Точка внутри окружности

В.АЛЕКСЕЕВ, В.ГАЛКИН, В.ПАНФЕРОВ, В.ТАРАСОВ

Задачи о точках, находящихся внутри некоторой окружности, довольно часто встречаются в вариантах вступительных экзаменов. Мы поговорим о методах решения таких задач. Особое внимание при этом будет уделяться вспомогательным утверждениям, которые мы будем формулировать в виде так называемых опорных задач.

Концентрические окружности

Задача 1 (опорная). *Пусть прямая пересекает две концентрические окружности в точках M, N и M_1, N_1 соответственно (рис.1). Докажите что*

а) $MM_1 = N_1N$ *; б)* $MM_1 \cdot M_1N = MP^2$,

где MP – отрезок касательной к меньшей окружности.

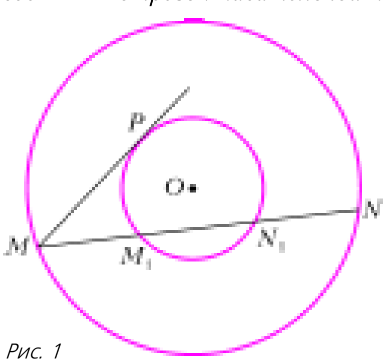


Рис. 1

Решение. а) Отрезки, о равенстве которых идет речь, симметричны относительно диаметра, перпендикулярного прямой *MN*. А значит, они равны.

б) По теореме об отрезках касательной (см. рис.1):

$$MP^2 = MM_1 \cdot MN_1 = \\ = MM_1 \cdot M_1N .$$

Задача 2 (географический факультет МГУ, 1997 г.). *Даны две концентрические окружности. В большей из них проведены две непересекающиеся хорды KL и MN, которые пересекают меньшую окружность в точках K_1, L_1 и M_1, N_1 соответственно (точки с индексом «1» расположены ближе к одноименным точкам без индекса). Хорды K_1N_1 и L_1M_1 меньшей окружности пересекаются в точке F. Найдите отношение площадей треугольников K_1FL_1 и M_1FN_1, если $KL = 5NN_1$, а длина хорды M_1N_1 равна среднему геометрическому длин отрезков KL и MM_1.*

Решение. Пусть $K_1L_1 = c$, $M_1N_1 = m$, $N_1N = M_1M = x$, $K_1K = L_1L = a$, $L_1L_2 = M_1M_2 = b$ (рис.2).

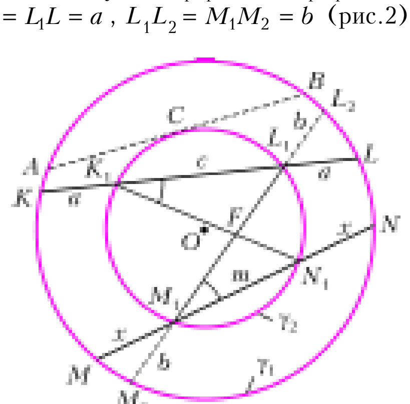


Рис. 2

Треугольники K_1FL_1 и M_1FN_1 подобны по двум углам ($\angle L_1K_1F = \angle N_1M_1F$ как вписанные, опирающиеся на одну и ту же дугу L_1N_1). Поэтому искомое отношение площадей треугольников равно квадрату их коэффициента подобия:

$$\frac{S_{\Delta K_1FL_1}}{S_{\Delta M_1FN_1}} = \left(\frac{K_1L_1}{M_1N_1}\right)^2 = \left(\frac{c}{m}\right)^2 .$$

По условию:

$$\begin{cases} KL = 5NN_1, \\ M_1N_1^2 = KL \cdot MM_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + c = 5x, \\ m^2 = 5x^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a + c = m\sqrt{5}, \\ x = \dfrac{m}{\sqrt{5}}. \end{cases}$$

Имеем:

$$LL_1 = a = \frac{m\sqrt{5} - c}{2},$$

$$KL_1 = a + c = \frac{m\sqrt{5} - c}{2} + c = \frac{m\sqrt{5} + c}{2} .$$

Так как, в силу задачи 1, $LL_1 \cdot KL_1 = MM_1 \cdot NM_1$, то

$$\frac{m\sqrt{5} - c}{2} \cdot \frac{m\sqrt{5} + c}{2} = \frac{m}{\sqrt{5}}\left(m + \frac{m}{\sqrt{5}}\right),$$

откуда

$$\left(\frac{K_1L_1}{M_1N_1}\right)^2 = \frac{c^2}{m^2} = \frac{21 - 4\sqrt{5}}{5} .$$

Задача 3 (химический факультет МГУ, 1998 г.). *В окружности проведены хорды KL, MN, PS. Хорды KL и PS пересекаются в точке C, хорды KL и MN пересекаются в точке A, а хорды MN и PS пересекаются в точке B, причем AL = CK, AM = BN, BS = 5, BC = 4. Найдите радиус окружности, если величина угла BAC равна* $\frac{\pi}{4}$.

