Будет ЕГЭ по математике!

Л.ДЕНИЩЕВА, Б.ПИСАРЕВСКИЙ

Эксперимент по проведению в нашей стран единого государственного экзамена (ЕГЭ) начался в 2001 году. Введение ЕГЭ сопровождалось яростными спорами сторонников и противников этого метода итоговой аттестации выпускников средней школы и отбора наиболее подготовленных для зачисления в вузы. Дискуссии на эту тему возникают и сейчас, но ситуация радикально изменилась. В 2007 году Государственная дума и Совет Федерации приняли закон об обязательности ЕГЭ, и этот закон подписал Президент РФ. Начиная с 2009 года, ЕГЭ по математике, физике, большинству других предметов полностью заменят выпускные экзамены в школах и вступительные экзамены в высших учебных заведениях. В 2008 году ЕГЭ по математике и русскому языку станут обязательными для выпускников московских школ.

За время проведения эксперимента содержание ЕГЭ по математике плавно изменялось, пока в 2005 году организаторы не нашли оптимальную, с их точки зрения, форму, которая сохраняется и сейчас.

Вариант ЕГЭ по математике состоит из трех частей.

В Части 1 представлены задания базового уровня сложности. С их помощью проверяется, как выпускники умеют применять изученный теоретический материал (правила, формулы, свойства и т.п.) в знакомой ситуации. Формулировки заданий традиционны для школьных учебников по курсу алгебры и начал анализа.

В этой части представлены задания с выбором ответа (из четырех возможных) и задания с кратким ответом.[1]

Задания Части 1 успешно выполняют большинство учащихся, имеющих школьную оценку «3», а также практически все выпускники, имеющие оценку «4» и «5».

В Часть 2 варианта ЕГЭ включены задания повышенного уровня сложности. При их выполнении выпускник должен применить изученный материал в несколько измененной ситуации:

- либо преобразовать исходные данные задачи, чтобы стало возможно применить стандартный метод решения;
- либо перестроить в соответствии с данными задачи имеющийся метод решения.

Во второй части работы представлены два типа заданий: задания с кратким ответом и задания с развернутым ответом.[2] Задания этой части оказываются по силам лишь половине тех выпускников, которые имеют школьную оценку «4», и большинству выпускников, имеющих оценку «5». С отдельными заданиями повышенного уровня сложности справляется совсем незначительная часть выпускников, имеющих оценку «3».

[1] *Правильность выполнения этих заданий оценивается только по конечному ответу, внесенному в бланк ответов.*

[2] *При выполнении этих заданий решение выпускника проверяется и оценивается максимально 2 баллами двумя независимыми экспертами.*

В Части 3 варианта ЕГЭ представлены задания высокого уровня сложности. При их выполнении, исходя из всего багажа имеющихся знаний, выпускнику необходимо самостоятельно сконструировать новый метод решения, исследуя описанную в условии задачи проблему. Кроме того что выпускник найдет путь, приводящий его к ответу на вопрос задачи, он должен будет грамотно, используя принятую терминологию и символику, записать обоснованное решение.

С заданиями Части 3 справляются только те выпускники, которые имеют самый высокий уровень математической подготовки. Они составляют от 10% до 20% выпускников, имеющих школьную оценку «5».

Ниже приведен один из вариантов ЕГЭ по математике, который предлагался в 2007 году. На выполнение работы дается 4 часа (240 мин).

За выполнение работы выставляются две оценки: аттестационная отметка и тестовый балл. Аттестационная отметка за усвоение курса алгебры и начал анализа 10–11 классов выставляется по пятибалльной шкале. При ее выставлении не учитывается выполнение четырех заданий (B9, B10, B11, C4). В тексте работы номера этих заданий отмечены звездочкой. Тестовый балл выставляется по 100-балльной шкале на основе первичных баллов, полученных за выполнение всех заданий работы.

Советуем для экономии времени пропускать задание, которое не удается выполнить сразу, и переходить к следующему. К выполнению пропущенных заданий можно вернуться, если у вас останется время.

Вариант 2007 года

Часть 1

A1. Упростите выражение $b^{-3,4} \cdot 5b^{0,2}$.

1) $5b^{-3,6}$; 2) $5^{0,2}b^{-3,2}$; 3) $5b^{-3,2}$; 4) $5^{0,2}b^{-3,6}$.

A2. Вычислите $\dfrac{\sqrt[3]{189}}{3\sqrt[3]{7}}$.

1) 1; 2) $\dfrac{1}{3}$; 3) 9; 4) 27.

A3. Вычислите $\log_2 80 - \log_2 5$.

1) 0; 2) 2; 3) 3; 4) 4.

A4. Функция задана графиком (рис.1). На каком из указанных промежутков она возрастает?

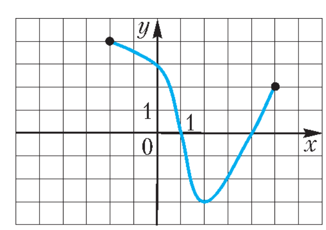

Рис. 1

1) [1; 4]; 2) [2; 5]; 3) [0; 5]; 4) [–2; 1].

A5. Найдите производную функции $y = 12x^3 - e^x$.

