемента с ЭДС  $\mathcal{E} = 1,5 \text{ В}$  и пренебрежимо малым внутренним сопротивлением сила тока оказалась равной  $I_1 = 1 \text{ А}$ . Когда полярность элемента изменили на противоположную, ток уменьшился в два раза, не меняя своего направления.

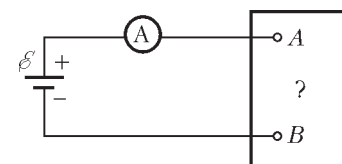


Рис. 6

Предложите схему какой-нибудь одной, по возможности простой, цепи, находящейся внутри коробки, и рассчитайте ее параметры.

6. Протон движется по окружности радиусом  $R = 80 \text{ см}$  в однородном магнитном поле с индукцией  $B = 0,3 \text{ Тл}$ . Найдите скорость протона  $v$ . Масса протона  $m = 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$ , его заряд  $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}$ .

7. В линзе с фокусным расстоянием  $F = 6,7 \text{ см}$  получено прямое изображение предмета с поперечным увеличением

$\Gamma = 3$ . Чему равно расстояние  $L$  от предмета до изображения?

*Публикацию подготовили А.Леднев, А.Пичкур*

Московский государственный институт  
электронной техники  
(технический университет)

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Найдите  $\operatorname{tg} \alpha$ , если  $\sin(\pi + \alpha) = -\frac{5}{7}$  и  $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ .

2. Найдите область определения функции

$$y = \sqrt{\frac{5x-1}{x+5}} - 1.$$

3. Решите неравенство

$$\log_2(x^2 - 3x) \leq -\log_{0,5}(6 - 4x).$$

4. Решите уравнение

$$\sin 2006x = \cos 1003x.$$

5. Центр круга, описанного около равнобедренной трапеции, принадлежит ее большему основанию. Найдите основания трапеции, если известно, что площадь круга равна  $169\pi$ , а высота трапеции равна 12.

6. При каких значениях  $x$  числа  $3$ ,  $3^{x+1}$ ,  $4 - 11 \cdot 3^x$  являются последовательными членами некоторой геометрической прогрессии?

7. Через сторону квадрата проведена плоскость, составляющая с плоскостью квадрата угол  $60^\circ$ . Под каким углом наклонены к этой плоскости диагонали квадрата?

8. Постройте график функции

$$y = \sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} - \sqrt{x - 2\sqrt{x-1}}.$$

9. Решите уравнение

$$\sqrt{x^4 + x^3 - \frac{7}{2}x^2 - 4x + 2} = x^2 - 2.$$

10. От пристани  $A$  одновременно отправились вниз по течению реки катер и плот. Катер спустился вниз по течению на 96 км, затем повернул обратно и вернулся в  $A$ , потратив на весь путь 14 часов. Найдите скорость катера в стоячей воде и скорость течения реки, если известно, что катер встретил плот на обратном пути на расстоянии 24 км от  $A$ .

11. При каких значениях параметра  $a$  имеет ровно один экстремум на промежутке  $(-2; 0)$  функция

$$f(x) = \frac{a}{3}x^3 - \frac{a-6}{2}x^2 + 2x + a^3?$$

Вариант 2

1. Найдите  $\log_2 18$ , если  $\log_2 3 = a$ .

2. Решите уравнение

$$2^{x+2} - 2^{x+3} - 2^{x+4} = 5^{x+1} - 5^{x+2}.$$

3. Решите уравнение

$$x \cdot |x+1| + |x| \cdot (x+1) = 4.$$

4. Решите неравенство

$$\frac{x^2}{x^2 + 3x - 4} \leq 1.$$

5. Решите уравнение

$$2 \sin 3x \cdot \cos x + 2 \cos 3x \cdot \sin(\pi + x) = 1.$$

6. Цилиндр с площадью основания, равной  $5\pi$ , вписан в шар. Найдите объем цилиндра, если объем шара равен  $36\pi$ .

7. В равнобедренную трапецию вписана окружность. Найдите длину этой окружности, если известно, что боковая сторона и меньшее основание трапеции равны 5 и 2 соответственно.

8. Два спортсмена бегают с постоянными скоростями по замкнутой дорожке. На пробег всей дорожки первый спортсмен тратит на 25 секунд меньше второго. Если они стартуют из одной точки в одном и том же направлении, то первый спортсмен впервые догоняет второго через 150 секунд после старта. Через какое время произойдет их первая встреча, если они будут стартовать из одной точки в противоположных направлениях?

9. Решите неравенство

$$\log_{1/2}(\sqrt{5-x} - x + 1) > -3.$$

10. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 8xy - 9y^2 = 14, \\ 10y - x^2 = 13. \end{cases}$$

11. При каких значениях параметра  $a$  найдутся числа  $x$  и  $y$ , удовлетворяющие уравнению  $\sqrt{2xy+a} = x+y+1$ ?

ФИЗИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Стержень  $AB$ , ориентированный вдоль оси  $x$ , движется с постоянной скоростью  $v = 0,1$  м/с в положительном направлении оси. Передним концом стержня является точка  $A$ , задним – точка  $B$ . Найдите длину стержня, если в момент времени  $t_A = 10$  с координата точки  $A$  равна  $x_A = 3$  м, а в момент  $t_B = 30$  с координата точки  $B$  равна  $x_B = 4,5$  м.

2. Двумя нитями, одна из которых горизонтальная, а другая составляет с горизонтом угол  $\alpha = 60^\circ$ , груз закреплен на тележке (рис.1). С каким ускорением движется тележка по горизонтальной поверхности, если силы натяжения нитей одинаковы по величине? Груз покоится относительно тележки. Ускорение свободного падения  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>.

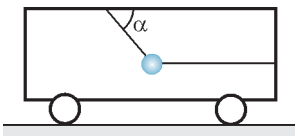


Рис. 1

3. В результате центрального столкновения двух одинаковых частиц, двигавшихся навстречу друг другу со скоростями  $v$  и  $2v$ , скорость более быстрой частицы изменила направление на противоположное и уменьшилась по величине в 2 раза. а) Во сколько раз изменилась величина скорости другой частицы? б) Является ли столкновение частиц абсолютно упругим? Ответ следует обосновать.

4. В одном из двух баллонов содержится углекислый газ, а в другом – водород. Объемы, температуры и давления газов одинаковые. а) Во сколько раз отличаются массы газов в баллонах? б) В каком баллоне масса газа увеличится и во сколько раз, если баллоны соединить тонкой трубкой? Молярные массы водорода и углекислого газа равны  $M_{\text{вод}} = 2$  г/моль и  $M_{\text{угл}} = 44$  г/моль соответственно.

5. В сосуде под поршнем находится идеальный одноатомный газ, занимая объем  $V = 4$  л при давлении  $p = 200$  кПа. Во сколько раз увеличится абсолютная температура газа, если его адиабатически сжать, совершив работу  $A = 3$  кДж?

6. Точечный заряд  $q_1$ , расположенный в вершине  $A$  квадрата  $ABCD$ , создает в вершине  $D$  электрическое поле, модуль вектора напряженности которого  $E_1 = 4000$  В/м,