Решение. Пусть *R* – радиус исходной окружности, *r* – радиус окружности, проведенной через точки *A*, *B* и *C* (рис.3). Серединные перпендикуляры к отрезкам *AC* и *KL* совпадают, так как *AL = CK*. Серединные перпендикуляры к отрезкам *AB* и *MN* тоже совпадают (*AM = BN*). Поэтому центры двух рассматриваемых окружностей совпадают (центр окружностей обозначим буквой *O*). Отсюда следует, что совпадают серединные перпендикуляры к отрезкам *BC* и *PS*, т.е. *PC = BS* = 5.

Так как $\angle BAC = \frac{\pi}{4}$, то

$$\angle BOC = 2\angle BAC = \frac{\pi}{2} \text{ и } \angle OBC = \angle OCB = \frac{\pi}{4} .$$

Пусть $OH \perp BC$. Тогда $OH = BH = CH = \frac{1}{2}BC = 2$. Из

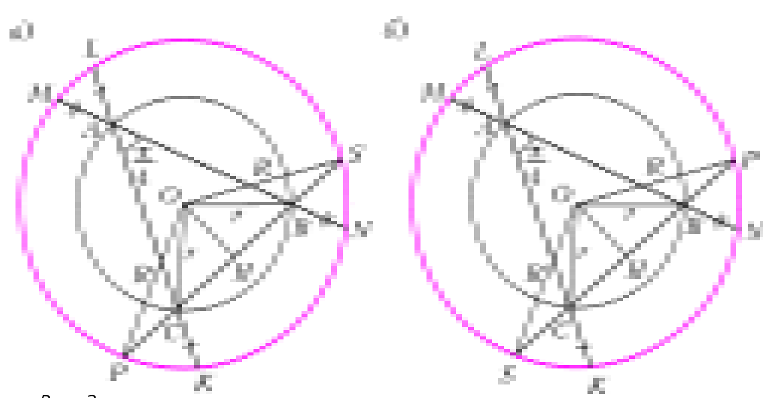


Рис. 3

треугольника OSH найдется искомый радиус:

$$R=\sqrt{OH^2+\left(\frac{SP}{2}\right)^2}.$$

Возможны два случая:

1) Точка B лежит между точками C и S (см. рис.3,*а*). Тогда

$$SP=2BS+BC=14,\quad R=\sqrt{2^2+7^2}=\sqrt{53}.$$

2) Точка C лежит между точками S и B (см. рис.3,*б*). Тогда

$$SP=2BS-BC=6,\quad R=\sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{13}.\text{DD}$$

Итак, радиус окружности равен $\sqrt{53}$ или $\sqrt{13}$.

Замечание. Здесь важно рассмотреть оба случая.

Упражнение 1. В окружности радиуса $\sqrt{19}$ проведены хорды AB, CD, EF. Хорды AB и CD пересекаются в точке K, хорды CD и EF пересекаются в точке L, а хорды AB и EF пересекаются в точке M, причем $AM=BK$, $CK=DL$, $LF=3$, $ML=2$. Найдите величину угла CKB, если известно, что он тупой.

Пересекающиеся окружности

Задача 4 (опорная). *Из середины N хорды MM_1 окружности под одним и тем же углом к лучу NM проведены отрезки $CN=a$ и $DN=b$ (рис.4). Докажите, что длина половины хорды MM_1 есть среднее геометрическое длин отрезков CN и DN:*