1) $y' = 15x^2 - xe^{x-1}$; 2) $y' = 3x^2 - \dfrac{e^x}{x+1}$;

3) $y' = 36x^2 - xe^{x-1}$; 4) $y' = 36x^2 - e^x$.

A6. Найдите множество значений функции $y = 3\sin x$.

1) [–3; 3]; 2) [0; 3]; 3) [–1; 1]; 4) $(-\infty; +\infty)$.

A7. Функция задана графиком (рис.2). Укажите промежуток, на котором она принимает только отрицательные значения.

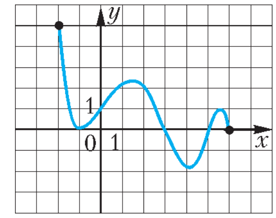

Рис. 2

1) (3; 6); 2) (3; 5); 3) (–2; –1); 4) (–2; 0).

A8. Решите неравенство $\dfrac{3+x}{(x-9)(x-1)} \le 0$.

1) $(-\infty; -3]$; 2) $(-\infty; -3] \cup (1; 9)$; 3) $(-\infty; -9)$;

4) $[-3; 1) \cup (9; +\infty)$.

А9. Решите уравнение $\sin x - \frac{1}{2} = 0$.

1) $\pm\frac{\pi}{6} + 2\pi n, \quad n \in \boldsymbol{Z}$; 2) $\frac{\pi}{3} + 2\pi n, \quad n \in \boldsymbol{Z}$;

3) $(-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, \quad n \in \boldsymbol{Z}$; 4) $(-1)^n \frac{\pi}{6} + 2\pi n, \quad n \in \boldsymbol{Z}$.

А10. Найдите область определения функции

$$y = \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^{5-4x} - \frac{1}{27}}.$$

1) $[0,5; +\infty)$; 2) $(-\infty; 0,5]$; 3) $(0,5; +\infty)$; 4) $[2; +\infty)$.

В1. Найдите значение выражения $3\sin^2\alpha - 5\cos^2\alpha$, если $\cos\alpha = -0,5$.

В2. Решите уравнение $3^{x+2} + 6 \cdot 3^x = 5$.

В3. Решите уравнение $\sqrt{2x^2 - x - 6} = -x$.

Часть 2

В4. Найдите значение выражения $\cos x$, если известно, что

$$\begin{cases} x + y = \frac{\pi}{2}, \\ 2\cos x + 8\sin y = 3. \end{cases}$$

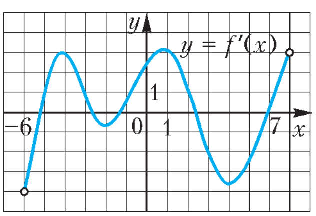

Рис. 3

В5. Функция $y = f(x)$ определена на промежутке $(-6; 7)$. На рисунке 3 изображен график производной этой функции. К графику функции провели все касательные, параллельные прямой $y = 3 - x$ (или совпадающие с ней). Укажите количество точек графика функции, в которых проведены эти касательные.

В6. Найдите значение выражения $\sqrt[4]{\left(37 - 20\sqrt{3}\right)^2} + 2\sqrt{3}$.

В7. Решите уравнение

$$\log_7(3x + 5) + \sqrt[4]{\log_7^4(2x + 5)} = 0.$$

(Если уравнение имеет более одного корня, то запишите произведение всех его корней.)

В8. Функция $y = f(x)$ определена на всей числовой прямой и является периодической с периодом 3. На рисунке 4 изображен график этой функции при $-2 \le x \le 1$. Найдите значение выражения $f(-5) - f(-1) + f(12)$.

Рис. 4

В9*. Две бригады, работая вместе, ремонтировали дорогу в течение 6 дней, а затем одна вторая бригада закончила ремонт еще за 10 дней. За сколько дней могла бы отремонтировать дорогу одна первая бригада, если она может выполнить эту работу на 6 дней быстрее, чем одна вторая бригада?

В10*. Точки K и M лежат на окружностях двух оснований цилиндра. Синус угла наклона прямой KM к плоскости основания цилиндра равен 0,6, $KM = 10$, объем цилиндра равен 150π. Найдите площадь осевого сечения цилиндра.

В11*. Боковая сторона равнобедренного треугольника ABC равна 15, а его площадь равна 67,5. К основанию AC и стороне BC проведены высоты BE и AH, пересекающиеся в точке O. Найдите площадь треугольника BOH.

С1. Найдите точки минимума функции

$$f(x) = 3x^4 + 3x^3 - 72x^2 + 2^{-\log_{0,5}\left(x^3+8\right)}.$$

С2. Решите уравнение

$$x^2 + x = 0,5(6 - x) + \sqrt{2x^2 + 3x + 2}.$$

Часть 3

С3. Найдите все значения a, для которых при каждом x из промежутка $(-3; -1]$ значение выражения $x^4 - 8x^2 - 2$ не равно значению выражения ax^2.

С4*. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с боковыми ребрами AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 на сторонах AD, A_1B_1, B_1C_1 его оснований лежат точки L, K, M соответственно так, что $AL : LD = 2 : 5$, $A_1K : KB_1 = 2 : 3$, $B_1M : MC_1 = 5 : 2$. Во сколько раз объем параллелепипеда больше объема пирамиды с вершиной K и основанием $LDMB_1$?