$$MN=\sqrt{CN\cdot DN}=\sqrt{ab}.$$

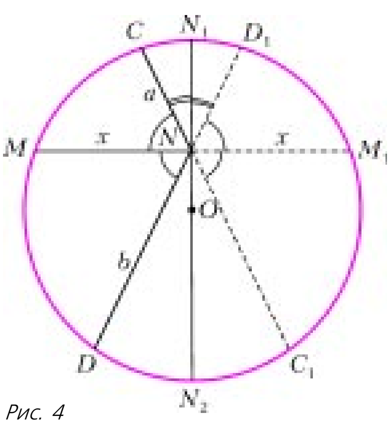


Рис. 4

Решение. Пусть $NM==x$. Продлим отрезки DN и CN до пересечения с окружностью в точках D_1 и C_1 соответственно и проведем диаметр через точку N. Тогда $N_1N_2\perp MM_1$, так как точка N – середина Из равенства $\angle MND=\angle MNC=\angle D_1NM_1=\angle C_1NM_1$ получим, что $\angle CNN_1=\angle D_1NN_1=\frac{\pi}{2}-\varphi$. Значит, прямая N_1N_2 является осью симметрии, $CN=D_1N=a$ и по свойству отрезков хорд

$$MN\cdot M_1N=D_1N\cdot DN,\quad \text{или}\quad x^2=ab,\quad x=\sqrt{ab}.$$

Задача 5 (физический факультет МГУ, 1978 г.). *Дана окружность с диаметром AB. Вторая окружность с центром в точке A пересекает первую окружность в точках C и D, а диаметр AB — в точке E. На дуге CE, не содержащей точку D, взята точка M, отличная от точек C и E. Луч BM пересекает первую окружность в точке N. Известно, что $CN=a$, $DN=b$. Найдите MN.*

Решение. Так как AB диаметр (рис.5), то $AN\perp MN$, $MN=NM_1=x$. Симметричные относительно линии центров AB дуги BmD и BnC равны, значит, $\angle BND=\angle BNC$. Таким образом, из точки N внутри второй окружности под одним и тем же углом к лучу NM исходят отрезки $CN=a$ и $ND=b$. В силу задачи 4,

$$MN=x=\sqrt{ab}.$$

Упражнение 2. В условиях задачи 5 найдите $\frac{CM}{MD}$, если $\frac{CN}{DN}=2$.

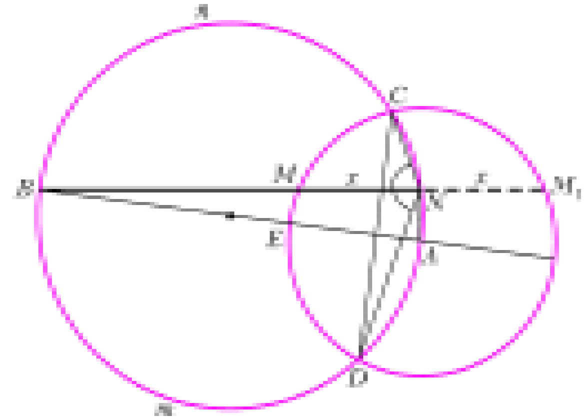


Рис. 5

Вписанные и описанные четырехугольники

Задача 6 (опорная). *В четырехугольнике $ABCD$, вписанном в окружность радиуса R, диагонали AC и BD перпендикулярны (рис.6). Докажите, что*

$$AB^2+CD^2=BC^2+AD^2=4R^2.$$

Решение. Пусть $AB=a$, $CD=c$, а $\angle ACB=\alpha$ (см. рис.6). Тогда $\angle DBC=90^\circ-\alpha$ и по теореме синусов для ΔABC и ΔDBC получим

$$a=2R\sin\alpha,\quad c=2R\sin\left(90^\circ-\alpha\right)=2R\cos\alpha,$$

откуда

$$a^2+c^2=4R^2\left(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\right)=4R^2.$$

Замечание. Сравните со следующим свойством (и проверьте его): в произвольном выпуклом четырехугольнике $ABCD$ с перпендикулярными диагоналями суммы квадратов длин противоположных сторон равны между собой.

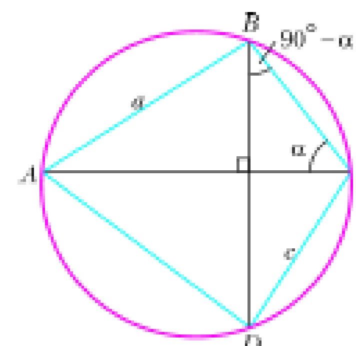


Рис. 6

Задача 7 (опорная). *Докажите, что в описанном четырехугольнике с перпендикулярными диагоналями одна из диагоналей является осью симметрии, а значит, равны между собой симметричные ей соседние стороны.*

Решение. Пусть $AB=a$, $BC=x$, $CD=u$, $AD=b$, $AK=v$, $KC=y$, $BK=z$, $KD=t$ (рис.7). Без ограничения общности положим, что $a>x$.

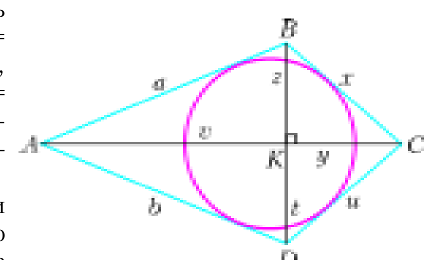


Рис. 7

Так как диагонали перпендикулярны, то $a^2+u^2=x^2+b^2$ (в силу задачи 6). Поскольку в четырехугольник можно вписать окружность (по условию), то $a+u=x+b$. Поэтому (при $a-x>0$) имеем

$$\begin{cases}a^2+u^2=x^2+b^2,\\ a+u=x+b\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a^2-x^2=b^2-u^2,\\ a-x=b-u\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (a-x)(a+x)=(b-u)(b+u), \\ a-x=b-u \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+x=b+u, \\ a-x=b-u \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=b, \\ x=u. \end{cases}$$

Итак, при $a > x$ прямая AC является осью симметрии, $AB = AD$, $BC = DC$. Четырехугольник $ABCD$ имеет форму дельтоида.

Задача 8 (факультет ВМК МГУ, 1979 г.). *В окружность вписан четырехугольник ABCD, диагонали которого взаимно перпендикулярны и пересекаются в точке E. Прямая, проходящая через точку E и перпендикулярная к AB, пересекает сторону CD в точке M. Докажите, что EM – медиана треугольника CED, и найдите ее длину, если* $AD = 8$, $AB = 4$ *и* $\angle CDB = \alpha$.

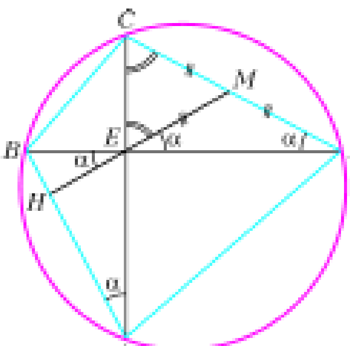


Рис. 8

Решение. Пусть H – точка пересечения прямых AB и EM (рис.8). Тогда $\angle BAC = \angle CDB = \alpha$. Кроме того, $\angle BEH = \angle MED = \alpha$. Значит, треугольник EMD равнобедренный с основанием DE, углами $\angle MDE = \angle MED = \alpha$ при основании и равными сторонами $EM = DM$. Треугольник MEC тоже равнобедренный с равными углами

$$\angle CEM = \angle ECM = \angle ECD = 90° - \alpha$$

и равными сторонами $EM = MC$. Таким образом, $EM = DM = MC$ и EM – медиана в треугольнике CED.

Из треугольников BAE, AED, CED последовательно находим

$$AE = AB\cos\angle CDB = 4\cos\alpha,$$

$$ED = \sqrt{AD^2 - AE^2} = \sqrt{8^2 - (4\cos\alpha)^2} = 4\sqrt{4-\cos^2\alpha},$$

$$EM = \frac{1}{2}CD = \frac{ED}{2\cos\angle CDB} = \frac{4\sqrt{4-\cos^2\alpha}}{2\cos\alpha} = 2\sqrt{3+4\operatorname{tg}^2\alpha}.$$

Задача 9 (мехмат МГУ, 1971 г.). *В четырехугольник ABCD можно вписать и вокруг него можно описать окружность. Диагонали этого четырехугольника взаимно перпендикулярны. Найдите площадь четырехугольника, если радиус описанной окружности равен R, и AB = 2BC.*

Решение. Пусть $BC = x$, $AB = y = 2x$ (по условию), $AD = z$, $CD = u$ (рис.9). Так как четырехугольник $ABCD$ описанный, то