С5. Докажите, что система уравнений

$$\begin{cases} 15x^3 + 36x^2 + 22x + 4 = 0, \\ 9\sin\frac{\pi}{x} + \cos\left((5x+1)y\right) = \\ \qquad = y\left(y + \frac{2}{x} - 1\right) + \sqrt{\frac{4}{x} + 16 + 5x(1-5x)}\sin y \end{cases}$$

не имеет решений.

Далее в статье приводятся ответы к наиболее простым задачам, указания к решениям, полные решения и комментарии к ним для более сложных задач. Мы настоятельно рекомендуем читателям-выпускникам закрыть этот текст листом бумаги или тетрадкой, постараться решить задачи самостоятельно и только после этого проверить ответы.

Напоминаем, что на реальном ЕГЭ пользоваться справочниками и калькулятором не разрешается.

Ответы к задачам Части 1

А1	А2	А3	А4	А5	А6	А7	А8	А9	А10	В1	В2	В3
3	1	4	2	4	1	2	2	3	1	1	–1	–2

В4. Выразим y из первого уравнения системы, подставим во второе и используем формулу приведения. *Ответ:* 0,3.

Комментарии. При всей простоте этого задания при его выполнении у менее подготовленных выпускников возникают трудности и сомнения, связанные с формируемым в школе стереотипом решения систем уравнений. В предложенном задании требуется найти значение $\cos x$, а не множество пар чисел (x, y), являющихся решением данной системы. Именно поставленный вопрос и вызывает затруднение слабых учащихся. В целом с заданием справилось менее 40% выпускников.

В5. Заданная в условии задачи прямая $y = 3 - x$ имеет угловой коэффициент $k = -1$. Осталось выяснить, сколько найдется точек на графике, в которых $f'(x) = -1$. *Ответ:* 3.

Комментарии. Как мы видим из приведенного решения, при выполнении этого задания выпускнику не требуется проводить какие-либо преобразования или вычисления. Здесь проверяется владение геометрическим смыслом производной, а все числовые данные представлены на рисунке, который нужно только «прочитать». Вместе с тем, решение задачи вызвало серьезные затруднения у выпускников (справились с заданием менее трети участников экзамена).

Вероятнее всего, дело в том, что в школьных учебниках обычно по графику производной требуется определить угловой коэффициент касательной, проведенной в точке с заданной абсциссой x_0. Здесь же приведена (в определенном смысле) обратная задача.

В6. Для любого действительного числа справедливо равенство $\sqrt[4]{a^4} = |a|$. Чтобы использовать это равенство для выполнения задания, проверим, нельзя ли выражение $37 - 20\sqrt{3}$ представить в виде квадрата двучлена: $37 - 20\sqrt{3} = 25 - 2 \cdot 5 \cdot 2\sqrt{3} + 12 = \left(5 - 2\sqrt{3}\right)^2$. Учитывая полученный результат, преобразуем исходное выражение:

$$\sqrt[4]{\left(37 - 20\sqrt{3}\right)^2} + 2\sqrt{3} = \sqrt[4]{\left(5 - 2\sqrt{3}\right)^4} + 2\sqrt{3} = \left|5 - 2\sqrt{3}\right| + 2\sqrt{3} =$$
$$= 5 - 2\sqrt{3} + 2\sqrt{3} = 5,$$

так как $5 - 2\sqrt{3} > 0$.

Комментарии. При выполнении этого задания можно было бы к конечному результату двигаться постепенно, воспользовавшись тем, что для произвольного действительного числа a справедливо равенство $\sqrt[4]{a^2} = \sqrt{|a|}$. В нашем случае $a = 37 - 20\sqrt{3}$, и надо выяснить, какой знак имеет это число (напоминаем, что калькулятора, к сожалению, нет). Поскольку $37^2 = 1369$, а $\left(20\sqrt{3}\right)^2 = 1200$, то ясно, что $a > 0$, так что исходное выражение принимает вид $\sqrt{37 - 20\sqrt{3}} + 2\sqrt{3}$. После этого можно начать размышлять и вычислять, квадратом какого числа является подкоренное выражение. Решение получается гораздо быстрее, если вспомнить, что ответом в задаче может быть только десятичное число. Это значит, что должно выполняться равенство $\sqrt{37 - 20\sqrt{3}} = x - 2\sqrt{3}$, где x – десятичное число. Из этого равенства легко получается, что $x = 5$, это и есть ответ к задаче.

В7. Поскольку $\sqrt[4]{a^4} = |a|$, уравнение принимает вид $\log_7(3x+5) + \left|\log_7(2x+5)\right| = 0$ и распадается на две системы:

$$\begin{cases} \log_7(2x+5) \ge 0, \\ \log_7(3x+5) + \log_7(2x+5) = 0 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} \log_7(2x+5) < 0, \\ \log_7(3x+5) - \log_7(2x+5) = 0. \end{cases}$$

После отбрасывания логарифмов эти системы выглядят так:

$$\begin{cases} x \ge -2, \\ (3x+5)(2x+5) = 1 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} x < -2, \\ \dfrac{3x+5}{2x+5} = 1. \end{cases}$$

Вторая система решений не имеет, из двух корней квадратного уравнения первой системы неравенству $x \ge -2$ удовлетворяет только ответ задачи $x = -1{,}5$.

Комментарии. Здесь приведено стандартное решение уравнения, содержащего переменную под знаком модуля. Однако выпускник, имеющий хороший уровень подготовки, проанализировав условие задачи и найдя область определения первого логарифмического выражения ($x > -\dfrac{5}{3}$), легко заметит, что значение выражения, стоящего под знаком второго логарифма, всегда больше 1, т.е. $\log_7(2x+5) > 0$ при любом x, удовлетворяющем условию $x > -\dfrac{5}{3}$. Таким образом, решение приведенного выше уравнения будет сводиться к решению уравнения $\log_7(3x+5) + \log_7(2x+5) = 0$.[3]

В8. То обстоятельство, что для заданной на всей числовой прямой функции $y = f(x)$ число 3 является периодом, означает, что для любого значения x выполняется равенство $f(x+3) = f(x-3) = f(x)$. Поэтому $f(-5) = f(-5+3) = f(-2) = -3$. Непосредственно из данного графика находим, что $f(-1) = 3$. Наконец, $f(12) = f(9) = f(6) = f(3) = f(0) = 2$. В итоге значение искомого выражения равняется $-3 - 3 + 2 = -4$.

Комментарии. Заметим, что в школьных учебниках при исследовании свойств функций уделяется мало внимания свойству периодичности. Число упражнений на закрепление определения понятия периодичности невелико, основная часть их посвящена исследованию периодичности тригонометрических функций. Поэтому формулировка задачи могла показаться части учащихся необычной. На самом же деле, как видно из приведенного решения, из теоретического материала в нем используется лишь определение периодической функции.

В9. Если первая бригада может отремонтировать дорогу за x дней, то вторая – за $x + 6$ дней. Из условия задачи имеем уравнение $\dfrac{6}{x} + \dfrac{16}{x+6} = 1$. Положительный корень квадратного уравнения есть $x = 18$.

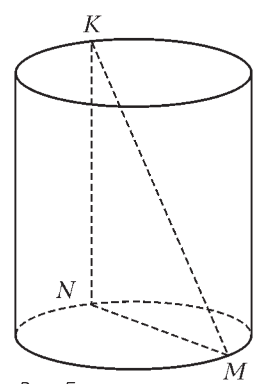

Рис. 5

В10. Через точку K, лежащую на окружности верхнего основания цилиндра, проведем образующую цилиндра KN (рис. 5). Теперь из прямоугольного треугольника KMN можно найти KN, т.е. высоту H цилиндра. Зная объем цилиндра и его высоту, легко находим радиус основания R. Площадь осевого сечения цилиндра есть $S = 2RH$. *Ответ:* 60.

В11. Данный равнобедренный треугольник с высотами BE и AH изображен на рисунке 6. По известной площади ABC и стороне BC находим, что $AH = 9$. Теперь в прямоугольном треугольнике ABH получаем, что $BH = 12$, поэтому $HC = 3$. Отсюда $\operatorname{tg}\angle HCE = 3$, но $\angle BOH = \angle HCE$. Получается, что $OH = BH \operatorname{ctg}\angle BOH = 12 \cdot \dfrac{1}{3} = 4$, и искомая площадь треугольника BOH есть $S = \dfrac{1}{2} BH \cdot OH = 24$.

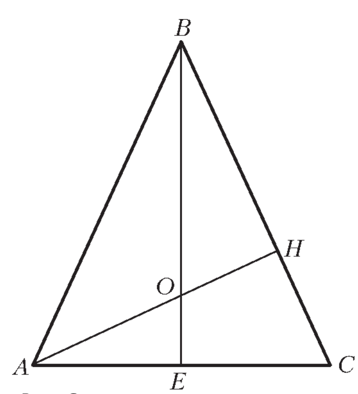

Рис. 6

Другой возможный способ отыскания длины отрезка OH основан на свойстве биссектрисы BO в треугольнике ABH, т.е. на пропорции $\dfrac{OH}{AH - OH} = \dfrac{BH}{AB}$.

[3] *Заметим, что в большинстве задач Части 2 анализ исходных данных задачи позволяет упростить (сократить) стандартные процедуры решения. Решение задачи «в лоб» приводит к более громоздким преобразованиям и вычислениям, а также к потере времени.*

С1. Область определения данной функции задается условием $x^3+8>0$. Поскольку $x^3+8=(x+2)\left(x^2-2x+4\right)$ и неполный квадрат принимает только положительные значения, то $f(x)$ определена при $x\in(-2;+\infty)$. Далее, $2^{-\log_{0,5}\left(x^3+8\right)}=\left(2^{-1}\right)^{\log_{0,5}\left(x^3+8\right)}=0,5^{\log_{0,5}\left(x^3+8\right)}=x^3+8$, и данная функция задается формулой $f(x)=3x^4+4x^3-72x^2+8$ на области определения $D(f)=(-2;+\infty)$. Требуется найти точки минимума этой функции, лежащие в промежутке $(-2;+\infty)$. Для их отыскания находим производную:

$$f'(x)=12x^3+12x^2-144x=12x\left(x^2+x-12\right)=$$
$$=12x(x-3)(x+4).$$

Нули производной есть $x=-4$, $x=0$, $x=3$, а знаки производной легко определяются методом интервалов: $f'(x)>0$ при $x\in(-4;0)\cup(3;+\infty)$ и $f'(x)<0$ при $x\in(-\infty;-4)\cup(0;3)$. Вспомним теперь, что на все эти промежутки надо наложить область определения – промежуток $(-2;+\infty)$. В итоге приходится делать выбор из двух точек $x=0$ и $x=3$. Поскольку при $x\in(0;3)$ данная функция убывает, а при $x\in(3;+\infty)$ возрастает, то минимум достигается при $x=3$.