$$BC + AD = AB + CD \Leftrightarrow x + z = 2x + u \Leftrightarrow z = x + u.$$

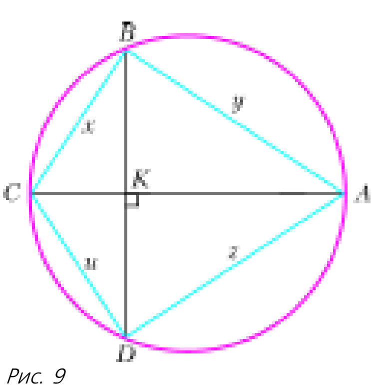


Рис. 9

Поскольку четырехугольник $ABCD$ вписанный и его диагонали перпендикулярны, то, в силу результата задачи 6, сумма квадратов его противоположных сторон равна квадрату диаметра, т.е. $x^2 + z^2 = 4R^2$. Но из задачи 7 следует, что $u = x$, $z = y = 2x$, т.е. $5x^2 = 4R^2$. А так как $\angle CBA = \angle CDA = 90°$, получаем, что

$$S_{ABCD} = 2S_{CBA} = 2\cdot\frac{1}{2}xy = 2x^2 = \frac{8}{5}R^2.$$

Упражнения

3. В четырехугольник $ABCD$ можно вписать и вокруг него можно описать окружность. Диагональ AC делит площадь четырехугольника пополам. Найдите длину диагонали BD, если радиус вписанной окружности равен r, а периметр четырехугольника равен p.

4. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность радиуса R и описан около другой окружности, которая касается сторон четырехугольника в точках K, L, M, N. Найдите площадь четырехугольника $ABCD$, если известно, что она в 3 раза больше площади четырехугольника $KLMN$, а угол между диагоналями AC и BD равен γ.

5. Четырехугольник $KLMN$ вписан в окружность. Через его вершины проведены касательные к этой окружности, образующие четырехугольник, который также можно вписать в окружность. Найдите площадь четырехугольника $KLMN$, если его периметр равен p, а $MN = 2ML = 8LK$.

Задача 10 (факультет ВМК МГУ, 1998 г.). *В четырехугольник ABCD можно вписать окружность. Пусть K – точка пересечения его диагоналей. Известно, что AB > BC > KC,* $BK = 4+\sqrt{2}$, *а периметр и площадь треугольника BKC равны 14 и 7 соответственно. Найдите DC.*

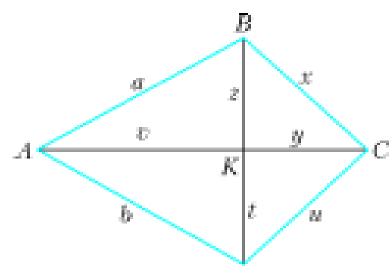


Рис. 10

Решение. Примем такие обозначения (рис. 10): $AB = a$, $AD = b$, $BK = z$, $KD = t$, $BC = x$, $KC = y$, $DC = u$, $AK = v$. В треугольнике BKC известны сторона z, периметр и площадь. Две другие стороны его x и y найдем из системы (формула Герона, известный периметр). А именно

$$\begin{cases} \sqrt{\frac{14}{2}(7-x)(7-y)\left(7-4-\sqrt{2}\right)} = 7, \\ x+y = 14-\left(4+\sqrt{2}\right) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 49 - 7(x+y) + xy = \frac{7}{3-\sqrt{2}} = 3+\sqrt{2}, \\ x+y = 10-\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} xy = 24-6\sqrt{2}, \\ y = 10-\sqrt{2}-x. \end{cases}$$

Отсюда

$$x^2 - \left(10-\sqrt{2}\right)x + 24 - 6\sqrt{2} = 0, \quad x = \frac{10-\sqrt{2}\pm\sqrt{6+4\sqrt{2}}}{2}.$$

Учтем, что $\sqrt{6+4\sqrt{2}} = \sqrt{\left(2+\sqrt{2}\right)^2} = 2+\sqrt{2}$. Получим

$$\begin{cases} x_1 = 6, \\ y_1 = 4-\sqrt{2} \end{cases} \text{или} \begin{cases} x_2 = 4-\sqrt{2}, \\ y_2 = 6. \end{cases}$$

По условию, $x > y$. Поэтому $x = 6$, $y = 4-\sqrt{2}$.

Покажем, что $\angle BKC = 90°$. Действительно,

$$BK^2 + KC^2 = \left(4+\sqrt{2}\right)^2 + \left(4-\sqrt{2}\right)^2 = 6^2 = BC^2.$$

Поэтому по теореме, обратной теореме Пифагора, $AC \perp BD$.

В силу опорных задач 6 и 7, четырехугольник $ABCD$ – дельтоид, т.е. $a = b$, $x = u$. Окончательно, $DC = 6$.

Упражнение 6. В четырехугольник $ABCD$ можно вписать окружность. Пусть K – точка пересечения его диагоналей. Известно, что $BC > AB > BK$, $KC = \sqrt{7} - 1$, косинус угла KBC равен $\frac{\sqrt{7}+1}{4}$, а периметр треугольника BKC равен $2\sqrt{7} + 4$. Найдите DC.

Задача 11 (геологический факультет МГУ, 1998 г.). *Четырехугольник PQRS вписан в окружность. Диагонали PR и QS перпендикулярны и пересекаются в точке M. Известно, что PS = 13, QM = 10, QR = 26. Найдите площадь четырехугольника PQRS.*

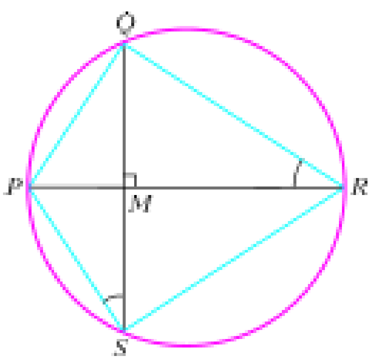


Рис. 11

Решение. По условию, $PR \perp QS$ (рис.11), тогда по теореме Пифагора найдем

$$MR = \sqrt{QR^2 - QM^2} = 24.$$

Прямоугольные треугольники PMS и QMR подобны по двум углам ($\angle PSQ = \angle PRQ = \frac{1}{2} \cup PQ$). Поэтому

$$\frac{PM}{QM} = \frac{MS}{MR} = \frac{PS}{QR} \Leftrightarrow \frac{PM}{10} = \frac{MS}{24} = \frac{13}{26} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow PM = 5, \quad MS = 12.$$

Тогда

$$PR = PM + MR = 29, \ QS = QM + MS = 22.$$

Для искомой площади S четырехугольника $PQRS$ имеем

$$S = S_{\Delta PQS} + S_{\Delta RQS} = \frac{1}{2} QS \cdot PM + \frac{1}{2} QS \cdot MR =$$

$$= \frac{1}{2} QS \cdot (PM + MR) = \frac{1}{2} QS \cdot PR = 319.$$

Упражнение 7. Четыехугольник $ABCD$ вписан в окружность. Диагонали AC и BD перпендикулярны и пересекаются в точке K. Известно, что $AD = 5$, $BC = 10$, $BK = 6$. Найдите площадь четырехугольника $ABCD$.

Задача 12 (Высший колледж наук о материалах МГУ, 1999 г.). *В окружность с центром в точке O вписан четырехугольник ABCD, диагонали которого перпендикулярны. Известно, что угол AOB втрое больше угла COD. Найдите площадь круга, ограничиваемого окружностью, и сравните ее с числом 510, если CD = 10.*

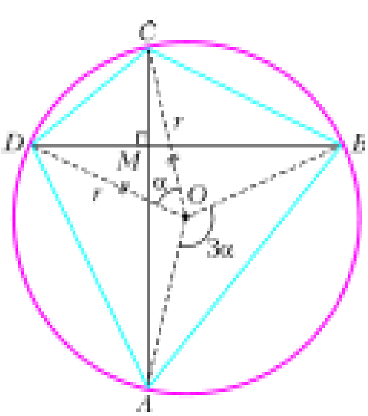


Рис. 12

Решение. Обозначим (рис.12) точку пересечения диагоналей вписанного четырехугольника $ABCD$ через M, угол COD — через α. Тогда $\angle AOB = 3\alpha$, $\cup DC = \alpha$, $\cup AB = 3\alpha$.

Используем утверждение (докажите его!): внутренний угол (т.е. угол с вершиной внутри круга) измеряется полусуммой дуг, на которые он опирается.

Так как по условию $\angle DMC = 90°$, то

$$\angle DMC = \frac{\cup DC + \cup AB}{2}, \ 90° = \frac{\alpha + 3\alpha}{2}, \ \alpha = 45°.$$

Из равнобедренного треугольника ODC, в котором $OD = OC = r$, где r – радиус окружности, по теореме косинусов имеем

$$DC^2 = OD^2 + OC^2 - 2\,OD \cdot OC \cos\alpha,$$

$$10^2 = r^2 + r^2 - 2r^2 \frac{\sqrt{2}}{2}, \ r^2 = 50\left(2 + \sqrt{2}\right).$$

Искомая площадь круга равна

$$S = \pi r^2 = 50\pi\left(2 + \sqrt{2}\right).$$

Она больше числа 510. Действительно, так как $\pi > 3{,}1$ и $\sqrt{2} > 1{,}4$, то

$$50\pi\left(2 + \sqrt{2}\right) > 50 \cdot 3{,}1 \cdot (2 + 1{,}4) = 527 > 510.$$

Упражнение 8. В окружность с центром в точке O вписан четырехугольник $KLMN$, диагонали которого перпендикулярны. Площадь круга, ограничиваемого окружностью, равна 1110. Найдите длину отрезка MN и сравните ее с числом 10, если известно, что угол MON в пять раз меньше угла KOL.