Комментарии. Заметим, что при выполнении этого задания выпускники должны показать владение стандартным умением найти точку минимума функции. Трудность задания состояла в том, чтобы, во-первых, правильно выполнить преобразования выражений, входящих в формулу, задающую функцию, а во-вторых, правильно указать область определения функции и не забыть ее при исследовании.

С исследованием функции справились около четверти выпускников, имеющих оценку «4», и около 80% выпускников, имеющих оценку «5». Одна из основных ошибок состояла в том, что выпускники забыли учесть область определения исходной функции.

С2. Отметим, что $2x^2+3x+2>0$ при всех x, так что никаких ограничений на корни уравнения нет. Избавимся для начала от дробных коэффициентов, умножив обе части уравнения на 2. После приведения подобных членов получается уравнение $2x^2+3x-6=2\sqrt{2x^2+3x+2}$. Замена $2x^2+3x=y$ приводит к стандартному иррациональному уравнению $y-6=2\sqrt{y+2}$, после возведения обеих частей в квадрат получается уравнение $y^2-16y+28=0$, корень $y=2$ – посторонний и остается корень $y=14$. Уравнение $2x^2+3x-14=0$ имеет корни $x_1=-3,5$, $x_2=2$, это и есть ответ к задаче.

Если догадаться сделать замену $t=\sqrt{2x^2+3x+2}$, $t>0$, то получается уравнение $t^2-2t-8=0$ с единственным (удовлетворяющим условию $t>0$) корнем $t=4$. Такой путь немного быстрее приводит к ответу.

Комментарии. Для выпускников это задание оказалось более трудным, чем предыдущее. Уравнение решили около 70% выпускников, имеющих оценку «5», и лишь десятая часть выпускников, имеющих оценку «4». Дело в том, что стандартный метод решения иррациональных уравнений – возведение в квадрат – приводит к громоздким выкладкам с многочленом четвертой степени, и многие учащиеся не смогли довести решение до конца.

С3. Условие задачи $x^4-8x^2-2\neq ax^2$ при $x\in(-3;-1]$ означает, что функция $f(z)=z^2-(a+8)z-2$, где $z=x^2$, не обращается в 0 на промежутке $z\in[1;9)$. Данная функция есть квадратный трехчлен с положительным дискриминантом. Два его корня z_1, z_2 имеют разные знаки, так как по теореме Виета $z_1\cdot z_2=-2$. Парабола, являющаяся графиком этого трехчлена, направлена осями вверх, при этом мы не знаем знака абсциссы вершины параболы. В итоге мы имеем или график, изображенный на рисунке 7, или аналогичный с отрицательной, а может быть и нулевой, абсциссой вершины параболы. В силу очевидного условия $z\geq 0$ часть параболы, соответствующая отрицательным значениям аргумента, является фиктивной.

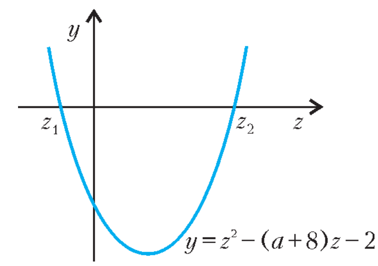

Рис. 7

Чтобы $f(z)$ не имела корней при $z\in[1;9)$, необходимо и достаточно, чтобы точка z_2 не попадала в этот промежуток, иначе – чтобы выполнялось одно из неравенств $z_2\geq 9$ или $z_2<1$. Длинный и хлопотный путь дальнейшего решения состоит в том, чтобы явно записать корень z_2 и затем решать два неравенства. Много проще обратиться к рисункам 8 и 9, иллюстрирующим описанную выше ситуацию.

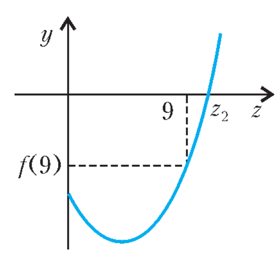

Рис. 8

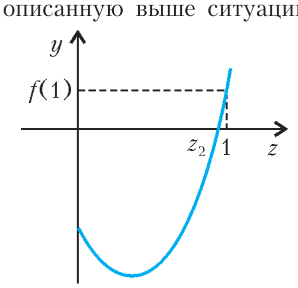

Рис. 9

Из рисунка 8 видно, что, для того чтобы выполнялось условие $z_2\geq 9$, необходимо и достаточно потребовать $f(9)\leq 0$, или $81-9(a+8)-2\leq 0$, откуда $a\geq 7/9$. Из рисунка 9 видно, что, для того чтобы выполнялось условие $z_2<1$, необходимо и достаточно потребовать $f(1)>0$, или $1-(a+8)-2>0$, откуда $a<-9$. Итого, $a\in(-\infty;-9)\cup\left[\frac{7}{9};+\infty\right)$. Легко проверяется, что изменение на чертеже положения вершины параболы никак не повлияет на окончательный результат.