Задача 13 (факультет психологии МГУ, 1999 г.). *Четырехугольник ABCD вписан в окружность. Длины противоположных сторон AB и CD равны 9 и 4 соответственно, AC = 7, BD = 8. Найдите площадь четырехугольника ABCD.*

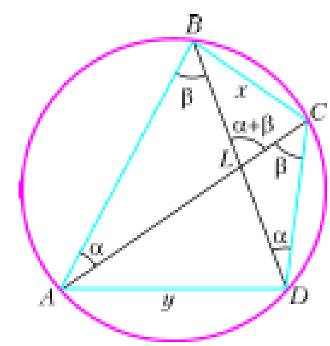


Рис. 13

Решение. Пусть (рис.13) $\angle BAC = \alpha$, $\angle ABD = \beta$. Тогда. по следствию теоремы о вписанном угле и из теоремы о внешнем угле, для треугольника CDL имеем

$$\angle BDC = \angle BAC = \alpha, \ \angle ACD = \angle ABD = \beta, \ \angle BLC = \alpha + \beta.$$

Пусть также $BC = x$, $AD = y$. Из теоремы косинусов для треугольников ABC и DBC получим уравнение для $\cos\alpha$:

$$\begin{cases} x^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC\cos\alpha = 9^2 + 7^2 - 2 \cdot 9 \cdot 7\cos\alpha, \\ x^2 = BD^2 + DC^2 - 2BD \cdot DC\cos\alpha = 8^2 + 4^2 - 2 \cdot 8 \cdot 4\cos\alpha. \end{cases}$$

Отсюда $81 + 49 - 126\cos\alpha = 64 + 16 - 64\cos\alpha$, и $\cos\alpha = \frac{25}{31}$.

Тогда $\sin\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha} = \frac{4\sqrt{21}}{31}$.

Аналогично, из треугольников ABD и ACD имеем

$$\begin{cases} y^2 = AB^2 + BD^2 - 2AB \cdot BD\cos\beta = 9^2 + 8^2 - 2 \cdot 9 \cdot 8\cos\beta, \\ y^2 = AC^2 + CD^2 - 2AC \cdot CD\cos\beta = 7^2 + 4^2 - 2 \cdot 7 \cdot 4\cos\beta. \end{cases}$$

Отсюда

$$\cos\beta = \frac{10}{11} \text{ и } \sin\beta = \frac{\sqrt{21}}{11}.$$

Площадь четырехугольника равна половине произведения его диагоналей на синус угла между ними (докажите).

Поэтому

$$S_{ABCD}=\frac{1}{2}AC\cdot BD\sin(\alpha+\beta)=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot 7\cdot 8(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta)=\frac{1820\sqrt{21}}{341}.$$

Упражнение 9. Четырехугольник $KLMN$ вписан в окружность. Длины противоположных сторон KL и MN равны 3 и 5 соответственно, $KM = 7$, $LN = 6$. Отрезки KM и LN пересекаются в точке P. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника KLP.

Задача 14 (мехмат МГУ, 1998 г.). *Во вписанном четырехугольнике $ABCD$ диагонали пересекаются в точке E, причем $\frac{AC}{AE}=10$, $\frac{BD}{BE}=\frac{13}{4}$. Радиус окружности $R = 10$. Одна из диагоналей четырехугольника является диаметром. Найдите длину BC.*

Решение. Пусть (рис.14) $AE = m$, $EC = 9m$, $BE = 4k$, $ED = 9k$, $m > 0$, $k > 0$. По свойству отрезков хорд $AE\cdot EC = BE\cdot ED$, или $m\cdot 9m = 4k\cdot 9k$. Отсюда

$$m = 2k,\ AC = 10m = 20k > 13k = BD.$$

Так как $AC > BD$, то AC – диаметр, и $\angle ABC = 90°$. Имеем $AC = 2R$, или $10m = 2\cdot 10$. Тогда $m = 2$, $k = 1$, $BE = 4k = 4$, $ED = 9k = 9$, $AE = m = 2$, $EC = 9m = 18$.

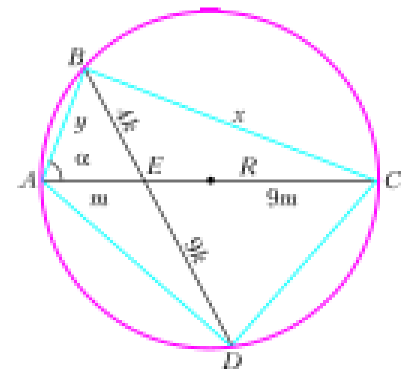


Рис. 14

Пусть $BC = x$, $AB = y$, $\angle CAB = \alpha$. Из треугольников ABC и ABE получим систему

$$\begin{cases}x^2+y^2=20^2,\\ y^2+2^2-2\cdot 2y\cos\alpha=4^2,\\ y^2+20^2-2\cdot 20\cdot y\cos\alpha=x^2,\end{cases}$$

из которой следует

$$x^2 = 405,\ \text{и}\ x = 9\sqrt{5}.$$

Неравенства с модулем

(Начало см. на с. 35)

Решение.

$$(16)\Leftrightarrow\begin{cases}4x^2-20(x-1)+3(4x-p)-p\le 0,\\ 4x^2-20(x-1)-3(4x-p)-p\le 0.\end{cases}$$

Поскольку оба неравенства в системе линейны (!) относительно p, попробуем этим воспользоваться. Решаем систему относительно p:

$$x^2-2x+5\le p\le -2x^2+16x-10. \qquad (17)$$

Условие существования параметра p равносильно требованию

$$x^2-2x+5\le -2x^2+16x-10\Leftrightarrow x^2-6x+5\le 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1\le x\le 5. \ (18)$$

Комментарий 1. При изучении темы «Задачи с параметрами» существенно осознавать смысл промежуточных результатов.

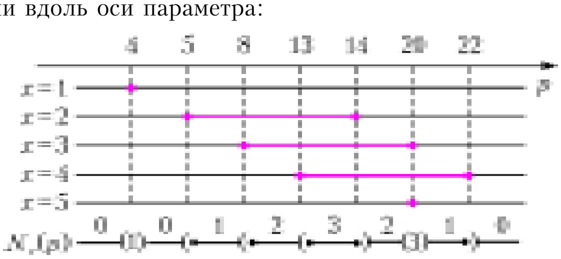
Как толковать неравенство (18)? Оно объявляет *все* значения x, которые могут быть решениями исходного неравенства (16) *хотя бы при одном* значении параметра. Следовательно, целочисленными решениями неравенства могут быть только целые числа из промежутка $[1; 5]$, т.е.

$$x\in\{1, 2, 3, 4, 5\}. \qquad (19)$$

Естественно, что для любого целочисленного числа из набора (19) надо выяснить, при каких значениях параметра p это число будет решением неравенства (16). Поскольку $(17)\Leftrightarrow(16)$, то поочередно подставляя числа из набора (19) в неравенство (17), мы сразу найдем все соответствующие значения параметра:

$$\begin{aligned} x=1&\Rightarrow 4\le p\le 4,\\ x=2&\Rightarrow 5\le p\le 14,\\ x=3&\Rightarrow 8\le p\le 20,\\ x=4&\Rightarrow 13\le p\le 22,\\ x=5&\Rightarrow 20\le p\le 20.\end{aligned} \qquad (20)$$

Чтобы выявить значения параметра, при которых исходное неравенство имеет максимальное число целочисленных решений, воспользуемся «разверткой» полученной информации вдоль оси параметра:



Здесь для каждого утверждения из (20) цветом выделены значения параметра p, при которых истинно это утверждение. Последняя строка объявляет количество $N_x(p)$ целочисленных решений при данном значении параметра (равное числу пересечений вертикальной прямой, проходящей через соответствующую точку p на оси параметра, с выделенными точками).

Очевидно, что максимальное количество целочисленных решений равно трем ($\max N_x(p)=3$), и это достигается, когда $13\le p\le 14$ или $p = 20$.

Комментарий 2. Мы специально рассмотрели задачу 7 и по причине демонстрации очень полезного приема – «развертки» промежуточной информации вдоль оси параметра. Этот прием часто существенно облегчает продвижение к ответу в задачах с параметрами.