С4. Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – данный прямоугольный параллелепипед (рис. 10), длины его сторон обозначим $AB=a$, $AD=b$, $AA_1=c$. Тогда объем параллелепипеда есть $V=abc$, а по известным из условия задачи отношениям, в которых точки K, L, M делят соответствующие ребра, мы легко определяем длины частей этих ребер:

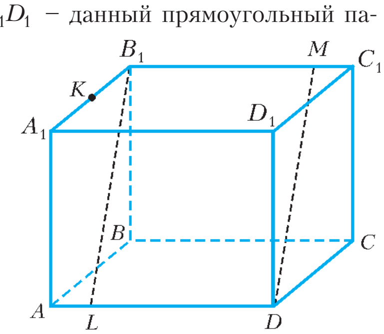

Рис. 10

$$A_1K=\frac{2}{5}a,\ KB_1=\frac{3}{5}a,\ B_1M=\frac{5}{7}b,$$

$$MC_1=\frac{2}{7}b,\ AL=\frac{2}{7}b,\ LD=\frac{5}{7}b.$$

Поскольку $AD\perp AA_1$ и $AD\perp AB$, то ребро AD перпендикулярно плоскости AA_1B_1. Но $B_1C_1 \parallel AD$, значит, также перпендикулярно этой плоскости. Поэтому диагональное

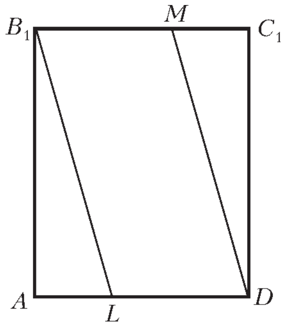

Рис. 11

сечение параллелепипеда AB_1C_1D представляет собой прямоугольник (рис.11). Основание пирамиды $LDMB_1$ лежит в этом прямоугольнике. При этом $LD \parallel B_1M$ и, как мы определили выше, $LD = B_1M$. Это означает, что $LDMB_1$ – параллелограмм, при этом B_1A – высота этого параллелограмма, так что площадь основания пирамиды есть

$$S = LD \cdot B_1A = \frac{5}{7} b \cdot \sqrt{a^2+c^2} = \frac{5b\sqrt{a^2+c^2}}{7}.$$

В плоскости AA_1B_1 проведем $KN \perp AB_1$ (рис. 12). Докажем, что KN перпендикулярно плоскости диагонального сечения AB_1C_1D. В самом деле, B_1C_1 перпендикулярна плоскости AA_1B_1, поэтому $B_1C_1 \perp KN$. По построению $AB_1 \perp KN$, так что KN перпендикулярна двум пересекающимся прямым в плоскости диагонального сечения AB_1C_1D и потому перпендикулярна самой этой плоскости. Отсюда следует важный вывод: KN есть высота пирамиды $KLDMB_1$.

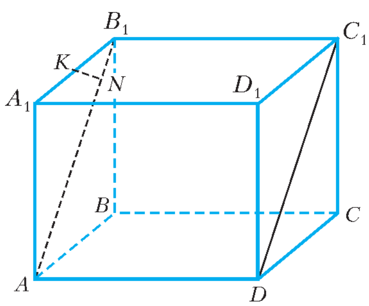

Рис. 12

Найти длину KN удобнее, рассмотрев треугольник AA_1B_1 на отдельном чертеже (рис.13). Треугольники KNB_1 и AA_1B_1 несомненно подобны. Из пропорции $\frac{KN}{AA_1} = \frac{KB_1}{AB_1}$ определяем, что

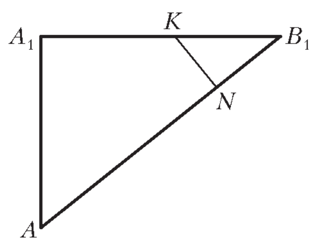

Рис. 13

$$KN = \frac{AA_1 \cdot KB_1}{AB_1} = \frac{c \cdot \frac{3}{5}a}{\sqrt{a^2+c^2}} = \frac{3ac}{5\sqrt{a^2+c^2}}.$$

Теперь находим объем пирамиды $KLDMB_1$:

$$V_1 = \frac{1}{3} S \cdot KN = \frac{1}{3} \cdot \frac{5b\sqrt{a^2+c^2}}{7} \cdot \frac{3ac}{5\sqrt{a^2+c^2}} = \frac{abc}{7}.$$

Искомое в задаче отношение объемов есть $V/V_1 = 7$.

Комментарии. По сравнению с первой из стереометрических задач (B10) эта задача имеет значительно более высокий уровень сложности, поскольку здесь рассматривается комбинация многогранников: пирамида, «вписанная» в прямоугольный параллелепипед. Выпускнику потребуется проанализировать взаимное расположение фигур и установить, какой четырехугольник лежит в основании пирамиды и как удобно провести ее высоту. Если ответ на первый из поставленных вопросов для хорошо подготовленных выпускников не составит труда, то ответ на второй вопрос потребует хороших пространственных представлений и владения системой геометрических знаний для обоснования расположения высоты пирамиды.

Заметим, что хотя теоретические факты, необходимые для решения подобных задач, и не выходят за рамки школьного курса геометрии, но времени на обучение их решению, отводимого только программой по геометрии, явно недостаточно. По-видимому, именно с этим связаны низкие результаты выполнения задания С4 (менее 1% участников экзамена справились с заданием и только около 10% школьных отличников правильно его решили).

С5. Начнем с того, что было бы хорошо угадать какой-нибудь корень кубического уравнения, но подстановка в него первых целых отрицательных чисел (понятно, что положительных корней у уравнения нет) ни к чему не приводит.

Обратимся ко второму уравнению системы. Единственное, что мы можем сделать, – это найти ОДЗ из условия $\frac{4}{x} + 16 + 5x(1-5x) \ge 0$, которое после преобразований приводится к виду $\frac{25x^3 - 5x^2 - 16x - 4}{x} \le 0$. Неравенство надо решать методом интервалов, для этого числитель необходимо разложить на множители. В отличие от первого уравнения системы, здесь корень угадывается практически сразу: $x = 1$. Далее удобнее всего разделить «уголком» $25x^3 - 5x^2 - 16x - 4$ на $(x-1)$. Тем, кто не умеет этого делать, лучше бы научиться, иначе придется выкручиваться, например, так:

$$25x^3 - 5x^2 - 16x - 4 = 25x^3 - 25x^2 + 20x^2 - 16x - 4 =$$
$$= 25x^2(x-1) + 4\left(5x^2 - 4x - 1\right) =$$
$$= 25x^2(x-1) + 4(x-1)(5x+1) =$$
$$= (x-1)\left(25x^2 + 20x + 1\right) = (x-1)(5x+2)^2.$$

Решением неравенства $\frac{(x-1)(5x+2)^2}{x} \le 0$ будут промежуток $x \in (0;1]$ и число $x = -\frac{2}{5}$. Похоже, что это число играет какую-то важную роль во всей задаче. Ничего не остается, кроме как попробовать подставить это число в первое уравнение системы:

$$15 \cdot \left(-\frac{8}{125}\right) + 36 \cdot \frac{4}{25} - 22 \cdot \frac{2}{5} + 4 = \frac{-24 + 144 - 220 + 100}{25} = 0.$$

Итак, $x = -\frac{2}{5}$ является корнем первого уравнения; теперь надо понять, есть ли у него другие корни. Для этого снова придется раскладывать на множители: $15x^3 + 36x^2 + 22x + 4 = \left(x + \frac{2}{5}\right) \cdot Q(x)$, где $Q(x)$ – многочлен второй степени. Чтобы не возиться с дробными числами, удобнее, разделив все коэффициенты $Q(x)$ на 5, переписать предыдущее разложение в виде

$$15x^3 + 36x^2 + 22x + 4 = (5x+2) \cdot P(x),$$

где $P(x) = Q(x)/5$. Найти этот многочлен можно либо делением «уголком» левой части этого равенства на $(5x+2)$, либо разложением на множители. Снова продемонстрируем второй способ:

$$15x^3 + 36x^2 + 22x + 4 = 15x^3 + 6x^2 + 30x^2 + 22x + 4 =$$
$$= 3x^2(5x+2) + (6x+2)(5x+2) = (5x+2)\left(3x^2 + 6x + 2\right).$$

Входящий в это разложение квадратный трехчлен имеет корни $\frac{-3 \pm \sqrt{3}}{3}$, оба эти числа отрицательны и не входят в ОДЗ. Получается, что $x = -\frac{2}{5}$ – единственное возможное значение неизвестной x в решении системы, но теперь необходимо проверить, удовлетворяет ли это число в паре с каким-нибудь значением неизвестной y второму уравнению системы. При $x = -\frac{2}{5}$ имеем

$$9\sin\frac{\pi}{x} = 9\sin\left(-\frac{5\pi}{2}\right) = -9,$$

$$\cos\left((5x+1)y\right) = \cos(-y) = \cos y,\ \frac{2}{x} - 1 = -6\ ,$$

и второе уравнение превращается в $-9 + \cos y = y(y-6)$, или $\cos y = (y-3)^2$. При $y \in (-\infty; 2) \cup (4; +\infty)$ правая часть этого равенства больше единицы, так что в этих промежутках решения не найти. Если же $y \in [2;4]$, то это значит, что аргумент косинуса лежит во второй или третьей четвертях, но не на вертикальном диаметре, т.е. в этом промежутке $\cos y < 0$ и уравнение также не имеет решений. Итак, отсутствие решений у системы доказано.

Комментарии. Последняя задача варианта ЕГЭ – самая трудная. Она рассчитана на выпускников, имеющих высокий уровень математической подготовки и готовящихся к поступлению в те вузы, которые предъявляют самые высокие требования. Обычно с последней задачей справляется только небольшая часть тех выпускников, которые имеют школьную оценку «5» (около 5% отличников).

При ознакомлении с приведенными решениями задач высокого уровня сложности у читателя, очевидно, возникает желание получить дополнительную информацию о других типах задач, о характеристике методов их решения и т.п. Естественно, источником такой информации служат печатные издания о ЕГЭ. Для тех, кто хочет иметь реальную информацию о ЕГЭ, а не только авторское мнение какого-либо коллектива, советуем пособия, имеющие гриф Федерального института педагогических измерений (ФИПИ).

ЕГЭ по физике

М.ДЕМИДОВА, А.ЧЕРНОУЦАН

В 2008 году вступительный экзамен по физике, в отличие от математики и русского языка, может сдаваться как в форме ЕГЭ, так и в традиционной форме. Однако уже в 2009 году при поступлении в те вузы, где физика является одним из конкурсных предметов, должен быть обязательно представлен результат ЕГЭ. Это относится и к тем вузам, которые получат право проводить дополнительные испытания по физике. При этом ЕГЭ по физике остается экзаменом по выбору. Понятно, что его будут выбирать, в первую очередь, те выпускники, кто собирается заявить полученный результат в выбранный ими вуз. Ведь для успешного поступления в престижные вузы необходимо добиться более высоких результатов, чем для получения хорошей школьной оценки.

При подготовке к ЕГЭ необходимо решать разнообразные задачи разного уровня сложности, совмещая эту традиционную форму подготовки с изучением теории и регулярным выполнением тренировочных тестов. Отметим, что настоящее понимание теории приходит не при выучивании законов и формул и разборе тестовых вопросов (хотя это тоже необходимо), а при использовании этих законов и формул в достаточно сложных задачах. Единственной гарантией высокого результата может быть глубокое и заинтересованное изучение физики, решение нетривиальных задач, разбор каверзных вопросов и ситуаций.

Ниже мы приводим один из вариантов ЕГЭ 2007 года с кратким решением части задач. После этого мы обсудим типичные трудности, которые возникали у сдающих ЕГЭ по физике, и отметим новые элементы в ЕГЭ 2008 года.

Вариант 2007 года

Часть 1

А1. Тело упало с некоторой высоты с нулевой начальной скоростью и при ударе о землю имело скорость 40 м/с. Чему равно время падения? Сопротивлением воздуха пренебречь.

1) 0,25 с; 2) 4 с; 3) 40 с; 4) 400 с.

А2. Точка движется с постоянной по модулю скоростью v по окружности радиусом R. Как изменится центростремительное ускорение точки, если ее скорость увеличить вдвое, а радиус окружности вдвое уменьшить?

1) Уменьшится в 2 раза; 2) увеличится в 2 раза; 3) увеличится в 4 раза; 4) увеличится в 8 раз.

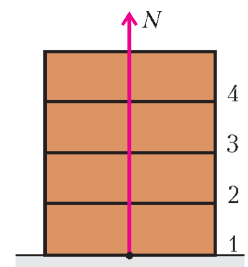

Рис. 1

А3. Четыре одинаковых кирпича массой m каждый сложены в стопку (рис.1). Если убрать верхний кирпич, то сила N, действующая со стороны горизонтальной опоры на 1-й кирпич, уменьшится на:

1) $\frac{mg}{4}$; 2) $\frac{mg}{2}$; 3) mg; 4) $\frac{mg}{3}$.

А4. Под действием силы 3 Н пружина удлинилась на 4 см. Чему равен модуль силы, под действием которой удлинение этой пружины составит 6 см?

1) 3,5 Н; 2) 4 Н; 3) 4,5 Н; 4) 5 Н.

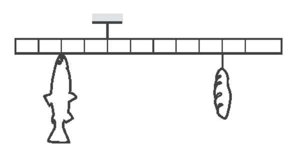
Рис. 2

А5. Мальчик взвесил рыбу на самодельных весах с коромыслом из легкой рейки (рис.2). В качестве гири он использовал батон хлеба массой 1 кг. Масса рыбы равна:

1) 5 кг; 2) 2,5 кг; 3) 0,4 кг; 4) 1 кг.

А6. Первоначальное удлинение пружины равно Δl. Как изменится потенциальная энергия пружины, если ее удлинение станет вдвое больше?

1) Увеличится в 2 раза; 2) увеличится в 4 раза; 3) уменьшится в 2 раза; 4) уменьшится в 4 раза.

А7. Частота колебаний струны равна 500 Гц. Скорость звука в воздухе 340 м/с. Длина звуковой волны равна:

1) 68 м; 2) 340 м; 3) 170 м; 4) 0,68 м.

А8. На рисунке 3 приведен график зависимости скорости тела от времени при прямолинейном движении. Какой из графиков на рисунке 4 выражает зависимость модуля равнодействующей всех сил, действующих на тело, от времени движения? Систему отсчета считать инерциальной.

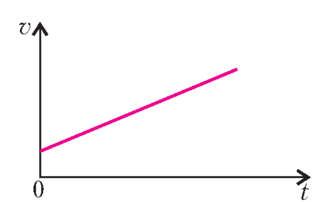

Рис. 3

А9. Доска массой 0,5 кг шарнирно подвешена к потолку на легком стержне (рис.5). На доску со скоростью 10 м/с налетает пластилиновый шарик массой 0,2 кг и прилипает к ней. Скорость шарика перед ударом направлена под углом 60° к нормали к доске.